L. Schwartz

Ensembles 1-polaires. Problèmes de Dirichlet pour des opérateurs différentiels d'ordre $2m$

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 17, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A20_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 17

ENSEMBLES 1-POLAIRES.

PROBLEMES DE DIRICHLET POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS D'ORDRE 2m .

-:-:-

<u>Théorème 1</u> : <u>Un ensemble 1-polaire est un ensemble de capacité nulle</u>.

Rappelons quelques résultats de Deny (Potentiels d'Energie finie - Acta Mathematica Tome 82).

Soit T une distribution tempérée dont la transformée de Fourier est une fonction $\hat{T}$, dans R^n , $n \geq 3$. On dit que T est d'énergie finie si

$$\|E\|^2 = \int \frac{|\hat{T}|^2}{\hat{r}^2}\, d\hat{x} \quad \text{est finie.}$$

Un ensemble compact est de mesure spectrale nulle s'il n'existe aucune distribution non nulle d'énergie finie non nulle portée par ce compact. Un ensemble compact est de capacité nulle s'il n'existe aucune <u>mesure positive</u> non nulle d'énergie finie non nulle portée par ce compact. Un ensemble fermé est de mesure spectrale (resp. capacité) nulle si tous ses ensembles compacts sont de mesure spectrale (resp. capacité) nulle.

Comme pour le noyau newtonien, capacité et mesure spectrale sont égales (Deny), il suffit de montrer qu'un ensemble 1-polaire est de mesure spectrale nulle.

Or, pour qu'une distribution T de $\mathcal{E}'$ soit d'énergie finie, il faut et il suffit que $\frac{\hat{T}}{\hat{r}} \in L^2$ c'est-à-dire que $T \in \mathcal{D}'^{1}_{L^2}(R^n)$. D'où le résultat.

Dans le cas $n \leq 2$, la situation est plus compliquée. Une distribution $T \in \mathcal{E}'$ est dite d'énergie finie si $\frac{\hat{T}(\hat{x}) - \hat{T}(\hat{0})}{\hat{r}}$ est dans L^2 ; mais cela revient encore à dire que $\frac{\hat{T}}{\hat{r}}$ est dans L^2 pour $r \geq 1$ donc que $T \in \mathcal{D}'^{1}_{L^2}(R^n)$, et le résultat subsiste.

En réalité, pour n quelconque, on peut définir une énergie par rapport à $\left(-\frac{\Delta}{4\pi^2} + \lambda\right)$, $\lambda > 0$, au lieu de $-\frac{\Delta}{4\pi^2}$; T est d'énergie finie si $\int \frac{|\hat{T}|^2}{\lambda + \hat{r}^2}\, d\hat{x} < \infty$; alors cela équivaut à $T \in \mathcal{D}'^{1}_{L^2}(R^n)$ dans tous les cas, et les ensembles 1-polaires sont les ensembles de λ - capacité nulle, quel que soit $\lambda > 0$ (ou $\lambda = 0$).

Problème de Dirichlet d'ordre $2m$.

Ω est un ouvert de R^n de frontière $\dot{\Omega}$, D un opérateur différentiel d'ordre $2m$ à coefficients bornés ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$; D opère alors continuement de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$.

Soit $f \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. On se propose de chercher $u \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ solution de $Du = f$ et telle que $u - g$ soit "nulle sur $\dot{\Omega}$ ainsi que ses dérivées d'ordre $\leq m-1$ " c'est-à-dire $u - g \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

Si l'on pose $u - g = v$, on est donc ramené à résoudre $Dv = S$ avec $S \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ donnée et $v \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ cherchée.

Théorème 2 : Pour que le Problème de Dirichlet d'ordre $2m$ ait une solution unique, il faut et il suffit que D soit un isoporphisme topologique de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$.

La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire, car si D est biunivoque de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, comme elle est continue, elle est un isomorphisme d'après le théorème de Banach.

Dans ce cas, il existe un opérateur G (opérateur de Green) : $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, inverse de D , et $v = GS$.

DG est l'identité dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$

GD est un projecteur de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$

On se propose, dans ce qui suit, de donner quelques critères permettant de reconnaître que D est un isomorphisme de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$.

Proposition 1 : Soient A et B des espaces de Banach, φ un isomorphisme topologique de A sur B , ψ une application continue vérifiant $\|\psi\| < (\|\varphi^{-1}\|)^{-1}$. Alors $\varphi + \psi$ est un isomorphisme topologique de A sur B .

Comme $\|(\varphi+\psi)(x)\| \geq \|\varphi(x)\| - \|\psi(x)\| \geq \|x\| \left\{ \|\varphi^{-1}\|^{-1} - \|\psi\| \right\}$

on a $\|(\varphi+\psi)(x)\| \geq K\|x\|$

Cela prouve que $\varphi + \psi$ est un monomorphisme. Mais ${}^t\varphi$ est aussi un isomorphisme, et on a aussi

$$\| {}^t\varphi \| < \| {}^t\varphi^{-1} \|^{-1} \quad ,$$

donc ${}^t\varphi + {}^t\psi$ est un monomorphisme, donc $\varphi + \psi$ est un épimorphisme, et par suite c'est un isomorphisme.

Ce résultat s'applique donc à un opérateur $D + D_1$ lorsque D est un isomorphisme, si D_1 est de norme assez petite.

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> D <u>un opérateur continu</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ <u>définissant une forme sesquilinéaire</u> $(u,v) \longrightarrow \langle Du, \bar{v} \rangle$ <u>hermitienne sur</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. <u>S'il existe une constante</u> k <u>positive telle que</u> $\langle Du , \bar{u} \rangle \geq k \||u|\|^2_m$ <u>pour</u> $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, D <u>est un isomorphisme topologique de</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ <u>sur</u> $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$.

Remarquons d'abord que, par continuité, l'inégalité reste vérifiée pour $u \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. Prenons sur $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ la structure préhilbertienne définie par

$$((u , v))_D = \langle Du , \bar{v} \rangle$$

Par hypothèse, la norme $((\quad))_D$ est équivalente à la norme usuelle de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ (on suppose en effet qu'elle est minorée par elle, mais elle est trivialement majorée par elle, car

$$\langle Du , \bar{u} \rangle \leq \|Du\|_{\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)}$$

$$\leq C \|u\|^2_{\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)}$$

à cause de la continuité de D) .

Alors $((\quad))_D$ est une norme <u>hilbertienne</u>. Elle définit un isomorphisme canonique H de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur son semi-dual $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, par la formule

$$\langle Hu , \bar{v} \rangle = ((u , v))_D = \langle Du , \bar{v} \rangle$$

quels que soient u et v ; donc $H = D$, et D est bien un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, c.q.f.d.

<u>Exemples</u> :

1°) Soit $D = \prod_{i=1}^{i=m} (-\Delta + \lambda_i)$, $\lambda_i > 0$.

Alors, pour $u \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(R^n)$, on a, par Fourier :

$$\langle Du , \bar{u} \rangle = \int_{R^n} Du\, \bar{u}\, dx = \int_{\hat{R}^n} \Big(\prod_{i=1}^{m} (4\pi^2 \hat{r}^2 + \lambda_i)\Big) \, |\hat{u}(\hat{x})|^2 \, d\hat{x}$$

$$\geqslant k \int_{R^n} \Big(\sum_{|p| \leq m} (2\pi \hat{x})^{2p} \Big) \, |\hat{u}(\hat{x})|^2 \, d\hat{x} = k \, \| u \|^2_{\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)}$$

On est donc dans les conditions de la proposition 2 .

2°) Si $D = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^{2p}$, on définit

$$((u , v)) = \sum_{|p| \leq m} \langle D^p u , D^p \bar{v} \rangle$$

$\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, muni de cette norme, (qui est sa norme usuelle) est un espace d'Hilbert. Le problème de Dirichlet relatif à D admet une solution et une seule.

3°) Si D est un opérateur d'ordre $2m$ à coefficients constants, écrivons

$$D = (-1)^m D_{2m} + D_1$$

en supposant que la forme associée à la partie homogène D_{2m} est définie positive.

Supposons en outre que D soit hermitien, par exemple

$D = \sum g_{p,q} D^p D^q$ avec $g_{p,q} = (-1)^{|p+q|} \overline{g_{qp}}$

Soit $\mathcal{F} D = \hat{D}$ polynome de degré $2m$. L'ensemble des termes de plus haut degré est défini positif. Si, donc, $\hat{D}$ ne s'annule jamais, on a $\hat{D} \geqslant k(1 + r^2)^m$. Alors le problème de Dirichlet est bien posé quel que soit l'ouvert Ω .
