BERNARD MALGRANGE

La méthode de Calderón (fin)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 10, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A10_0>

19 janvier 1960

LA MÉTHODE DE CALDERÓN (fin)

par Bernard MALGRANGE

1. Le théorème de Calderón.

Reprenant les notations de l'exposé 9, nous allons déduire du théorème 1, exposé 9, le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit P un opérateur différentiel homogène d'ordre m, dont les coefficients dans un voisinage de l'origine de $R_x^n \times R_t$, $(n \neq 2)$, sont $1 + s$ fois continuement différentiables, $(s > 0)$, et vérifient l'une des conditions (SE) ou (SR) de l'exposé 9. Soit $K > 0$, une constante et soit f une fonction de x et de t qui, au voisinage de l'origine, est m fois continuement différentiable, nulle pour $t \leq 0$ et vérifie :

$$|Pf|^2 \leq K \sum_{|j| \leq m-1} |D_{x,t}^j f|^2 \quad . \tag{1.1}$$

Alors il existe un voisinage de l'origine dans lequel f est nulle.

DÉMONSTRATION. - Le changement de variable $t \longrightarrow t - \sum x_i^2$ nous ramène au cas où f est nulle si $t \leq \sum x_i^2$ sans changer les hypothèses, tout au moins au voisinage de l'origine. Grâce au théorème 1, exposé 9, nous savons qu'il existe un voisinage V de 0 dans R_x^n et des constantes C, τ_0, k_0 $(C > 0$, $\tau_0 > 0)$ telles que, si $0 \leq \tau \leq \tau_0$ et $k > k_0$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{[0,\tau]\times V}$, on ait :

$$\int e^{k(t-\tau)^2} |P\varphi|^2 \, dx\, dt \geq Ck \sum_{|j| \leq m-1} \int e^{k(t-\tau)^2} |D_{x,t}^j \varphi|^2 \, dx\, dt \quad . \tag{1.2}$$

En diminuant au besoin τ_0, nous pouvons supposer que $V \times [0, \tau_0] \supset \{(x, t) ; 0 \leq t \leq \tau_0$ et $t \geq \sum x_i^2\}$. Soit alors α une fonction de t indéfiniment différentiable, nulle pour $t \geq \tau$ et égale à 1 pour $t \leq \tau/2$, appliquant l'inégalité (1.1) à αf, on trouve :

$$\int e^{k(t-\tau)^2} |P(\alpha f)|^2 \, dx\, dt \leq K \int e^{k(t-\tau)^2} \sum_{|j| \leq m-1} |D_{x,t}^j (\alpha f)|^2 \, dx\, dt$$

$$+ K' \int_{\tau/2}^{\tau} e^{k(t-\tau)^2} \, dt \quad .$$

K' ne dépendant que de f , α , etc., mais non de k , d'où en utilisant (1.2) :

$$(Ck - K) \int e^{k(t-\tau)^2} \sum_{|j| \leq m-1} |D^j_{x,t} f|^2 \, dx \, dt \leq K' \int_{\tau/2}^{\tau} e^{k(t-\tau)^2} \, dt$$

en comparant la croissance des deux membres lorsque k tend vers $+\infty$ on aboutit à une absurdité si les $D^j_{x,t} f$ ne sont pas nuls pour $t < \frac{\tau}{2}$.

Ce théorème a été obtenu par CALDERÓN dans le cas (SR) , la démonstration reste valable sans changement dans le cas (SE) .

2. Produit de deux opérateurs.

THÉORÈME 2. - Soient P_1 et P_2 deux opérateurs différentiels homogènes d'ordre m_1 et m_2 respectivement dont les coefficients, dans un voisinage de l'origine de $R^n_x \times R_t$ $(n \neq 2)$, sont indéfiniment différentiables et vérifient : ceux de P_1 (SE) ou (SR) , ceux de P_2 (SE) .

Alors il existe un voisinage V de 0 dans R^n_x , une constante $\tau_0 > 0$, et des fonctions C et k , définies et strictement positives pour $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $C(\tau)$ tendant vers $+\infty$ si τ tend vers 0 , telles que pour toute fonction φ m fois continuement différentiable $(m = m_1 + m_2)$ à support dans $V \times [0 , \tau]$, on ait pour $k > k(\tau)$:

$$\int e^{k(t-\tau)^2} |\widetilde{P_1 P_2} \varphi|^2 \, dx \, dt \geq C(\tau) \sum_{|j| \leq m-1} \int e^{k(t-\tau)^2} \|D^j_{x,t} \varphi\|^2 \, dt$$

où $\widetilde{P_1 P_2}$ désigne la partie principale de $P_1 P_2$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de remplacer $\widetilde{P_1 P_2}$ par $P_1 P_2$ (ou par $P_2 P_1$), ces trois opérateurs ne différant que d'un opérateur d'ordre strictement inférieur à m En appliquant le théorème 1 de l'exposé 9 à P_1 et $P_2 \varphi$, on voit qu'il existe un voisinage V' de 0 dans R^n_x et des constantes τ' , C' , k' , $(\tau' > 0 , C' > 0)$ telles que pour $\tau \in [0 , \tau']$, $k > k'$, $\varphi \in \mathcal{D}_{V' \times [0,\tau]}$ on ait :

$$\int e^{k(t-\tau)^2} |P_1 P_2 \varphi|^2 \, dx \, dt \geq C' k \sum_{|j| \leq m-1} \int e^{k(t-\tau)^2} \|D^j_{x,t} P_2 \varphi\|^2 \, dt \quad .$$

Utilisant le fait que $D^j P_2 - P_2 D^j$ est un opérateur d'ordre $< j + m_2$, on applique à P_2 et D^j le théorème 2 de l'exposé 9, ce qui suppose que P_2 vérifie (SE) , et l'on obtient le résultat cherché.

On déduit de là un théorème d'unicité au voisinage de 0 :

THÉORÈME 3. - Soient P_1 et P_2 deux opérateurs vérifiant les hypothèses du théorème 2, posons $P = \widetilde{P_1} P_2$ (ou $P = P_1 P_2$, ou $P = P_2 P_1$) ; toute fonction f qui, au voisinage de l'origine de $R_x^n \times R_t$, est m fois continuement différentiable, nulle pour $t \leq 0$ et vérifie l'inéquation :

$$|Pf|^2 \leq K \sum_{|j| \leq m-1} |D_{x,t}^j f|^2$$

est nulle au voisinage de 0.

REMARQUES. - a. Les hypothèses de régularité nécessaires pour que la démonstration soit valable ne sont pas les mêmes dans les trois cas envisagés. Par exemple, pour $P_1 P_2$, il suffit que les coefficients de P_1 soient $1 + s$ fois continuement différentiables $(s > 0)$ et que ceux de P_2 le soient $\max(m_1 - 1, 1 + s)$ fois. On ignore si des conditions d'ordre $1 + s$ suffisent pour P_1 et P_2 ; il en est toutefois ainsi pour $P = P_1 P_2$ lorsque P_1 et P_2 vérifient tous deux (SE) ; on peut même dans ce cas, d'après HÖRMANDER ([2]), se contenter de conditions de Lipschitz.

b. Le théorème 3 est dû à MIZOHATA [4], par une autre méthode, lorsque P_1 et P_2 sont elliptiques, du deuxième ordre, et vérifient (S) ; par exemple à coefficients réels, par exemple si P est la partie principale du carré du Laplacien, d'un ds^2 deux fois continuement différentiable.

c. Nous n'avons pas démontré les théorèmes 1, exposé 9, et 2, exposé 10, sous les hypothèses les plus générales. Par les mêmes méthodes, on obtiendrait le théorème 2 pour un produit, au sens des opérateurs intégraux singuliers, d'opérateurs convenables, ou le théorème 1, exposé 9, en englobant dans une même formulation (SE) et (SR) ; mais les changements de variables nécessaires pour en déduire le théorème d'unicité et la transformation de P en $\beta P + (1 - \beta) P_0$ rendent les conditions peu maniables.

3. Le cas $n = 2$ (MIZOHATA [5]).

Une partition de l'unité dans l'espace des opérateurs integraux singuliers va nous permettre de récupérer les théorèmes 1 et 2 de l'exposé 9 dans ce cas particulier, ce qui prouvera, s'il en était besoin, que le canular ne provenait que de la démonstration.

a. Choisissons un recouvrement ouvert V_j de la sphère unité Ω_ξ du dual R_ξ^n de R_x^n, les V_j étant simplement connexes. Soit γ_j une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement et soit :

$$\alpha_j = \frac{\gamma_j}{\sqrt{\Sigma \gamma_j^2}}$$

prolongeons les α_j à R^n par :

$$\alpha_j(\xi) = \alpha_j(\xi/|\xi|)$$

pour $\xi \in R^n_\xi$, $\xi \neq 0$. De sorte que $\alpha \in \hat{\Sigma}$ et $\Sigma \alpha_j^2 = 1$. Nous posons enfin $A_j = \mathcal{F}\alpha_j$, ce qui nous donne de bonnes distributions valeurs principales.

b. Soit P un opérateur différentiel homogène d'ordre m , dont les coefficients, au voisinage de 0 , sont $1 + s$ fois continuement différentiables et vérifient (SE) ou (SR) . On remplace P par $\beta P + (1 - \beta)P_0$, où β sera choisie ultérieurement dans $\mathcal{D}_{x,t}$, $\beta = 1$ au voisinage de 0 , $0 \leq \beta \leq 1$, et de support assez petit, P_0 désignant l'opérateur obtenu en remplaçant dans P les coefficients par leur valeur à l'origine. Nous considérons le système associé : $\frac{d}{dt} + i\mathcal{H}\Lambda$ ou $\mathcal{H}$ est définie par son symbole : $\sigma(\mathcal{H}) = h(x , t , \xi)$, h étant la matrice de l'exposé 9.

Soient alors des applications différentiables : $\psi_j : \Omega^n_\xi \longrightarrow V_j$ dont la restriction au support de α_j soit l'identité, nous définissons les opérateurs $\mathcal{H}_j$ par leurs symboles :

$$\sigma(\mathcal{H}_j) = h(x , t , \psi_j(\xi/|\xi|)) = h_j(x , t , \xi) \quad .$$

Nous pouvons diagonaliser $h_j(x , t , \xi)$ localement, donc globalement sur V_j qui est simplement connexe donc sur Ω^n_ξ grâce à ψ_j ; d'ou l'existence des matrices n_j et δ_j ainsi que des opérateurs N_j et Δ_j correspondants. Si de plus, nous avons choisi le support de β assez petit, les $n_j(0 , 0 , \xi)$ étant inversibles, les $n_j(x , t , \xi)$ en étant très voisins le sont aussi, donc les N_j sont inversibles en tant qu'opérateurs dans L^2 . De même, les fonctions $\lambda_j(x , t , \xi)$ sont différentiables en t et inversibles. Soit $U = (u_1 , u_2 , \dots , u_m)$, $u_i \in \mathcal{D}_{x,t}$ à support dans $[0 , \tau]$ (donc par passage à la limite, $u_i \in \mathcal{D}^1_{[0,\tau]}[H^1_x]$), raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, exposé 9, (appliquer les théorèmes 1 et 2 de l'exposé 8 à chacune des composantes u_i), on voit qu'il existe C_1 , τ_1 , k_1 , tels que si $0 \leq \tau \leq \tau_1$ et $k \geq k_1$ on ait :

$$(3.1) \qquad \int e^{k(t-\tau)^2} \left\|\frac{dU}{dt} + i\mathcal{H}_j \Lambda U\right\|^2 dt \geq C_1 k \int e^{k(t-\tau)^2} \|U\|^2 dt \quad .$$

Appliquant ceci à $U_j = A_j * U$, si nous remarquons que $\mathcal{H}_j \Lambda U_j = \mathcal{H}\Lambda U_j$

puisque $h(x, t, \xi) = h_j(x, t, \xi)$ sur le support de α_j, nous trouvons en ajoutant toutes les inégalités obtenues :

$$\sum_j \int e^{k(t-\tau)^2} \left\| \frac{dU_j}{dt} + i \mathcal{H} \wedge U_j \right\|^2 dt \geqslant C_1 k \sum_j \int e^{k(t-\tau)^2} \|U_j\|^2 dt .$$

Mais d'après le choix des α_j, $\sum_j \|U_j\|^2 = \|U\|^2$, d'autre part :

$$\frac{dU_j}{dt} + i \mathcal{H} \wedge U_j = A_j*\left(\frac{dU}{dt} + i \mathcal{H} \wedge U\right) + i[\mathcal{H}, A_j*] \wedge U$$

où $i[\mathcal{H}, A_j*]\wedge$ est un opérateur borné et enfin :

$$\sum_j \left\|A_j*\left(\frac{dU}{dt} + i \mathcal{H} \wedge U\right)\right\|^2 = \left\|\frac{dU}{dt} + i \mathcal{H} \wedge U\right\|^2$$

d'où l'on tire facilement :

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\|\frac{dU}{dt} + i \mathcal{H} \wedge U\right\|^2 \geqslant C_1 k \int e^{k(t-\tau)^2} \|U\|^2 dt$$

si $k > k_1$. On termine la démonstration des théorèmes 1 et 2 de l'exposé 9 de la même manière, et l'on en tire les applications correspondantes (cf. paragraphes 1 et 2 de ce présent exposé).

REMARQUE.

- CALDERÓN généralise son théorème aux systèmes d'équations (et d'inéquations), il a les mêmes difficultés pour $n = 2$ et $n = 3$, que l'on supprime encore par des des partitions de l'unité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.). - Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 16-36.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 177-190.

[3] MALGRANGE (Bernard). - Unicité du problème de Cauchy, d'après A. P. Calderón, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 178.

[4] MIZOHATA (Sigeru). - Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 687-692.

[5] MIZOHATA (Sigeru). - Note sur le traitement du problème de Cauchy par les opérateurs d'intégrale singulière, J. of math. Soc. of Japan, t. 11, 1959, n° 3.