L. Schwartz

**Opérateurs analytiques elliptiques (fin)**

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. nº 6, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A9_0>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 6

OPÉRATEURS ANALYTIQUES ELLIPTIQUES (fin).

-:-:-:-

THÉORÈME - Si $D$ est un opérateur différentiel à coefficients constants dans $R^n$, ayant une solution élémentaire à gauche $E$ analytique dans $\complement 0$, toute distribution $T$ définie dans un ouvert $\Omega$ de $R^n$, telle que $DT = S$ soit analytique dans $\Omega$, est elle-même analytique dans $\Omega$.

Nous avons déjà démontré ce théorème dans l'exposé n° 5, en nous appuyant sur le théorème de Cauchy-Kowalewska; nous en donnerons ici une démonstration indépendante de ce théorème.

Comme dans l'exposé n° 5, on peut supposer $T$ définie dans $R^n$ et à support compact, $\Omega$ borné dans $R^n$. On a $T = E * DT = E * S$. Nous allons démontrer la propriété suivante qui ne suppose pas que $E$ soit solution élémentaire d'un opérateur différentiel :

PROPOSITION 1. - Si $E$ est une distribution analytique dans $\complement 0$, et si $S \in \mathcal{E}'$, $T = E * S$ est analytique dans tout ouvert $\Omega$ où $S$ est analytique.

Soit $\omega$ un ouvert $\bar{\omega} \subset \Omega$, $\Omega$ borné et soit $\alpha \in \mathcal{D}$ une fonction de support $K$ dans $\Omega$, égale à 1 dans un voisinage ouvert $V$ de $\bar{\omega}$.

$$T = E * (1 - \alpha)S + E * \alpha S .$$

Comme $(1 - \alpha)S = 0$ dans $\omega$, $E * (1 - \alpha)S$ est analytique dans $\omega$ (le potentiel $E * A$ est analytique dans le complémentaire du support de $A$ ; c'est ce que nous avons vu dans l'exposé n° 5 à propos de l'analycité des solutions de l'équation homogène). Il reste donc à montrer que $E * \alpha S$ est analytique dans $\omega$. Or $\alpha S$ peut s'écrire $\alpha f$, où $f$ est une fonction analytique sur un voisinage de support de $\alpha$.

Nous savons déjà que $E * \alpha f$ est infiniment différentiable puisque $\alpha f$ l'est. Calculons alors les dérivées de $E * \alpha f$. Les $D_i$ désigneront des dérivées partielles d'ordre 1 .

Une dérivée d'ordre $m$ peut s'écrire $D_m\, D_{m-1} \cdots D_2\, D_1(E * \alpha f)$ .

$$D_1(E * \alpha f) = E * (D_1\alpha) f + E * \alpha (D_1 f)$$

$$D_2 D_1(E * \alpha f) = D_2\, E * (D_1\alpha) f + E * (D_2\alpha)(D_1 f) + E * \alpha(D_2 D_1 f)$$

Supposons que l'on ait :

$$D_m\, D_{m-1} \cdots D_1(E * \alpha f) = \left\{ \sum_{l=1}^{m} D_m\, D_{m-1} \cdots D_{l+1}\, E * (D_l\alpha)(D_{l-1} \cdots D_1\, f) \right\} + E * \alpha(D_m\, D_{m-1} \cdots D_1\, f) \qquad \text{(I)}$$

En dérivant il viendrait :

$$\begin{aligned} D_{m+1}\, D_m \cdots D_1(E * \alpha f) &= D_{m+1} \left\{ \sum_{l=1}^{m} D_m \cdots D_{l+1}\, E * (D_l\alpha)(D_{l-1} \cdots D_1\, f) \right. \\ &\quad + E * (D_{m+1}\alpha)(D_m \cdots D_1\, f) + E * \alpha(D_{m+1} \cdots D_1\, f) \\ &= \left\{ \sum_{l=1}^{m+1} D_{m+1} \cdots D_{l+1}\, E * (D_l\alpha)(D_{l-1} \cdots D_1\, f) \right\} \\ &\quad + E * \alpha(D_{m+1} \cdots D_1\, f) \end{aligned}$$

ce qui démontre par récurrence que (I) donne bien l'expression de $D_m \cdots D_1(E * \alpha f)$ .

a). Majorons d'abord le dernier terme de (I). Il est un produit de convolution de $E$ avec une distribution à support compact $K \subset \Omega$, donc il ne dépend dans $\omega$ que des valeurs de $E$ dans un ouvert borné $U$ de $R^n$ ($U = \omega - K$ par exemple).

Dans $U$ , $E$ est somme finie $\sum_{|q| \leq k} D^q g_q$ , $\int_U |g_q| \leq M$ .

Alors $$|E * \alpha(D_m \cdots D_1\, f)| \leq c_k\, M \sup_{\substack{|q| \leq k \\ x \in K}} |D^q\, (D_m \cdots D_1\, f)|$$

$$\leq C_k \sup_{\substack{|q| \leq k \\ x \in K}} |D^q \alpha| \sup_{\substack{|q| \leq k \\ x \in K}} |D^q\, D_m \cdots D_1\, f|$$

ce qui, $f$ étant uniformément analytique dans $K$ , et $\alpha$ et $k$ indépendants de $m$ , semajore par une expression de la forme $C^{m+k}\,(m+k)$ !

b) Majorons maintenant $D_m\, D_{m-1} \cdots D_{l+1}(E) * (D_l\alpha)(D_{l-1} \cdots D_1\, f)$. $\alpha$ étant égale à 1 dans le voisinage $V$ de $\bar{\omega}$ , $D_l\alpha$ est nulle dans $V$ donc le support de $(D_l\alpha)(D_{l-1} \cdots D_1\, f)$ est contenu dans le compact $K \cap \complement V$ .

Alors le produit de convolution ne dépend que des valeurs de $D_m \cdots D_{l+1}\, E$ dans l'ouvert $\omega - (K \cap \complement V)$ , contenu dans le compact

$\bar{\omega} - (K \cap \complement V) \subset \bar{\omega} - \complement V \subset \complement 0$ , de sorte que $E$ est uniformément analytique dans $\omega - (K \cap \complement V)$ .

On a donc des majorations $|D_m \ldots D_{l+1} E(x)| \leqslant A^{m-l} (m-l)\,!$ (uniforme analycité de $E$ ) pour $x \in \omega - (K \cap \complement V)$

$|(D_l \alpha)(D_{l-1} \ldots D_1 f)| \leqslant B_l \, B^{l-1} (l-1)\,!$ (uniforme analycité de $f$ dans $K$ $B_l$ = borne supérieure du module des dérivées d'ordre $l$ de $\alpha$ ) .

Finalement on aura une majoration du type

$$|D_m \ldots D_{l+1} E * (D_l \alpha)(D_{l-1} \ldots D_1 f)|$$
$$\leqslant (C')^m (m-l)\,!\,(l-1)\,! \leqslant C'^m \, m\,!$$

Le nombre des termes de la somme $\Sigma$ de (I) étant $m$ , on aura finalement pour cette somme $\Sigma$ la majoration $C'^m (m+1)\,!$ d'où finalement, dans $\omega$ ,

$$|D_m \ldots D_1 (E * \alpha f)|$$
$$\leqslant C^{m+k} (m+k)\,! + C'^m (m+1)\,! \leqslant C''^m \, m\,!$$

d'où l'analyticité de $E * \alpha f$ donc de $E * S$ dans $\omega$ , et par suite dans $\Omega$ C.Q.F.D.

<u>REMARQUE</u>. Dans cette démonstration on peut remplacer la classe des fonctions analytiques par d'autres classes de fonctions indéfiniment différentiables (ce qu'on ne pouvait pas faire dans la démonstration de l'exposé n° 5, utilisant Cauchy-Kowalewska). On peut aussi supposer que les $D_j$ sont des dérivées partielles par rapport à <u>certaines des coordonnées</u> seulement, et démontrer des propriétés d'analyticité partielle par rapport à certaines variables. C'est ce que nous allons voir.

<u>EXEMPLE</u> : L'opérateur de la chaleur $D = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

On démontrera que la solution élémentaire est $E = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} Y(t)$ où $Y(t)$ est la fonction d'Heaviside, nulle pour $t \leqslant 0$ , égale à 1 pour $t > 0$ .

L'opérateur de la chaleur est elliptique. Si l'on intègre $E$ au voisinage de l'origine successivement par rapport à $x$ puis $t$ , on obtient une valeur finie : on définit donc bien ainsi une distribution (qui, en fait, est une fonction positive).

Etudions la majoration des dérivées successives de $t$ pour $x$ voisin de $x_0$ non nul et $t > 0$ voisin de 0 (car $E$ est analytique pour $t \neq 0$ ).

Remplaçons $x$ par $z = \rho e^{i\varphi}$ et $t$ par $u = r\,e^{i\theta}$, $|E(z,u)|$ est égal

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\, e^{-(\rho^2/4r)\cos(2\varphi-\theta)} .$$

Au voisinage de $x$ et $t$, prenons $|\rho e^{i\varphi} - x| = k|x|$ et $|r\, e^{i\theta} - t| = kt$ avec $k$ suffisamment petit pour que $|2\varphi - \theta| \leqslant \omega < \frac{\pi}{2}$.

On aura alors $|E(z,u)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{E}}\, e^{-B\frac{x^2}{t}}$, $A$, $B$, constantes $> 0$ convenables.

D'après les inégalités de Cauchy :

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\,\frac{\partial^m}{\partial t^m} E(x,t)\right| \leqslant \frac{l!\, m!}{(kx)^l\,(kt)^m} \sup_{\substack{|Z-x|=k|x|\\ |u-t|=kt}} |E(Z,u)|$$

$$\leqslant \frac{l!\ m!}{k^{l+m}\,|x|^l\, t^m}\,\frac{A}{\sqrt{t}}\, e^{-B\frac{x^2}{t}} \leqslant \frac{C_1^{l+m}}{t^{m+\frac{1}{2}}}\, e^{-B\frac{x^2}{t}}\ l!\ m!$$

pour $x$ voisin de $x_0 \neq 0$.

Il nous faut majorer maintenant $t^{-(m+\frac{1}{2})}\, e^{-B\frac{x^2}{t}}$ pour $x$ voisin de $x_0$, $t$ voisin de $0$, en fonction de $m$ seulement. Le logarithme de cette expression est $-(m+\frac{1}{2})\log t - B\frac{x^2}{t}$ ; il vaut $-\infty$ avec $m$ ; il a un maximum entre $t = 0$ et $t = \varepsilon$, donné par $-\frac{m+\frac{1}{2}}{t} + \frac{B\,x^2}{t^2} = 0$ ou $t = \frac{B\,x^2}{m+\frac{1}{2}}$, qui tend vers $0$ pour $m \to \infty$. En remplaçant $t$ par cette valeur dans la majoration ci-dessus, on aura :

$$t^{-(m+\frac{1}{2})}\, e^{-B\frac{x^2}{t}} \leqslant C_2^m\,(m+\tfrac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}} \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\,\frac{\partial^m}{\partial t^m} E(x,t)\right| \leqslant C_3^{l+m}\ l!\ m!\ (m+\tfrac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}} \leqslant C^{l+m}\ l!(2m)! \qquad (2)$$

On a donc les conclusions suivantes :

1°) $E(x,t)$ est indéfiniment différentiable, de la classe 2 dans $\complement 0$, ce qui signifie que dans tout compact de $\complement 0$ on a une majoration $|D^p E| \leqslant C^p\,(2p)!$ $(p = (p_1, p_2))$. (Cette classe n'est pas quasi-analytique, ce qui était évident a priori puisque $E = 0$ dans le demi-plan $t \leqslant 0$ et $E \neq 0$ pour $t > 0$ ).

2°) $E$ est partiellement analytique en $x$ dans $\complement 0$, ce qui signifie que l'application $x \to E(x,\hat{t})$ est une fonction analytique de $x$ à valeurs dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables de $t$, pour $(x,t) \neq (0,0)$ ; ou encore que dans tout compact de $\complement 0$, on a une majoration relative aux dérivées partielles en $x,t$ :

$$\left|D_x^p\, D_t^q\, E\right| \leqslant k_q\, C^p\, p!$$

3°) E est de classe (1,2) en $(x,t)$ , au sens de la majoration (2), valable sur tout compact de $\complement\, 0$ .

Les méthodes utilisées dans l'exposé actuel sont valables quand on remplace la classe analytique par les précédentes, d'où :

PROPOSITION 2. - *Toute distribution* $T$ *d'un ouvert* $\Omega$ *de* $R^2$ *est de classe 2* (*resp. de classe* (1,2) *en* $(x,t)$ , *resp. partiellement analytique en* $x$ ), *si* $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ *a cette propriété* (*en particulier si* $T$ *est solution de l'équation* homogène $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ ).

Cette étude montre combien les propriétés locales d'une solution élémentaire à gauche dans $\complement\, 0$ renseignent sur les propriétés locales des solutions de l'équation homogène.

---