L. Schwartz

Conditions d'ellipticité

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

3 décembre 1954

Exposé n° 4 (L. SCHWARTZ)

CONDITIONS D'ELLIPTICITÉ

-:-:-:-

On a déjà défini dans les exposés précédents la notion d'opérateur elliptique : D , opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables, est un opérateur elliptique (resp. analytique-elliptique), si, quelle que soit T , dans tout ouvert où $D.T$ est une fonction indéfiniment différentiable (resp.analytique) T est une fonction indéfiniment différentiable (resp.analytique). Lorsque D est un opérateur différentiel à coefficients constants, on sait qu'il possède au moins une solution élémentaire, E , $DE = \delta$. δ est analytique en dehors de l'origine; donc si D est elliptique (resp. analytique-elliptique), E est indéfiniment différentiable (resp.analytique) en dehors de l'origine. On a la

Proposition 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différentiel à coefficients constants soit elliptique (resp.analytique-elliptique), est qu'il existe une solution élémentaire qui soit une fonction indéfiniment différentiable (resp.analytique) dans l'ouvert complémentaire de l'origine.

Nous venons de voir que cette condition était nécessaire (et qu'alors toutes les solutions élémentaires ont cette propriété).

Sa suffisance sera une conséquence de la proposition 3 relative aux systèmes (voir plus loin).

La proposition 1 admet le :

Corollaire : Un opérateur différentiel à coefficients constants, analytique-elliptique, est elliptique.

En effet sa solution élémentaire est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine, puisqu'elle est analytique.

<u>Application</u> : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ a pour solution élémentaire :

$$E = \begin{cases} \dfrac{-1}{n-2} \dfrac{1}{S_n} \dfrac{1}{r^{(n-2)}} & \text{pour } n \neq 2 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{r} & \text{pour } n = 2 \end{cases}$$

($r = \sqrt{\Sigma x_i^2}$, S_n = aire de la sphère unité = $\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$) , donc Δ est analytique-elliptique. On calculera ultérieurement une solution élémentaire de $\Delta - \lambda$, qui montrera que $\Delta - \lambda$ est analytique-elliptique.

<u>Opérateurs matriciels et matrices-distributions</u>.

On peut étendre la notion d'opérateur elliptique au cas suivant :

Une <u>matrice-distribution</u> de type (ℓ, m) sera par définition une matrice à ℓ lignes et m colonnes dont tous les coefficients seront des distributions définies sur un même espace R^n . On notera la matrice générique de ce type par $\overset{(\ell,m)}{T}$ et ses coefficients par $T_{i,j}$. (C'est aussi une distribution à valeurs dans l'espace des matrices (ℓ,m)).

Si le produit de convolution de chaque coefficient d'une matrice T_1 par chaque coefficient d'une matrice T_2 est bien défini, alors on peut définir $T_1 * T_2$ lorsque T_1 est de type (ℓ,m) et T_2 de type (m,p) par les règles usuelles du produit des matrices. Ce produit de convolution est associatif dans les mêmes conditions que dans le cas scalaire, mais non commutatif.

Un opérateur différentiel désignera maintenant une matrice de type quelconque dont les coefficients sont des opérateurs différentiels $D_{i,j}$. On notera un opérateur dont la matrice est de type (ℓ,m) par $\overset{(\ell,m)}{D}$. On fera opérer les opérateurs sur les matrices par les règles usuelles du calcul matriciel. Par exemple $\overset{(\ell,m)}{D} \cdot \overset{(m,1)}{T}$ sera la matrice de type $(\ell,1)$ dont la ième ligne est donnée par :

$$(D\cdot T)_i = \sum_{j=1}^{m} D_{i,j} \; T_j$$

$\overset{(m,m)}{I}$ désignera la matrice unité de type (m,m)

On a évidemment $DT = D\delta * T$ en appelant $D\delta$ la matrice dont les coefficients sont $D_{i,j}\,\delta$. On notera aussi par D la matrice D.

Les opérateurs envisagés jusqu'ici étaient du type $(1,1)$.

<u>Définition</u>. <u>Un opérateur</u> $\overset{(\ell,m)}{D}$ <u>sera dit elliptique (resp. analytique-elliptique) si toute matrice-distribution</u> $\overset{(m,1)}{T}$ <u>a ses coefficients indéfiniment dérivables (resp. analytiques) dans tout ouvert où</u> $\overset{(\ell,m)}{D}\cdot\overset{(m,1)}{T}$ <u>a ses coefficients indéfiniment dérivables (resp. analytiques)</u>.

<u>Proposition 2</u>. a) <u>Si</u> D_1 et D_2 <u>sont deux opérateurs elliptiques (resp. analytiques-elliptiques), alors</u> $D_1\,D_2$ <u>est elliptique (resp. analytique-elliptique)</u>

b) <u>Si</u> $D_1\,D_2$ <u>est elliptique (resp. analytique-elliptique) alors</u> D_2 <u>est elliptique (resp. analytique-elliptique)</u>

<u>Démonstration</u>. Regardons seulement le cas elliptique, car la démonstration est la même dans le cas analytique-elliptique.

a) $(D_1\,D_2)T = D_1\,(D_2\,T)$. D_1 étant elliptique, les coefficients de $D_2\,T$ sont indéfiniment différentiables dans tout ouvert où ceux de $(D_1\,D_2)\,T$ le sont. Donc puisque D_2 est lui aussi elliptique, ceux de T sont indéfiniment différentiables dans tout ouvert où ceux de $D_2\,T$ le sont.

(remarquons que $D_1\,D_2\,T$, $D_2\,T$, T sont tous du type $(k,1)$) , donc dans tout ouvert où les coefficients de $(D_1\,D_2)\,T$ le sont.

C.Q.F.D.

b) Dans tout ouvert Ω où les coefficients de $D_2\,T$ sont indéfiniment différentiables il en est de même de ceux de $D_1\,D_2\,T$ puisque dans Ω ces coefficients sont des combinaisons linéaires de dérivées de fonctions indéfiniment différentiables, donc puisque $D_1\,D_2$ est elliptique, les coefficients de T sont indéfiniment différentiables dans Ω.

C.Q.F.D.

<u>Applications et exemples</u>.

a) Lorsqu'on saura que $\Delta - \lambda$ est elliptique, on saura aussi que tout polynome en Δ, à coefficients constants, est elliptique. Car un tel polynome s'écrit :
$(\Delta - \lambda_1)(\Delta - \lambda_2)\ \dots\ (\Delta - \lambda_k)$.

b) $\Delta = \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z}$. Δ est elliptique donc $\frac{\partial}{\partial z}$ est elliptique. Il en est de même de $\frac{\partial}{\partial z}$ car $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ commutent. Si un opérateur différentiel ordinaire à coefficients constants est elliptique, alors chacun de ses facteurs à coefficients constants est elliptique. Dans le cas général $D_1\, D_2$ peut être elliptique sans que D_1 le soit.

Soit l'opérateur $\overset{(n,1)}{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

et soit l'opérateur $\overset{(1,n)}{\mathrm{div}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

On a : $\overset{(1,n)}{\mathrm{div}} \cdot \overset{(n,1)}{\mathrm{grad}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^{\,2}} = \Delta$. Δ est elliptique, donc $\overset{(n,1)}{\mathrm{grad}}$ l'est (ce qui est évident directement en appliquant le théorème des primitives de distributions) mais $\overset{(1,n)}{\mathrm{div}}$ ne l'est manifestement pas.

<u>Définition</u>. On appellera solution élémentaire à droite de l'opérateur $\overset{(\ell,m)}{D}$ une matrice-distribution à ℓ colonnes et m lignes $\overset{(m,\ell)}{E}$ telle que

$$\underline{\overset{(\ell,m)}{D} * \overset{(m,\ell)}{E} = \delta \cdot \overset{(\ell,\ell)}{I}}$$

Une <u>solution élémentaire à gauche</u> sera une autre matrice-distribution $\overset{(m,\ell)}{F}$ telle que $\underline{\overset{(m,\ell)}{F} * \overset{(\ell,m)}{D} = \delta \cdot \overset{(m,m)}{I}}$. Si $\overset{(\ell,m)}{D}$ est elliptique (resp. analytique-elliptique) alors toute solution élémentaire à droite (s'il en existe) a tous ses coefficients indéfiniment différentiables (resp. analytiques) dans le complémentaire de l'origine.

En effet, on a $\sum_k D_{i,k} * E_{k,j} = \delta_{i,j}$; pour j fixé, c'est vrai pour tout i , ce qui prouve que la matrice

$$E_j = \begin{pmatrix} E_{1,j} \\ \\ \\ E_{m,j} \end{pmatrix} \text{ vérifie } \overset{(\ell,m)}{D} * \overset{(m,1)}{E_j} = \overset{(\ell,1)}{\delta_j} , \text{ où } \overset{(\ell,1)}{\delta_j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \\ (j) \\ \\ (\ell) \end{array}$$

donc $D * E_j = 0$ dans $\complement\, 0$, donc E_j est indéfiniment différentiable (resp. analytique) dans $\complement\, 0$, donc aussi tous les coefficients de E .

[N.B. Cette condition (nécessaire) n'est pas suffisante.

Exemple : une solution élémentaire à droite de

$$\operatorname{div} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots \frac{1}{\partial x_n}\right) \text{ est } E = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ où } F \text{ est une solution}$$

élémentaire du laplacien Δ, car $\operatorname{div} E = \Delta F = \delta$. Or F donc E est dans $\complement 0$ une fonction analytique, cependant div n'est pas elliptique].

<u>Proposition 3. Une condition suffisante pour que l'opérateur matriciel</u> D <u>soit elliptique (resp. analytique-elliptique) est qu'il existe une solution élémentaire à gauche, à coefficients indéfiniment différentiables (resp. analytiques) dans l'ouvert complémentaire de l'origine.</u>

<u>Démonstration</u>. Soit E une solution élémentaire à gauche de D et $\beta \in \mathcal{D}$ tel que $\beta(x) = 1$ dans un voisinage de l'origine. Par extension de la définition classique, on pourra appeler $\varpi = \beta E$ (produit multiplicatif) une paramétrix à gauche car nous allons voir que $\varpi * D = \delta . I - L$ où L est une matrice à coefficients indéfiniment différentiables à supports compacts dans R^n. Si D est de type (ℓ, m), ϖ sera de type (m, ℓ).

Le coefficient $\alpha_{i,j}$ de $\varpi * D$ est, d'après la formule de Leibnitz,

$$\alpha_{i,j} = \sum_k D_{k,j}\, \varpi_{i,k} = \beta \left(\sum_k D_{k,j}\, E_{i,k}\right) - L_{i,j}$$

Dans chaque terme de $L_{i,j}$, β apparaît comme toujours différentié au moins une fois, donc $L_{i,j}$ est nulle au voisinage de l'origine, et comme elle est indéfiniment différentiable dans $\complement 0$, elle est dans $\mathcal{D}$.

Par ailleurs la parenthèse vaut $\delta_{i,j}\, \delta$ et $\beta \delta = \delta$ puisque $\beta(0) = 1$, ce qui prouve bien notre assertion.

Soit maintenant T une matrice-distribution du type $(\ell, 1)$ telle que $\overset{(m,\ell)}{D} * \overset{(\ell,1)}{T} = \alpha$, qui est du type $(m,1)$, ait tous ses coefficients indéfiniment différentiables. Comme deux des trois matrices-distributions ont leurs coefficients à support compact, le produit est associatif, donc

$$T - L * T = (\delta I - L) * T = (\varpi * D) * T = \varpi * (D * T) = \varpi * \alpha$$

donc $T = L * T + \varpi * \alpha$.

L a tous ses coefficients dans $\mathcal{D}$, $L * T$ a donc tous ses coefficients indéfiniment différentiables ; il en est de même de $\varpi * \alpha$ puisque α a tous ses coefficients indéfiniment différentiables. On remarque aussi sur cette formule que si des $T_j \to 0$ dans $\mathcal{D}'$ et que $D\,T_j \to 0$ dans $\mathcal{E}$, alors $T_j \to 0$ dans $\mathcal{E}$. La proposition 3 est donc démontrée lorsque $D\,T$ est indéfiniment différentiable dans <u>tout</u> R^n. Il reste à compléter la démonstration lorsqu'on suppose seulement T défini dans un ouvert Ω de R^n et $D\,T$ indéfiniment différentiable dans cet ouvert, puis à démontrer la proposition dans le cas analytique.

C'est ce qui sera fait dans les deux exposés suivants. Nous donnerons ici quelques remarques complémentaires sur la proposition 3 :

Soit $\overset{m,m}{D}$ matrice <u>carrée</u>, <u>de déterminant</u> $\neq 0$.

Pour que D soit elliptique (resp. analytique-elliptique), il est nécessaire que <u>toutes</u> ses solutions élémentaires, tant à droite qu'à gauche, soient des fonctions indéfiniment différentiables (resp. analytiques) dans $\complement\, 0$, et il est suffisant qu'<u>une</u> solution élémentaire, à gauche ou à droite, ait cette propriété.

En effet si une solution élémentaire à gauche a la propriété, D est elliptique d'après la proposition 3, donc toutes les solutions élémentaires à droite ont la propriété. En remplaçant D par $\check{D}$, on voit que si une solution élémentaire à droite a la propriété, toutes les solutions élémentaires à gauche ont la propriété.

Soit alors D elliptique. Toutes ses solutions élémentaires à droite ont la propriété donc aussi toutes ses solutions élémentaires à gauche.

Réciproquement, supposons qu'une solution élémentaire ait la propriété. Si elle est à gauche, D est elliptique d'après la proposition 3. Si elle est à droite, et s'il existe <u>au moins</u> une solution élémentaire à gauche, celle-ci aura aussi la propriété, et D sera elliptique. C'est l'hypothèse suivant laquelle D est matrice carrée de déterminant $\neq 0$ qui assure cette existence (au contraire <u>div</u> a une solution élémentaire à droite qui a la propriété, mais n'a pas de solution élémentaire à gauche, et n'est pas elliptique).

<u>Proposition 4. Si</u> $\overset{m,m}{D}$ <u>est un opérateur différentiel matriciel carré à coefficients constants, de déterminant</u> $\neq 0$, <u>il a au moins une solution élémentaire bilatère.</u>

Soient en effet $D_{i,j}$ les coefficients de D, $A_{i,j}$ le mineur de $D_{i,j}$. Si alors Δ est le déterminant de D, c'est un opérateur différentiel scalaire que nous supposons $\neq 0$. Alors il a une solution élémentaire F. Si nous posons

$E_{i,j} = F * A_{j,i}$, on voit que la matrice E de coefficients $E_{i,j}$ est solution élémentaire à la fois à gauche et à droite. Car

$$(E * D)_{i,j} = \sum_k E_{ik} * D_{k,j} = \sum_k F * A_{k,i} * D_{k,j}$$

$$= \delta_{i,j} \; F * \Delta = \delta_{i,j} \; \delta$$ et de même pour $(D * E)_{i,j}$.

Ou encore, si on appelle A la matrice de coefficients $A_{i,j}$, on sait que ${}^tA * D = D * {}^tA = \Delta I$, de sorte que si on pose $E = F * {}^tA$, on a bien

$$E * D = F * {}^tA * D = F * \Delta I = \delta \, I$$

$$D * E = D * {}^tA * F = \Delta I * F = \delta \, I$$

Remarquons que dans les mêmes conditions le " théorème des supports" de Lions est vérifié : si $D\,T$ a son support dans un convexe compact K , et si $T \in \mathcal{E}'$, T aussi a son support dans K . En effet $\Delta I * T = {}^tA * (D * T)$ a son support dans K , donc chaque coefficient $\Delta * T_j$ a son support dans K , et comme $\Delta \neq 0$, T_j a son support dans K donc aussi T .

Si D est matrice carrée mais que $\Delta = 0$, rien de tout cela ne subsiste. Il n'y a pas de solution élémentaire ni à gauche ni à droite, car

dét $(D * E) =$ dét $D *$ dét $E = 0$ donc $D * E \neq \delta \, I$ quelle que soit E .
