

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

## L'opérateur de Green et la résolution du problème de Dirichlet

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 14, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A17_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris  
 -:-:-  
 Séminaire SCHWARTZ  
 (Equations aux dérivées partielles)  
 Année 1954/55  
 -:-:-

Exposé n° 14

L'OPÉRATEUR DE GREEN ET LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

-:-:-

Cas de l'opérateur  $-\Delta + \lambda$  pour des valeurs complexes différentes d'un nombre réel négatif :

$\Omega$  est un ouvert donné de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\lambda$  est un nombre réel positif, on notera par  $((f,g))_\lambda$  le produit scalaire hermitien :

$$((f,g)) = \sum_i \int_\Omega \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \right) dx + \lambda \int_\Omega (f \bar{g}) dx$$

(On écrira  $((f,g))$  quand la spécification de  $\lambda$  ne sera plus nécessaire).

L'opérateur  $D_\lambda = -\Delta + \lambda$  (On notera éventuellement  $D$  comme plus haut) établit un isomorphisme de  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}'_{L^2}^1(\Omega)$  pour leurs structures hilbertiennes, par  $v \rightarrow D_\lambda v$ , comme on l'a démontré dans l'exposé précédent.

On a très précisément :

$$((v, \varphi))_\lambda = \langle D_\lambda v, \bar{\varphi} \rangle \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}'_{L^2}^1(\Omega).$$

L'OPÉRATEUR DE GREEN ( $\lambda > 0$ ) .

$D_\lambda$  établit un isomorphisme topologique de  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}'_{L^2}^1(\Omega)$ .

L'isomorphisme inverse définit un nouvel opérateur continu  $G_\lambda$  qu'on désigne sous le nom d'opérateur de Green associé à  $D_\lambda$ .  $G$  jouit des propriétés suivantes.

PROPOSITION 1 : a)  $D \circ G$  est l'opérateur identique de  $\mathcal{D}'_{L^2}^1(\Omega)$ .

b)  $G \circ D$  est un projecteur de  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ .

a) C'est la définition. Montrons b).

Si  $f \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ ,  $D_\lambda f = -\Delta f + \lambda f$  donc  $D_\lambda f \in \mathcal{D}'_{L^2}^1(\Omega)$ . Donc

$$D_\lambda (\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)) = \mathcal{D}'_{L^2}^1(\Omega) \quad \text{donc} \quad (G_\lambda \cdot D_\lambda) (\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)) = \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$$

$G_\lambda \cdot (D_\lambda G_\lambda) \cdot D_\lambda = G_\lambda \cdot D_\lambda$ . Cet opérateur est un idempotent, donc un projecteur.

Le noyau est l'espace des  $f$  tels que  $G D f = 0$  donc  $D G D f = D f = 0$ , c'est l'espace  $N_\lambda$  des solutions de l'équation homogène. Pour la structure hilbertienne  $((\ , \ ))_\lambda$ ,  $G D$  est un projecteur orthogonal, car  $H$  est orthogonal à  $\mathcal{D}(\Omega)$  (puisque  $((u, v))_\lambda = \langle D u, \bar{v} \rangle$ ) donc à  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ .

PROBLÈME DE DIRICHLET :

Etant donné  $T \in \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  et  $g \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$  trouver  $u$  tel que

$$1^\circ) D_\lambda u = T ;$$

$$2^\circ) u - g \in \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega) .$$

La solution au problème posé est donnée par  $u = G_\lambda T + (g - G_\lambda D_\lambda g)$ . En effet, si on pose  $u - g = v$  on a  $D_\lambda v = T - D_\lambda g = S$  et  $S \in \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  alors  $u = G_\lambda S + g$ ,  $u = G_\lambda [T - D_\lambda g] + g = G_\lambda T + (g - G_\lambda D_\lambda g)$  et  $D_\lambda (g - G_\lambda D_\lambda g) = 0$ . On a donc la

PROPOSITION 2 : La solution  $u = G_\lambda T + (g - G_\lambda D_\lambda g)$  du problème de Dirichlet ( $\lambda > 0$ ) est somme de la solution "nulle au bord"  $G_\lambda T$  de l'équation  $D_\lambda v = T$  et de la solution  $(g - G_\lambda D_\lambda g)$  de l'équation homogène  $D_\lambda w = 0$  qui prend au bord les mêmes valeurs que  $g$ . Elle dépend continuellement des données.

PROPOSITION 3 :  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$  est somme directe topologique de

a)  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  et de

b) l'espace  $N_\lambda$  des solutions de l'équation homogène  $D_\lambda u = 0$ . Ces deux espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire  $((\ , \ ))_\lambda$ .  $G_\lambda D_\lambda$  est le projecteur de  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ .

Remarquons que si  $g$  est la donnée au bord,  $g - G_\lambda D_\lambda g$  est sa projection parallèlement à  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  sur l'espace des solutions de l'équation  $D_\lambda v = 0$ .

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR DES VALEURS NON RÉELLES DE  $\lambda$ .

Existence de l'opérateur de Green.

(On considère  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  plongé dans  $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ ). Appelons  $D_1$  et  $G_1$  les opérateurs correspondant à  $\lambda = 1$ ;  $((u, v))_\lambda$  est alors le produit scalaire canoniquement associé à  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ .

$$((G_1 D_\lambda v, \varphi))_1 = \langle D_\lambda v, \bar{\varphi} \rangle = \langle D_1 v, \bar{\varphi} \rangle + (\lambda - 1) \langle v, \bar{\varphi} \rangle =$$

$$= ((v, \varphi))_1 + (\lambda - 1)((G_1 v, \varphi))_1$$

donc  $v + (\lambda - 1) G_1 v = G_1 D_\lambda v$ .

Comme  $G_1$  est biunivoque,  $D_\lambda v = f$  est donc équivalent à  $[1 + (\lambda - 1)G_1]v = G_1 f$ .

Soit  $\bar{G}_1$  la restriction de  $G_1$  à  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ .

Si  $1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1$  est inversible, on en déduit qu'il y a une solution et une seule, et qu'elle est donnée par  $v = G_\lambda f$ , avec

$$G_\lambda = (1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1)^{-1} G_1$$

$D_\lambda$  et  $G_\lambda$  sont des isomorphismes réciproques, resp. de  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$  et de  $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ .

PROPOSITION 4 :  $\bar{G}_1$  est un opérateur hermitien positif de norme  $\leq 1$  (pour la structure hilbertienne canonique  $(( \ ))_1$  de  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ ).

DÉMONSTRATION : Soient  $v$  et  $\varphi$  des éléments de  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ . On a  $\langle v, \bar{\varphi} \rangle = ((\bar{G}_1 v, \varphi))_1$  c'est-à-dire que  $\bar{G}_1$  est associé à la forme sesquilinéaire  $(v, \varphi) = \int_{\Omega} v \bar{\varphi} dx$  qui est manifestement hermitienne positive, et de

$$\int_{\Omega} v \bar{v} dx \leq \int_{\Omega} v \bar{v} dx + \int_{\Omega} \left( \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right) dx,$$

on en déduit que la norme de  $\bar{G}_1$  est  $\leq 1$ .

PROPOSITION 5 : Si  $\lambda$  est un nombre complexe différent d'un nombre réel négatif, alors  $(1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1)$  est inversible et  $G_\lambda = (1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1)^{-1} G_1$  est tel que

$$a) (G_\lambda D_\lambda)^2 = G_\lambda D_\lambda \quad \text{et} \quad (G_\lambda D_\lambda)(\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)) = \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$$

b)  $D_\lambda G_\lambda$  est l'identité de  $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$  sur lui-même,  $G_\lambda$  est une fonction analytique de  $\lambda$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega), \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega))$

DÉMONSTRATION :  $G_\lambda$  est une fonction analytique de  $\lambda$ , si  $\lambda \in \mathbb{R}^-$ , car alors  $\frac{1}{1-\lambda} \notin [0, 1]$ ,  $[0, 1]$  contenant le spectre de  $\bar{G}_1$ , et  $(1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1)^{-1}$  est comme on sait une fonction analytique de  $\lambda$  dans ces conditions. Le reste est trivial (voir cas  $\lambda$  réel  $> 0$ ).

Il en résulte immédiatement le

THÉORÈME 1 : Si  $\lambda$  est un nombre complexe différent d'un nombre réel négatif,  
alors on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'opérateur  $-\Delta + \lambda$  par la  
formule de la proposition 2 .

$G_\lambda$  est l'opérateur de Green associé à  $-\Delta + \lambda$  . Les données étant fixes,  
la solution, lorsque  $\lambda$  varie, est une fonction analytique de  $\lambda$  .

Terminons par une majoration de la norme de  $G_\lambda$  .

PROPOSITION 6 : a) si  $R(\lambda) \geq 1$  ,  $\|G_\lambda\| \leq 1$

b) si  $R(\lambda) \leq 1$  et :

ou bien :  $R(\lambda) \geq 0$  et  $|\lambda|^2 \geq R(\lambda)$

ou bien :  $R(\lambda) \leq 0$  et  $\Im(\lambda) \neq 0$ , alors  $\|G_\lambda\| \leq \frac{|\lambda - 1|}{|\Im(\lambda)|}$

c) si  $R(\lambda) \leq 1$  et  $|\lambda|^2 \leq R(\lambda)$  ,  $\|G_\lambda\| < \frac{1}{|\lambda|}$

DÉMONSTRATION :  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$  est muni de la norme définie par le produit scalaire  
 $(( , ))_1$  . Le spectre  $\sigma_\lambda$  de l'opérateur  $1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1$  est formé de l'ensemble  
des points  $1 + (\lambda - 1)\sigma_1$  c'est-à-dire contenu dans le segment rectiligne  $[1, \lambda]$  ,  
la plus petite distance  $d(\sigma_\lambda)$  de l'origine à cet ensemble est donc minorée par :

cas a)  $d(\sigma_\lambda) \geq 1$  (distance de l'origine au point 1)

cas b)  $d(\sigma_\lambda) \geq \frac{|\Im(\lambda)|}{|\lambda - 1|}$  (distance de l'origine à la droite passant par  
les points 1 et  $\lambda$ )

cas c)  $d(\sigma_\lambda) \geq |\lambda|$  (distance de l'origine à l'extrémité  $\lambda$  du seg-  
ment  $[1, \lambda]$ ) .

Ce qui donne les majorations indiquées, puisque  $\|G_1\| \leq 1$  .

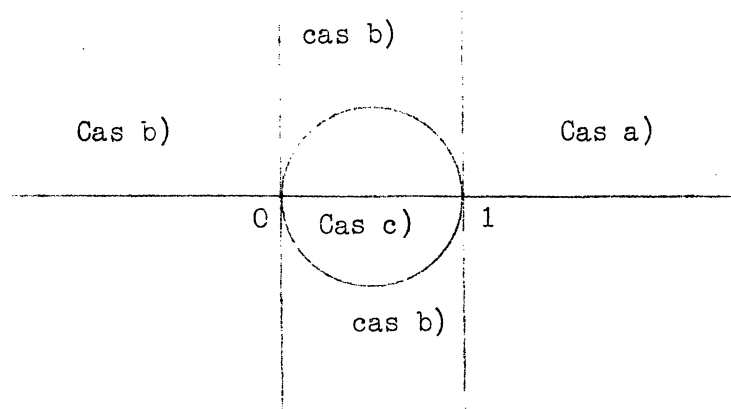


Fig.