B. Malgrange

Le théorème d'approximation pour les équations aux dérivées partielles à coefficients constants

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris.
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55.
-:-:-:-

12 novembre 1954

Exposé n° 1 (B. MALGRANGE)

LE THÉORÈME D'APPROXIMATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

-:-:-:-

RAPPEL DES NOTATIONS.

Ω étant un ouvert de R^n, on désignera par $\mathcal{E}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^m(\Omega)$, resp. $\mathcal{D}(\Omega)$) l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, définies dans Ω, indéfiniment différentiables (resp. m fois continûment différentiables, resp. indéfiniment différentiables à support compact dans Ω). $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{E}^m(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ sont munis de leurs topologies usuelles (Voir Schwartz, Théorie des Distributions, T. I) ; $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'^m(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont leurs duals forts respectifs : $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω, $\mathcal{E}'(\Omega)$ est l'espace des distributions à support compact dans Ω. Lorsque $\Omega = R^n$, on écrit $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, etc. Au lieu de $\mathcal{E}(R^n)$, $\mathcal{E}'(R^n)$, ...

Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose $\mathcal{F}\varphi = \int_{R^n} e^{-2i\pi \langle x,y \rangle} \varphi(x)\, dx$,

où $\langle x,y \rangle$ désigne le produit scalaire $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. De même, pour toute $T \in \mathcal{E}'$, on posera :

$$\mathcal{F}\, T = \langle T_x , e^{-2i\pi \langle x,y \rangle} \rangle \qquad (y \in R^n) .$$

Rappelons l'énoncé du <u>théorème de Paley-Wiener</u> : <u>Pour qu'une distribution T soit à support compact, contenu dans le cube</u> $|x_1| \leq C$, ..., $|x_n| \leq C$, <u>il faut et il suffit que sa transformée de Fourier</u> $\mathcal{F}\, T$ <u>soit une fonction de</u> y <u>à croissance lente, prolongeable aux valeurs complexes</u> z <u>de la variable en une fonction entière, de type exponentiel</u> $\leq 2\pi C$, c'est-à-dire majorée, pour les valeurs $z_1, z_2, \dots, z_n$ des variables complexes par

$$k(\varepsilon)\, e^{2\pi(C+\varepsilon)(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|)} ,$$

où, pour tout $\varepsilon > 0$, $k(\varepsilon)$ dépend de ε, mais non de $z_1, z_2, \dots, z_n$. Dans ce cas $\mathcal{F}\, T$ est à croissance lente non seulement pour $z = y$ réel, mais pour $|\mathcal{I} z| \leq A$ constante quelconque.

Nous aurons besoin d'un autre résultat, connu sous le nom de <u>théorème des supports</u> (LIONS, C.R.Ac.Sc., 23.4.1951) . <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux distributions à support compact sur</u> R^n . <u>Si</u> O_1 (<u>resp.</u> O_2) <u>est le plus petit compact convexe de</u> R^n <u>qui contient le support de</u> S (<u>resp.</u> T) , <u>alors</u> $O_1 + O_2$ <u>est le plus petit compact convexe qui contienne le support de</u> $S * T$.

Enfin, nous appellerons <u>exponentielle polynôme</u> toute fonction sur R^n de la forme :

$$P(x_1 , \dots , x_n) \exp(2\pi i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n))$$

-:-:-:-

Dans le reste de cet exposé, nous nous attacherons à démontrer le théorème suivant :

<u>THÉORÈME</u> .- <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert convexe de</u> R^n . <u>Les fonctions</u> φ <u>de</u> $\mathcal{E}(\Omega)$ <u>qui vérifient l'équation</u> $D\varphi = 0$, <u>où</u> D <u>est un opérateur différentiel</u> $D = \sum a_p \dfrac{\partial^{p_1+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ <u>à coefficients constants</u> a_p , <u>sont limites, au sens de</u> $\mathcal{E}(\Omega)$, <u>de combinaisons linéaires finies d'exponentielles polynômes</u> f <u>telles que</u> $Df = 0$.

Le théorème résultera des deux propositions suivantes :

<u>PROPOSITION 1</u> .- <u>Soit</u> $T \in \mathcal{E}'$ <u>orthogonale à toutes les exponentielles polynômes</u> f <u>telles que</u> $Df = 0$. <u>Alors</u> $\dfrac{\mathcal{F}T}{\mathcal{F}(\check{D}\delta)}$ <u>est une fonction entière</u>.

$\check{D}$ est l'opérateur adjoint de D , i.e. tel que si $U \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, on ait $\langle \check{D}U , \varphi \rangle = \langle U, D\varphi \rangle$.

<u>PROPOSITION 2</u> .- <u>Si</u> T <u>est une distribution à support compact, contenu dans</u> Ω , <u>telle que</u> $\mathcal{F}T/\mathcal{F}(\check{D}\delta)$ <u>soit une fonction entière, alors il existe une distribution</u> S , <u>à support compact contenu dans</u> Ω , <u>telle que</u> $T = \check{D}S$.

Montrons que la conjonction des propositions 1 et 2 entraîne le théorème. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est orthogonale à toutes les exponentielles polynômes f telles que $Df = 0$, alors il existe $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que $T = \check{D}S$; mais alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ telle que $D\varphi = 0$, on a :

$$\langle T , \varphi \rangle = \langle \check{D}S , \varphi \rangle = \langle S , D\varphi \rangle = 0$$

T est donc orthogonale à toutes les solutions $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ de $D\varphi = 0$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé par ces φ (fermé) ; et soit F le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}(\Omega)$ engendré par les exponentielles polynômes f telles que $Df = 0$. Le sous-espace de $\mathcal{E}'(\Omega)$ orthogonal à E et celui orthogonal à F coïncident d'après ce qui précède.

Nous allons maintenant démontrer les propositions 1 et 2.

A - DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.

Posons $g(z) = \dfrac{\mathcal{F}T}{\mathcal{F}(\check{D}\delta)}$, $M(z) = \mathcal{F}T$, $R(z) = \mathcal{F}(\check{D}\delta)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$.

- 1°) $g(z)$ est holomorphe à l'origine.

Soit $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme qui vérifie $DP = 0$. $DP = 0$, i.e. $D\delta * P = 0$.

Cela équivaut à $(\overline{\mathcal{F}}D\delta)(\overline{\mathcal{F}}P) = 0$, ou $(\mathcal{F}\check{D}\delta)(\overline{\mathcal{F}}P) = 0$. Comme $\mathcal{F}\check{D}\delta = R$, si nous posons $\overline{\mathcal{F}}P = \Delta\delta$ (polynôme de dérivation) cela revient à $R\Delta\delta = 0$.

D'après les hypothèses, $DP = 0$ implique $\langle T, P\rangle = 0$ ou $\langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}P\rangle = 0$ ou $\langle M, \Delta\delta\rangle = 0$. Nous devons donc montrer que, si tout polynôme de dérivation $\Delta\delta$ vérifiant $R\Delta\delta = 0$ vérifie $\langle M, \Delta\delta\rangle = 0$, M est divisible par R dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de 0.

Mais on sait (Séminaire Cartan, 1951/52) que si une série convergente M (en $y_1, y_2, \ldots, y_n$) est divisible par une série convergente R (qui est même un polynôme) <u>dans l'anneau des séries formelles,</u> M est aussi divisible par R <u>dans l'anneau des séries convergentes</u>. Nous pouvons donc nous placer dans l'anneau $C[[y_1, y_2, \ldots, y_n]]$ des séries formelles. On sait que si on le munit de la topologie (de type topologie produit) de la convergence de chaque coefficient de la série, tout idéal est fermé (théorème de Krull, voir Séminaire Cartan, 1951/52), et que son dual est l'espace $\mathcal{E}'_0$ des polynômes de dérivation $\Delta\delta$, où $\langle \Delta\delta, \varphi\rangle$ s'obtient en appliquant à la série formelle φ la dérivation Δ et en prenant la valeur à l'origine du résultat.

[On sait aussi, mais nous n'en aurons pas besoin, que l'espace des séries formelles, avec la topologie précédente, n'est autre que le quotient de l'espace $\mathcal{E}$ par le sous-espace (orthogonal de $\mathcal{E}'_0$ dans $\mathcal{E}$) des fonctions nulles à l'origine avec leurs dérivées de tous les ordres].

Alors si $\Delta\delta \in \mathcal{E}'_0$ vérifie $R\Delta\delta = 0$, elle vérifie $\langle R\Delta\delta, \psi\rangle = 0$ ou $\langle \Delta\delta, R\psi\rangle = 0$ pour toute $\psi \in \mathcal{E}$, donc $\langle \Delta\delta, R\psi\rangle = 0$ pour tout polynôme φ et par passage à la limite pour toute série formelle φ ; cela signifie que $\Delta\delta \in \mathcal{E}'_0$ est orthogonale à l'idéal principal (R) de l'anneau des séries formelles ; or cela doit impliquer $\langle \Delta\delta , M \rangle = 0$. Cela prouve que M est adhérent à l'idéal principal (R) , et comme il est fermé, $M \in (R)$.

C.Q.F.D.

Remarque : Cette démonstration, et par suite aussi la proposition 1 , reste valable, si l'on remplace $D\delta$ par n'importe quelle distribution à support compact. Il n'en sera pas de même pour la proposition 2 .

\- 2°) g(z) est holomorphe en un point quelconque de C^n .

Soit $\lambda = (\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n)$. Posons :

$$T_\lambda = e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} T , \quad D_\lambda\delta = e^{2i\pi\langle x,\lambda\rangle} D\delta$$

d'où $\check{D}_\lambda\delta = e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle}\check{D}\delta$. Soit P un polynôme tel que

$$D[e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} P(x)] = 0 \quad .$$

On a :

$$D\delta * e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} P =$$

$$= e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} (e^{2i\pi\langle x,\lambda\rangle} D\delta) * e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} P =$$

$$= e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} [e^{2i\pi\langle x,\lambda\rangle} D\delta * P] = e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} D_\lambda P$$

donc nous supposons que $D_\lambda P = 0$. Mais alors T doit être orthogonale à l'exponentielle-polynôme $e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} P$ puisque $D(e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} P) = 0$, donc $\langle T , e^{-2i\pi\langle x,\lambda\rangle} P\rangle = 0$ ou $\langle T_\lambda , P\rangle = 0$. Ainsi $D_\lambda P = 0$ doit impliquer $\langle T_\lambda , P\rangle = 0$. D'après ce qui a été démontré antérieurement, cela prouve que $\dfrac{\mathcal{F} T_\lambda}{\mathcal{F}\check{D}_\lambda}$ est holomorphe à l'origine ; or cette fonction est $\dfrac{M(z+\lambda)}{R(z+\lambda)}$, donc $\dfrac{M}{R}$ est bien holomorphe au point λ de C^n .

C.Q.F.D.

Ainsi la proposition 1 est complètement démontrée.

B - DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2 .

$g(z) = \dfrac{\mathcal{F}\, T}{\mathcal{F}(\check{D}\delta)}$ $(T \in \mathcal{E}')$ est une fonction entière ; nous allons montrer que $g(z)$ est de type exponentiel, à croissance lente pour les valeurs réelles de z. Du théorème de Paley-Wiener résultera alors que $g(z) = \mathcal{F}S$, avec $S \in \mathcal{E}'$. Comme par conséquent $T = \check{D}S$, le support de S sera contenu lui aussi dans Ω, en vertu du théorème des supports (Ω est supposé convexe).

Nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME .- Soient $f(z)$, $g(z)$, $P(z)$ respectivement deux fonctions entières et un polynôme unitaire de degré m à 1 variable complexe Z tels que

$$f(z) = g(z)\,P(z)$$

Alors, pour tout $z_0 \in C$, $|g(z_0)| \leqslant \frac{1}{r^m} \max_{|z-z_0| \leqslant 2mr} |f(z)|$.

Supposons que $P(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_m)$; nous pouvons raisonner par récurrence ; posons $f_1(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_1}$; on a :

$$\left|f_1(z_0)\right| \leqslant \frac{\left|f(z_0)\right|}{r} \quad \text{si} \quad |z_0 - z_1| \geqslant r \,, \quad \text{et} \quad \left|f_1(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{r} \max_{|z-z_0| \leqslant 2r} |f(z)|$$

en vertu du théorème du module maximum, si $|z_0 - z_1| < r$. On répète le même raisonnement pour $f_2(z) = \dfrac{f_1(z)}{z - z_2}$ et ainsi de suite.

Appliquons ce lemme à la démonstration de la proposition 2. Supposons D étant de degré m, que pour une au moins des variables, x_1 par exemple, le coefficient de $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{\,m}}$ soit $\neq$ (on peut toujours s'y ramener par un changement d'axes ; cela revient à dire que l'hyperplan $x_1 = 0$ n'est pas "caractéristique" pour l'opérateur différentiel). En multipliant $\check{D}\delta$ par une constante nous supposerons ce coefficient égal à 1. Nous pouvons ordonner $\mathcal{F}D$ par rapport à $y_1 = \dfrac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}\right)$; donc $R(z)$ par rapport à z_1 :

$$R(z) = \mathcal{F}\check{D}\delta = z_1^{\,m} + \sum_{k=1}^{m-1} R_k(z_2, \ldots, z_n)\, z_1^{\,m-k}$$

où les R_k sont des polynômes à $(n-1)$ variables. Rappelons que nous avions posé :

$$M = \mathcal{F}T \qquad R = \mathcal{F}(\check{D}\delta) \quad , \quad g = \frac{M}{R}.$$

Appliquons le lemme par rapport à la variable complexe z_1, pour z_2, z_3, ..., z_n fixés.

$$g(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leqslant \max_{|z_1' - z_1| \leqslant 2m} |M(z_1', z_2, \ldots, z_n)| \qquad (1)$$

en prenant $r = 1$ dans le lemme. Or M est de type exponentiel par rapport à z ; il en sera donc de même de g. Ceci établit que g est de type exponentiel. D'autre part, $|M(z'_1 , y_2 , \ldots , y_n)|$ est borné par un certain polynôme en $z'_1 , y_2 , \ldots , y_n$ dans toute la bande $|\mathcal{J} z'_1| \leq 2m$. L'inégalité (1) entraîne alors que $g(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ est à croissance lente pour y réel.

C.Q.F.D.

On verrait très facilement, de la même façon, que si T est une fonction appartenant à $\mathcal{D}$, auquel cas $\mathcal{F} T$ est à décroissance rapide pour y réel, il en est de même de g, et alors $T = \check{D}S$, $S \in \mathcal{D}$.

Le théorème est complètement démontré. Il reste d'ailleurs valable si l'on remplace $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\mathcal{D}'(\Omega)$:

<u>Si</u> $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ <u>vérifie</u> $DU = 0$, <u>alors</u> U <u>est limite dans</u> $\mathcal{D}'(\Omega)$ <u>de combinaisons linéaires des exponentielles polynômes solutions de cette équation</u>.

On remplace, dans la démonstration qui précède, $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (dual de $\mathcal{D}'(\Omega)$) ; en vertu de la remarque qui vient d'être faite, si $\langle \varphi , f \rangle = 0$ pour toute exponentielle polynôme telle que $Df = 0$, alors il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi = \check{D}\psi$, d'où le théorème dans ce cas.

Le théorème est aussi valable dans $\mathcal{E}^m(\Omega)$; on prend alors $T \in \mathcal{E}'^m(\Omega)$; il existe $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tel que $T = \check{D}S$ dès lors que $\langle T , f \rangle = 0$ pour toute exponentielle polynôme f solution de $Df = 0$. Ici on ne sait pas si S est dans $\mathcal{E}'^m$, mais peu importe.

Soit en effet comme précédemment $\varphi \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ telle que $D\varphi = 0$. Nous devons montrer que φ est adhérente dans $\mathcal{E}^m(\Omega)$ à l'espace vectoriel engendré par les exponentielles polynômes f telles que $Df = 0$. Pour cela il faut voir que si $T \in \mathcal{E}'^m$ est orthogonale aux f, T est orthogonal à φ. Or nous savons que $T = \check{D}S$, $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Soit α_j une suite de régularisantes (appartenant à $\mathcal{D}$) convergeant vers δ dans l'espace $\mathcal{E}'^0$ des mesures à support compact muni de la topologie faible. Alors $\langle T , \varphi \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle T * \alpha_j , \varphi \rangle$ car les $T * \alpha_j$ convergent vers T dans $\mathcal{E}'^m$ faible. Mais $\langle T * \alpha_j , \varphi \rangle = \langle \check{D}S * \alpha_j , \varphi \rangle = \langle \check{D}(S * \alpha_j) , \varphi \rangle = \langle S * \alpha_j , D\varphi \rangle = 0$, donc $\langle T , \varphi \rangle = 0$.

C.Q.F.D.

D'autre part, on peut se poser les deux problèmes suivants :

-1°) pour quels opérateurs est-il permit de remplacer les exponentielles-polynômes par de simples polynômes ? Cela est certainement permis pour certains opérateurs, comme en témoigne le cas du laplacien $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y})$;

-2°) pour quels opérateurs peut-on lever la restriction de convexité pour l'ouvert Ω ? Ici encore, cela est permis pour certains opérateurs : exemple : $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, puisque les solutions de $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$ sont les fonctions analytiques, qui sont limite de polynômes dans tout ouvert simplement connexe où elles vérifient cette équation (i.e. où elles sont holomorphes).

Ces questions seront étudiées dans les exposés n° 3 et 4 .