B. Malgrange

Équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants avec second membres

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 2, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-:-

19 novembre 1954

Exposé n° 2 (B. MALGRANGE)

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS AVEC SECOND MEMBRES.

-:-:-:-

I - EXISTENCE D'UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE.

Soit $D = \sum_{p_1,\dots,p_n} a_{p_1\dots p_n} \dfrac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x^{p_1} \dots \partial x^{p_n}}$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On appelle solution élémentaire de l'opérateur D une distribution T telle que $DT = \delta$ (δ est la mesure de Dirac).

THÉORÈME 1 .- Quel que soit D , il existe une solution élémentaire T de D appartenant à $\mathcal{D}'^k$, où k ne dépend que de la dimension n de R^n .

Appelons toujours $\check{D}$ le transformé de D , i.e. :

$$\langle DT , \varphi \rangle = \langle T , \check{D}\varphi \rangle \quad \text{pour tous} \quad \varphi \in \mathcal{D} , \; T \in \mathcal{D}' .$$

Il s'agit d'établir que, si k est assez grand, il existe une distribution T d'ordre $\leqslant k$, i.e. $T \in \mathcal{D}'^k$, telle que :

$$\langle T , \check{D}\varphi \rangle = \varphi(0) \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{D} .$$

Indiquons d'abord comment va s'effectuer la démonstration. Désignons par $\check{D}\mathcal{D}$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ image de $\mathcal{D}$ par l'application linéaire $\varphi \dashrightarrow \check{D}\varphi$. T est une forme linéaire sur $\check{D}\mathcal{D}$, définie par :

$$\langle T , \chi \rangle = \varphi(0) \quad \text{si} \quad \chi = \check{D}\varphi \in \check{D}\mathcal{D} .$$

(l'expression de $\chi \in \check{D}\mathcal{D}$ comme $\check{D}\varphi$ est unique, car $\check{D}\varphi = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$, entraîne $\varphi = 0$ par Fourier ; donc pour $\chi \in \check{D}\mathcal{D}$ donnée, $\langle T , \chi \rangle$ est bien déterminée).

Supposons avoir prouvé que T est une forme linéaire continue sur $\check{D}\mathcal{D}$ pour la topologie induite par $\mathcal{D}^k$ (pour k assez grand). Alors, grâce au théorème de Hahn-Banach, T pourra être prolongée, à l'espace $\mathcal{D}^k$ entier, en une forme linéaire $\hat{T}$ continue, ce qui revient à dire que $\hat{T} \in \mathcal{D}'^k$; on aura alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle D\hat{T}, \varphi \rangle = \langle \hat{T}, \check{D}\varphi \rangle = \langle T, \check{D}\varphi \rangle = \varphi(0)$$

ce qui prouvera bien que $D\hat{T} = \delta$.

Nous sommes donc ramenés à démontrer que T est continue sur $\check{D}\mathcal{D}$ pour la topologie induite par $\mathcal{D}^k$, c'est-à-dire que, pour k assez grand, si des $\check{D}\varphi \dashrightarrow 0$ au sens de $\mathcal{D}^k$ $(\varphi_j \in \mathcal{D})$, alors $\varphi_j(0) \dashrightarrow 0$ (des f_j voulant dire un filtre de fonctions f_j , comme dans Schwartz, Théorie des Distributions).

Pour établir cela, nous utiliserons la transformation de Fourier.

En supposant que x_1 n'est pas direction caractéristique de $\check{D}$ (ce à quoi on peut toujours se ramener par changement d'axes), on peut écrire :

$$\check{D} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \frac{\partial^m}{\partial x_1{}^m} + \sum_{h=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^h \frac{\partial^h}{\partial x_1{}^h} D_h\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

où les D_h sont des polynômes de dérivation par rapport à x_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$. On a :

$$R = \mathcal{F}(\check{D}\delta) = y_1{}^m + \sum_{h=0}^{m-1} R_h(y_2, \dots, y_n)\, y_1{}^h$$

R et les R_h sont des polynômes. Posons encore :

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathcal{F}\varphi \quad \text{et} \quad y_j = \sigma_j + i\,\tau_j \quad ,$$

pour y complexe (les notations sont un peu différentes de celles de l'exposé 1).

On a évidemment :

$$|\varphi(0)| \leqslant \int_{R^n} |\Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)|\, d\sigma_1 \dots d\sigma_n$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}$, nous savons que Φ est une fonction prolongeable, aux valeurs complexes de la variable, en fonction entière de type exponentiel, à décroissance rapide (ainsi que toutes ses dérivées) dans le champ réel. Posons :

$$A = \sup_{R^n} \left| (1 + |\sigma_1|^{n+1} + \dots + |\sigma_n|^{n+1})\, \Phi \right|$$

A est $< +\infty$ dû fait que Φ est à décroissance rapide dans le champ réel. On a :

$$\int |\Phi|\, d\sigma \leqslant A \int_{R^n} \frac{d\sigma_1 \dots d\sigma_n}{1 + |\sigma_1|^{n+1} + \dots + |\sigma_n|^{n+1}} = A\,.\,K$$

donc $|\varphi(0)| \leqslant AK$, et remarquons que K est un nombre qui ne dépend pas de φ , mais seulement de la dimensions n de l'espace. Il nous faut maintenant majorer convenablement A . Pour cela, nous allons majorer $|\Phi|$ et chacun des $|\sigma_j^{n+1}\Phi|$. Nous appliquerons le lemme de l'exposé n° 1 . On trouve ainsi:

$$|\Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)| \leqslant \operatorname*{Max}_{|y-\sigma_1| \leqslant 2m} |R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\Phi(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|$$

$$|\sigma_1^{n+1}\Phi| \leqslant \operatorname*{Max}_{|y-\sigma_1| \leqslant 2m} |y^{n+1} R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\Phi(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|$$

$$|\sigma_i^{n+1}\Phi| \leqslant \operatorname*{Max}_{|y-\sigma_1| \leqslant 2m} |\sigma_i^{n+1} R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\Phi(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|$$

pour $2 \leqslant i \leqslant n$.

Or pour tous les σ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et tout $y = \sigma + i\tau$ tel que $|y - \sigma_1| \leqslant 2m$, on a :

$$|R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\Phi(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)| \leqslant \int_{R^n} |e^{2i\pi y x_1}| |\check{D}\varphi| dx_1 \dots dx_n$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{|\tau| \leqslant 2m} \int e^{2\pi|\tau x_1|} |D\varphi| dx_1 \dots dx_n$$

De même :

$$|\sigma_1^{n+1}\Phi| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \operatorname*{Max}_{|\tau| \leqslant 2m} \int e^{2\pi|\tau x_1|} \left|\frac{\partial^{n+1}}{\partial x_1^{n+1}} \check{D}\varphi\right| dx_1 \dots dx_n \quad .$$

On obtient des majorations analogues pour les $|\sigma_j^{n+1}\Phi|$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$, d'où finalement :

$$A \leqslant \operatorname*{Max}_{|\tau| \leqslant 2m} \int \left\{ |\check{D}\varphi| + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial^{n+1}}{\partial x_j^{n+1}} \check{D}\varphi\right| \right\} e^{2\pi|\tau x_1|} dx$$

Si $\check{D}\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^{n+1}$, l'intégrale du 2° membre converge vers 0 , donc $|\varphi(0)| \leqslant AK$ converge vers 0 . Le théorème est ainsi démontré, avec $k = n + 1$.

Remarque . – La méthode classique de recherche des solutions élémentaires est basée sur la transformation de Fourier ou sur celle de Laplace. On suppose $T \in \mathcal{S}'$ et, par Fourier par exemple, on passe de $DT = \delta$ à $P\mathcal{C} = 1$ $(P = \mathcal{F}D\delta$,

$\mathcal{E} = \mathcal{F} T$) et on est ainsi ramené à un problème de division. Mais nous ne savons pas résoudre ce problème dans tous les cas, et rien ne nous autorise à supposer que la solution élémentaire que nous avons obtenue soit tempérée ; les majorations que nous avons obtenues dans la démonstration du théorème montrent que, si $x_1 = 0$ n'est pas caractéristique, pour tout $r > 0$ il existera une solution élémentaire T telle que $e^{-r(x_1)}\, T$ soit tempérée.

II - SOLUTION DE L'ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE.

THÉORÈME 2 .- Si f est une fonction $(n+1)$ fois continûment différentiable, il existe une fonction continue g telle que $Dg = f$.

On met f sous la forme $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, où $f_i \in \mathcal{D}^{n+1}$ et a son support dans le complémentaire de la boule ouverte S_i de centre 0 , de rayon i . Soit alors T une solution élémentaire de D ; on a, pour chaque i , $D(f_i * T) = f_i$. La somme $\sum f_i * T$ ne converge pas en général ; mais remarquons que, dans S_i , on a $D(f_i * T) = Df_i * T = 0$. Alors en vertu du théorème démontré dans l'exposé n° 1 , $f_i * T \in \mathcal{E}^0(S_i)$ peut être approchée, au sens de $\mathcal{E}^0(S_i)$, par les combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes solutions de $DX = 0$ dans R^n ; soit P_i une telle combinaison choisie de manière à ce que $|f_i * T - P_i| \leq \frac{1}{2^i}$ sur S_{i-1} ($P_i = 0$ pour $i = 0$) .

La série $\sum_{i=0}^{\infty} (f_i * T - P_i)$ converge maintenant uniformément sur tout compact de R^n vers une fonction continue g , et l'on a $Dg = f$.

C.Q.F.D.

Le procédé utilisé dans la démonstration est analogue à la méthode de Mittag-Leffler pour déterminer une fonction méromorphe ayant des parties principales relatives à ses pôles données à l'avance (Voir SCHWARTZ, Théorie des Distributions, T. II , Chap. VI , P. 68 et 69).

Si $f \in \mathcal{D}'^k$, on peut écrire $f = \sum_p D^p f_p$ (somme finie) , où les f_p sont des fonctions $(n+1)$ fois continûment différentiables ; en vertu du théorème 2 , on peut trouver $g_p \in \mathcal{E}^0$ telle que $Dg_p = f_p$. Alors $D(\sum_p D^p g_p) = f$. Posons $\mathcal{D}'_F = \bigcup_{R=0}^{\infty} \mathcal{D}'^k$; $\mathcal{D}'_F$ est l'espace des distributions d'ordre fini ; nous venons de montrer que $D\mathcal{D}'_F = \mathcal{D}'_F$.

Si $f \in \mathcal{E}$, il existe $g \in \mathcal{E}$ telle que $D_g = f$. En effet, on met f sous la forme $f = \sum f_i$, où $f_i \in \mathcal{D}$ et où le support de f_i ne rencontre pas S_i . On approche ici $f_i * T$ ($DT = \delta$, $T \in \mathcal{D}'^{n+1}$) par des exponentielles-polynômes solutions de $DX = 0$, au sens de $\mathcal{E}(S_i)$.

Précisons. On peut trouver P_i , combinaison finie d'exponentielles-polynômes, telle que toutes les dérivées d'ordre $\leq i$ de $(f_i * T - P_i)$ soient en module majorées par $\frac{1}{2^i}$ dans S_{i-1} . Alors $\sum_i (f_i * T - P_i)$ converge dans $\mathcal{E}$ et répond à la question.

On ne sait pas si, lorsque f est une distribution quelconque, il existe une distribution g telle que $Dg = f$. La réponse est cependant affirmative, lorsque l'opérateur D vérifie la condition suivante : il existe une solution élémentaire T , qui soit une fonction indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine.

Signalons que cette condition est équivalente à la suivante : Si $DU = V$ $(U \in \mathcal{D}', V \in \mathcal{D}')$, U est indéfiniment différentiable dans tout ouvert où V l'est.

Un tel opérateur différentiel D est dit elliptique.

Supposons donc que D vérifie cette condition. Mettons f sous la forme $f = \sum f_i$, où $f_i \in \mathcal{E}'$ et où le support de f_i ne rencontre pas S_i ; $g_i = f_i * T$ est indéfiniment différentiable dans S_i et $Dg_i = 0$ sur S_i .

On pourra trouver une suite d'exponentielles polynômes, solutions de $DX = 0$ dans R^n , qui approchent $f_i * T$ au sens de $\mathcal{E}(S_i)$, (ou même $\mathcal{E}^0(S_i)$) , et on raisonne comme précédemment.

[L'indéfinie différentiabilité permet d'approcher $f_i * T$ uniformément par une suite d'exponentielles-polynômes ; sans elle, on devrait avoir recours à des filtres à base non dénombrable, puisque $\mathcal{D}'$ n'est pas métrisable, et on ne pourrait plus considérer les séries $\sum (f_i * T - P_i)$].

Exemples d'opérateurs auxquels cette étude s'applique :

- le laplacien,
- les laplaciens itérés,
- les $(\Delta + \lambda)^q$,
- l'équation de la chaleur,

qui sont élliptiques, comme nous le verrons plus tard.