L. SCHWARTZ

Solutions élémentaires des opérateurs Δ et $\Delta + \lambda$

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 8, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A11_0>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 8

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DES OPÉRATEURS Δ et $\Delta + \lambda$.

(Exposé du 14.1.1955).

-:-:-:-

L'OPÉRATEUR Δ DANS $\mathcal{E}_{R_+}$ ET $\mathcal{D}'_{R_+}$

L'opérateur Δ est invariant par rotation, donc il lui correspond un opérateur différentiel dans $\mathcal{E}_{R_+}$, que nous continuerons à appeler Δ. Nous l'avons déjà calculé (exposé précédent) : pour $\varphi \in \mathcal{E}_{R_+}$,

$$(1) \qquad \Delta \varphi = 2n \frac{d\varphi}{dt} + 4\, t \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

D'autre part, l'opérateur Δ dans $\mathcal{D}'^{\natural}_{R^n}$ est le transposé de l'opérateur Δ dans $\mathcal{D}^{\natural}_{R^n}$ (autrement dit $\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle$). Donc il lui correspond aussi un opérateur différentiel dans $\mathcal{D}'_{R_+}$, que nous appellerons encore Δ, et qui est le transposé de celui qui est défini par (1). On a donc, pour $T \in \mathcal{D}'_{R_+}$:

$$(2) \qquad \Delta T = -2n \frac{dT}{dt} + 4 \frac{d^2}{dt^2}(t\,T)$$

$$= (8 - 2n) \frac{dT}{dt} + 4\, t \frac{d^2T}{dt^2} .$$

Il importera donc toujours, dans R_+, de bien distinguer l'opérateur Δ sur les fonctions et l'opérateur Δ sur les distributions. Il est bon de remarquer que sur R_+, on peut étudier les opérateurs Δ ci-dessus définis même pour n réel ou complexe, quelconque ; c'est seulement pour n entier $\geqslant 1$ qu'ils auront l'interprétation initialement donnée.

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DE Δ, INVARIANTES PAR ROTATION.

D'après un exposé antérieur, Δ possède sûrement au moins une solution élémentaire E_1 ; alors $E = E_1^{\natural}$ est une solution élémentaire invariante par rotation (car de $\Delta E_1 = \delta$ on déduit $\Delta E_1^{\natural} = \delta^{\natural} = \delta$). Alors E est solution de

$$(3) \qquad 4\,t\,\frac{d^2E}{dt^2} + (8-2n)\,\frac{dE}{dt} = \delta$$

Dans le complémentaire de l'origine sur R_+ , c'est une équation différentielle homogène $(\delta = 0)$; on peut d'autre part diviser par $4\,t$ de façon que le coefficient de $\frac{d^2E}{dt^2}$ soit 1 ; alors, le caractère analytique-elliptique d'un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur R étant trivial lorsque le plus haut coefficient est 1 (voir "Distributions", tome I, p.128), E est une fonction analytique de t dans $\complement_{(R_+)} 0$, soit $E(\hat{t})$. Il lui correspond dans R^n la fonction $\frac{2}{S_n}\frac{E(\hat{r}^2)}{\hat{r}^{n-2}}$, qui est donc analytique dans $\complement_{(R^n)} 0$ de sorte que Δ est un opérateur analytique-elliptique dans R^n ; la même démonstration subsiste pour $\Delta + \lambda$ et celà sans qu'il soit nécessaire de faire aucun calcul effectif de la solution élémentaire.

Néanmoins nous allons calculer cette solution par résolution complète de (3) dans $\mathcal{D}'_{R_+}$, pour n réel ou complexe quelconque. Pour n entier $\geqslant 1$, le calcul n'est pas au fond différent de celui qui a été fait dans le précédent exposé.

Tout d'abord dans $\complement_{(R_+)} 0$ les solutions de (3) sont nécessairement les solutions usuelles de l'équation homogène, pour les raisons données plus haut. Ces solutions sont données par la formule :

$$(4) \qquad E(t) = A + B\,t^{\frac{n-2}{2}} \quad \text{pour} \quad n \neq 2 \quad ;$$

$$E(t) = A + B\log\frac{1}{t} \quad \text{pour} \quad n = 2 \quad .$$

A) <u>Calcul de</u> $\Delta\,\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ <u>dans</u> $\mathcal{D}'_{R_+}$.

Ce calcul est trivial si n est entier $\geqslant 1$. Car alors la distribution $\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ sur R_+ correspond à la distribution définie par la fonction constante $\frac{2}{S_n}$ dans R^n , et alors son laplacien est nul. Mais ce résultat est valable pour n quelconque distinct de tout entier pair $\leqslant 0$ (à condition de considérer que $\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ signifie $\mathrm{Pf}\,\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ pour $\mathcal{R}n \leqslant 0$). On a alors, pour n distinct de tout entier pair $\leqslant 2$:

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\,\mathrm{Pf}\,t^{\frac{n-2}{2}} = \mathrm{Pf}\left\{\frac{d}{dt}\,t^{\frac{n-2}{2}}\right\}$$

(la dérivée dans le 2e membre étant prise au sens usuel, d'où le symbole $\{\ \}$).
On a de même, pour n distinct de tout entier pair $\leqslant 4$:

$$(6)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{Pf}\; t^{\frac{n-2}{2}} = \mathrm{Pf}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\, t^{\frac{n-2}{2}}\right\}$$

Donc, pour n distinct de tout entier pair $\leqslant 4$, on a :

$$(7)\qquad \Delta\,\mathrm{Pf}\; t^{\frac{n-2}{2}} = \mathrm{Pf}\left\{\Delta\, t^{\frac{n-2}{2}}\right\} = 0\ .$$

Comme nous avons vu que ce résultat était trivial par passage à R^n pour $n = 4$ et $n = 2$ (ce que montrerait aussi un calcul direct sur les parties finies), il est bien valable pour n distinct de tout entier pair $\leqslant 0$.

B) <u>Calcul de</u> $\Delta 1$ <u>dans</u> $\mathcal{D}'_{R_+}$

On a toujours

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, 1 = \delta \\[2ex] \dfrac{d^2}{dt^2}\, 1 = \delta' \end{cases}$$

(Ne pas oublier que R_+ est une variété avec bord. 1 n'est pas autre chose que la fonction d'Heaviside Y). Alors

$$(9)\qquad \Delta 1 = 4\, t\, \delta' + (8 - 2n)\delta = -4\,\delta + (8 - 2n)\delta = (4 - 2n)\delta$$

Cela nous donne dans $\mathcal{D}'_{R_+}$ une solution élémentaire de Δ, valable pour n quelconque $\neq 2$:

$$(10)\qquad E(t) = \frac{1}{4 - 2n} = -\frac{1}{2(n-2)}\quad .$$

C) <u>Calcul de</u> $\Delta \log \frac{1}{\hat{t}}$ <u>pour</u> $n = 2$. (1)

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\log\dfrac{1}{t} = -\,\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{t} = \mathrm{Pf}\left\{\dfrac{d}{dt}\log\dfrac{1}{t}\right\} \\[2ex] \dfrac{d^2}{dt^2}\log\dfrac{1}{t} = \mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{t^2} + \delta' = \mathrm{Pf}\left\{\dfrac{d^2}{dt^2}\log\dfrac{1}{t}\right\} + \delta' \\[2ex] \Delta\log\dfrac{1}{t} = \underbrace{\mathrm{Pf}\left\{\Delta\log\dfrac{1}{t}\right\}}_{0} + 4\,t\,\delta' = -4\,\delta \end{cases}$$

---

(1) – Rappelons que $f(\hat{x})$ veut dire la fonction f ou la distribution définie par cette fonction ; $\hat{x}$ est une variable muette, ce que nous exprimerons par le symbole $\wedge$. On pourra aussi écrire $T(\hat{x})$ pour une distribution qui n'est pas une fonction ; par exemple $\delta(\hat{x})$ veut dire δ. Mais fréquemment nous supprimerons ce symbole $\wedge$ quand aucune confusion n'est à craindre.

d'où la solution élémentaire :

(12) $$E(\hat{t}) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{\hat{t}}$$

Cela nous donne, dans R^n pour n entier $\geqslant 1$, la solution élémentaire :

(13) $$E(\hat{x}) = -\frac{1}{(n-2)\,S_n}\,\frac{1}{\hat{r}^{n-2}} \quad \text{pour} \quad n \neq 2 \quad ;$$

(14) $$E(\hat{x}) = -\frac{1}{2\,S_2}\log\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r} \quad \text{pour} \quad n = 2 \quad .$$

C'est ce que nous avions trouvé dans l'exposé précédent.

C) La solution générale de (3) est nécessairement combinaison des solutions déjà trouvées et d'une distribution H ayant pour support l'origine.

Supposons que, dans $\mathcal{D}'_{R_+}$,

(15) $$H = \sum_{k=0}^{m} c_k\ \delta^{(k)} \quad , \quad c_m \neq 0 \quad , \quad m \text{ entier } \geqslant 0 \quad .$$

Alors dans ΔH figure un terme en $\delta^{(m+1)}$ avec un coefficient

(16) $$c_m(8 - 2n - 4m - 8) = -2\,c_m(n + 2m)$$

qui n'est jamais nul si n est distinct de tout entier pair $\leqslant 0$.

Il en résulte que toute solution de (3) est donnée par

(17) $$E(\hat{t}) = -\frac{1}{2(n-2)} + B\,\hat{t}^{\frac{n-2}{2}} \quad ,$$

pour n distinct de tout entier pair $\leqslant 2$, et

(18) $$E(\hat{t}) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{\hat{t}} + A \quad ,$$

pour $n = 2$, A et B étant des constantes arbitraires. Si n est un entier pair $\leqslant 0$, (10) donne toujours une solution de (3), mais la solution générale de (3) n'est pas donnée par (17).

En particulier pour n entier $\geqslant 1$, la solution élémentaire la plus générale de Δ , dans R^n , qui soit invariante par rotation, est donnée par :

(19) $$\begin{cases} E(\hat{x}) = -\dfrac{1}{(n-2)\,S_n}\,\dfrac{1}{\hat{r}^{n-2}} + C \quad , & n \neq 2 \\[2ex] E(\hat{x}) = -\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{\hat{r}} + C \quad , & n = 2 \end{cases}$$

C étant une constante arbitraire. Ce résultat pouvait d'ailleurs s'obtenir sans calcul, car toute solution élémentaire diffère de l'une d'entre elles d'une fonction harmonique ; une telle fonction est analytique, à cause du caractère analytique-elliptique de Δ, résultant de la considération de l'une de ses solutions élémentaires. Or il n'y a pas d'autres fonctions harmoniques (au sens usuel, puisque fonctions analytiques) invariantes par rotation, que les constantes, d'après (4).

En ce qui concerne le cas où n est un entier $\leqslant 0$ pair, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la solution élémentaire la plus générale dans $\mathcal{D}'_{R_+}$ est

$$E = -\frac{1}{2(n-2)} + C\,\delta^{(-\frac{n}{2})}, \tag{20}$$

C constante arbitraire.

RECHERCHE DES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DE $\Delta + \lambda$.

Nous avons à résoudre l'équation

$$4\,t\,\frac{d^2E}{dt^2} + (8-2n)\frac{dE}{dt} + \lambda E = \delta \tag{21}$$

Dans $\complement_{(R_+)} 0$, il s'agit de trouver une solution de l'équation homogène. La solution est la suivante (l'équation est une équation de Bessel modifiée) :

$$E(\hat{t}) = A\,t^{\frac{n-2}{4}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda\,t}) + B\,t^{\frac{n-2}{4}}\,N_{\frac{n-2}{4}}(\sqrt{\lambda\,t}), \tag{22}$$

A et B étant des constantes arbitraires, J une fonction de Bessel, N une fonction de Neumann.

A) Calcul de $(\Delta+\lambda)\,[\mathrm{Pf}.\,t^{\frac{n-2}{4}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda\,t})]$.

Supposons d'abord n entier $\geqslant 1$. On sait que $J_{\frac{n-2}{2}}(u)$ est le produit de $u^{\frac{n-2}{2}}$ par une fonction analytique entière de u^2 ; alors $t^{\frac{n-2}{4}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda\,t})$ est le produit de $t^{\frac{n-2}{2}}$ par une fonction analytique entière de t ; en passant à R^n, on doit remplacer t par r^2 et multiplier par $\frac{2}{S_n}\,\frac{1}{r^{n-2}}$, de sorte qu'on obtient une fonction analytique entière de r^2, donc une fonction analytique dans R^n ; son laplacien est donc son laplacien usuel, calculé dans $\complement_{(R^n)} 0$, donc cette fonction est dans R^n une solution de l'équation homogène.

Ce résultat subsiste sur R_+ pour n quelconque, distinct de tout entier pair $\leqslant 0$; on le voit comme précédemment dans le cas $\lambda = 0$.

B) <u>Calcul de</u> $(\Delta+\lambda)\,[\mathrm{Pf}.t^{\frac{n-2}{4}}\, N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\,t)]$.

Nous allons d'abord supposer que n <u>est distinct de tout entier pair</u>. Alors la fonction de Neumann s'exprime simplement comme combinaison de fonctions de Bessel :

$$N_\nu(u) = \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(u) - J_{-\nu}(u)}{\sin\nu\pi} \tag{23}$$

Le terme en J_ν ne nous intèresse pas, puisque nous venons de voir dans A) que $t^{\frac{n-2}{4}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\,t)$ est une solution de l'équation homogène. Reste le terme en $J_{-\nu}$, nous avons donc à calculer

$$(\Delta+\lambda)\,[t^{\frac{n-2}{4}}\, J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\,t)]\,\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{2}} \quad . \tag{24}$$

Mais alors $t^{\frac{n-2}{4}}\, J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\,t)$ est une fonction analytique entière de t . Son terme constant est :

$$\frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\;\frac{1}{2^{-\frac{n-2}{2}}} = \frac{\lambda^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\; 2^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(2-\frac{n}{2})} \tag{25}$$

Appelons a_1 son coefficient de t . On a

$$\frac{d}{dt}\,[t^{\frac{n-2}{4}}\, J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\,t)] = \{\quad\} + \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}\; 2^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\,\delta \quad , \tag{26}$$

$\{\quad\}$ désignant la dérivée usuelle. Puis

$$\frac{d^2}{dt^2}\,[\quad] = \{\quad\} + a_1\,\delta + \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}\; 2^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\,\delta' \quad , \tag{27}$$

d'où finalement

$$(\Delta+\lambda)\,[t^{\frac{n-2}{4}}\, J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\,t)] = \{\quad\} + \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}\; 2^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\,(4-2n)\,\delta \quad . \tag{28}$$

Le facteur $(4-2n)$ n'est pas nouveau, le calcul est le même que celui qui a été fait pour $\lambda = 0$. Quant à $\{\ \}$, il est nul, puisqu'il s'agit d'une solution (au sens usuel) de l'équation homogène. Finalement, compte-tenu de la formule des compléments relative à Γ, on obtient :

$$(29) \qquad (\Delta+\lambda)\left[\mathrm{Pf.}\ t^{\frac{n-2}{4}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\, t)\right]$$

$$= \lambda^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}+1} \frac{(1-\frac{n}{2})}{\Gamma(2-\frac{n}{2})} \frac{1}{\sin\frac{n\pi}{2}}\, \delta$$

$$= \lambda^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(1-\frac{n}{2})\sin\frac{n\pi}{2}}\, \delta$$

$$= \lambda^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{\pi}\, \Gamma(\tfrac{n}{2})\, \delta \quad .$$

Nous ne nous occuperons pas des valeurs de n qui sont entières paires $\leqslant 0$, car elles donnent lieu à un calcul différent, déjà remarqué pour $\lambda = 0$, et pour λ quelconque dans A) ; le facteur $\Gamma(\frac{n}{2})$ le montre à nouveau ici. Mais nous ne pouvons pas laisser de côté le cas de n pair > 0, car il correspond à un problème donné dans R^n. Mais nous raisonnerons par passage à la limite sur n. On sait en effet que, si ν varie dans le demi-plan $\mathcal{R}\,\nu \geqslant 0$, $N_\nu(u)$ est une fonction continue de ν et u réel > 0. Si maintenant on considère la demi-droite $u \geqslant 0$, on peut seulement dire que $u^\nu N_\nu(u)$ est fonction continue de u et ν pour $u \geqslant 0$, $\mathcal{R}\,\nu > 0$, et qu'elle est majorée par $k \log u$ pour $u \geqslant 0$, $\mathcal{R}\,\nu \geqslant 0$. Dans tous les cas, on en déduit que $t^{\nu/2} N_\nu(\sqrt{\lambda}\, t)$ est une distribution sur R_+ qui, dans $\mathcal{D}'_{R_+}$, dépend continuement de ν pour $\mathcal{R}\,\nu \geqslant 0$.

Comme alors Δ dépend continuement de n pour n quelconque, on peut passer à la limite, et la formule (29) reste exacte pour n entier pair $\geqslant 2$, correspondant à $\nu = \frac{n-2}{2}$ entier $\geqslant 0$.

On en déduit la solution la plus générale de (21), pour n distinct de tout entier pair $\leqslant 0$:

$$(30) \qquad E(t) = \frac{\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\,\pi}{2^{\frac{n}{2}+1}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\ \mathrm{Pf.}\ t^{\frac{n-2}{4}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\, t) + A\ \mathrm{Pf.}\ t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} t)$$

où A est une constante arbitraire.

En particulier, dans R^n, compte tenu de ce que $S_n = \dfrac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$,
la solution élémentaire la plus générale de $\Delta + \lambda$, invariante par rotation, est

$$(31) \qquad E(x) = \frac{\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}} \; \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r) + \frac{C}{r^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r)$$

où C est une constante arbitraire ; n entier $\geqslant 1$.