L. Schwartz

Suite de la démonstration (cf exposé n° 5)

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 6, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A7_0>

6 janvier 1954

Exposé n° 6

Suite de la démonstration (Cf. Exposé n° 5)

E. Si u parcourt un compact de $E \hat{\otimes} F$ contenu dans la semi-boule ouverte $p_0 \otimes q_0(u) < 1$, on peut supposer que λ reste sur un compact de $\ell^1_{(\rho)}(K)$ contenu dans la semi-boule $N_{1,\rho_0}(\lambda) < 1$.

En effet la première semi-boule est l'image par φ de la deuxième. Il suffit alors d'appliquer le théorème suivant : Si $\mathcal{E}$ est un espace métrique complet , R une relation d'équivalence ouverte sur $\mathcal{E}$, Ω un ouvert de $\mathcal{E}$, tout compact de $\mathcal{E}/R$ contenu dans l'image canonique de Ω est l'image canonique d'un compact de Ω . Prendre pour $\mathcal{E}$ l'espace $\ell^1_{(\rho)}(K)$, pour Ω l'ouvert $N_{1,\rho_0}(\lambda) < 1$ et pour R la relation d'équivalence définie par φ . R est bien ouverte comme relation d'équivalence sur un E.V.T. D'autre part, d'après C., la semi-boule $p_0 \otimes q_0(u) < 1$ est bien l'image par φ de la semi-boule $N_{1,\rho_0}(\lambda) < 1$.

F. Pour chaque compact H de $E \hat{\otimes} F$, il existe deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ $(x_n \in E , y_n \in F)$ telles que pour tout $u \in H$, on ait

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)\, x_n \otimes y_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)|\, p_\gamma(x_n)\, q_\gamma(y_n) < \infty$$

(pour tout γ)

Soit $\lambda \in \ell^1_{(\rho)}(K)$. Pour tout γ , l'ensemble des k tels que $\lambda(k)\, p_\gamma(x_k)\, q_\gamma(y_k) \neq 0$ est dénombrable. L'ensemble des γ étant dénombrable, l'ensemble des k tels que $\lambda(k)\, p_\gamma(x_k)\, q_\gamma(y_k) \neq 0$ pour au moins un γ , est dénombrable; or il contient l'ensemble N_λ des k tels que $\lambda(k) \neq 0$, car pour tout k il existe γ tel que $p_\gamma(x_k)\, q_\gamma(y_k) \neq 0$.

Si λ parcourt un ensemble dénombrable Λ , $\lambda(k)$ reste nul sauf sur un ensemble dénombrable fixe $N_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$, et ceci reste vrai si λ décrit L puisque L , compact métrisable, admet un sous-ensemble dénombrable danse Λ . Il suffit alors d'identifier à N , ensemble des entiers $\geqslant 0$, l'ensemble N_0 des k en dehors duquel $\lambda(k)$ reste nul pour $\lambda \in L$ (ou $u = H$) .

Les mesures ρ s'identifient à des mesures sur N , et l'on a

G. Quand u varie dans H , λ varie dans un compact L de $\ell^1_{(\rho)}(N)$. Si H est contenu dans la semi-boule $(p_0 \otimes q_0)(u) < 1$, L est contenu dans la semi-boule $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| p_0(x_n)\, q_0(y_n) < 1$.

H. <u>Lemme du type Du Bois Reymond</u> : Il existe deux suites $\mu(n)$, $\nu(n)$ de nombres > 0 telles que

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{p_\gamma(x_n)}{\mu(n)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{q_\gamma(y_n)}{\nu(n)} = 0 \qquad \text{pour tout } \gamma \\ \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)|\, \mu(n)\, \nu(n) < \infty \end{cases}$$

<u>et que de plus pour</u> $\lambda \in L$, λ <u>reste dans un compact</u> L' <u>de l'espace</u> $\ell^1(N)$ <u>relatif à la mesure unique</u> ρ <u>dont la masse au point</u> $n \in N$ <u>est</u> $\rho(n) = \mu(n)\, \nu(n)$.

On supposera désormais que γ parcourt N , et que p_γ et q_γ sont des suites croissantes de semi-normes. L étant compact, on peut (propriété des compacts d'un espace ℓ^1) déterminer une suite d'entiers croissants : $n_0 = 0$, n_1 , ... , n_γ ,... telle que pour tous les $\lambda \in L$, on ait

$$\sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda(n)| p_\gamma(x_n)\, q_\gamma(y_n) \leq \frac{1}{8^\gamma} .$$

Déterminons $\mu(n)$ et $\nu(n)$ par la suite des conditions :

Pour $n_\gamma \leq n < n_{\gamma+1}$, on a $\begin{cases} \mu(n) = \sup\,[p_\gamma(x_n)\, 2^\gamma, \varepsilon_n] \\ \nu(n) = \sup\,[q_\gamma(y_n)\, 2^\gamma, \varepsilon_n] \end{cases}$

ε_n étant à déterminer . Alors :

a) Pour $\delta \geq \gamma$ et $n_\delta \leq n < n_{\delta+1}$, on a

$$\frac{p_\gamma(x_n)}{\mu(n)} \leq \frac{p_\gamma(x_n)}{p_\delta(x_n)\, 2^\delta} \leq \frac{1}{2^\delta}$$

donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_\gamma(x_n)}{\mu(n)} = 0$ et de même $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q_\gamma(y_n)}{\nu(n)} = 0$

b) On a $\sum_{n_\gamma \leq n < n_{\gamma+1}} |\lambda(n)|\, \mu(n)\, \nu(n)$

$$\leq \sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda(n)|\, 4^\gamma p_\gamma(x_n) q_\gamma(y_n) + \sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda(n)| 2^\gamma p_\gamma(x_n)\, \varepsilon_n$$
$$+ \sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda(n)| 2^\gamma q_\gamma(y_n)\, \varepsilon_n + \sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda(n)|\, \varepsilon_n^2$$

Le premier terme est $\leq \dfrac{1}{2^\gamma}$. Comme, pour tout n , $|\lambda(n)|$ reste borné pour $\lambda \in L$, on peut choisir la suite $\varepsilon_n > 0$ telle que la somme des 3 autres termes soit $\leq \dfrac{1}{2^\gamma}$. On a alors :

$$\sum_{n_\gamma \leqslant n < n_{\gamma+1}} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) \leqslant \frac{1}{2^{\gamma-1}}$$

$$\text{et} \sum_{n \geqslant n_\gamma} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) \leqslant \frac{1}{2^{\gamma-2}}$$

Comme $n_0 = 0$, λ reste dans un compact de $\ell^1_\rho(N)$.

c) Grâce à l'introduction des ε_n , on a $\mu(n) \neq 0$, $\nu(n) \neq 0$.

I. <u>Il existe deux suites</u> $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ <u>telles que</u> $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y'_n = 0$ <u>et que, pour tout</u> $u \in H$, <u>on ait</u> $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda'(n)\, x'_n \otimes y'_n$.

Il suffit de poser $x'_n = \dfrac{x_n}{\mu(n)}$, $y'_n = \dfrac{y_n}{\nu(n)}$ $\lambda'_n = \lambda(n)\mu(n)\nu(n)$.

On a pour tout γ , $\lim_{n\to\infty} p_\gamma(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{p_\gamma(x_n)}{\mu(n)} = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$, et de même $\lim_{n\to\infty} y'_n = 0$.

D'autre part $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| \mu(n)\nu(n) \leqslant 4 < \infty$ et de plus $\sum_{n \geqslant n_\gamma} |\lambda'(n)| \leqslant \dfrac{1}{2^{\gamma-2}}$, donc λ' reste dans un compact L' de ℓ_1 .

J. <u>Fin de la construction.</u>

Pour $\lambda' \in L'$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| p_0(x'_n) q_0(y'_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| p_0(x_n) q_0(y_n) < 1$, donc $\leqslant 1 - \alpha < 1$. Déterminons N tel que

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x'_n) \leqslant 1 \\ q_0(x'_n) \leqslant 1 \end{array}\right\} \text{pour } n > N , \quad \sum_{n \geqslant N}^{\infty} |\lambda'(n)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \lambda' \in L'.$$

Posons $x''_n = x'_n$, $y''_n = y'_n$, $\lambda''(n) = \lambda'(n)$ pour $n > N$, et pour $n \leqslant N$

$$\left\{\begin{array}{l} x''_n = \dfrac{x'_n}{p_0(x'_n)} \qquad y''_n = \dfrac{y'_n}{q_0(y'_n)} \qquad \lambda''_n = \lambda'_n\, p_0(x'_n)\, q_0(y'_n) \\ \qquad \text{si} \quad p_0(x'_n)\, q_0(y'_n) \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x''_n = \dfrac{x'_n}{p_0(x'_n)} \qquad y''_n = \dfrac{y'_n}{\varepsilon}\, p_0(x'_n) \qquad \lambda''(n) = \varepsilon\, \lambda'(n) \\ \qquad \text{si} \quad p_0(x'_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad q_0(y'_n) = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x''_n = \dfrac{x'_n}{\varepsilon}\, q_0(x'_n) \qquad y''_n = \dfrac{y'_n}{q_0(y'_n)} \qquad \lambda''(n) = \varepsilon\, \lambda'(n) \\ \qquad \text{si} \quad p_0(x'_n) = 0 \quad \text{et} \quad q_0(y'_n) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_n = x'_n \qquad y''_n = \dfrac{y'_n}{\varepsilon} \qquad \lambda''_n = \varepsilon\, \lambda'_n \\ \qquad \text{si} \quad p_0(x'_n) = q_0(y'_n) = 0 \end{cases}$$

a) On a encore $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda''(n) x''_n \otimes y''_n$, les suites $\{x''_n\}$ et $\{y''_n\}$ étant fixes et telles que $\lim_{n \to \infty} x''_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y''_n = 0$, $p_0(x''_n) < 1$ $q_0(y''_n) < 1$.

b) Pour tout $n \leq N$, $|\lambda''(n)|$ est uniformément borné quand u parcourt H . De plus pour $n_\gamma \geqslant N$, $\sum_{n \geqslant n_\gamma} |\lambda''(n)| < \frac{1}{2^{\gamma-2}}$ donc λ reste dans un compact L'' de ℓ_1 .

c) On a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda''(n)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| p_0(x'_n) q_0(y'_n) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| + \sum_{n \geqslant N} |\lambda'(n)|$$
$$\leqslant (1 - \alpha) + 4\varepsilon + \varepsilon$$
Si on a choisi ε tel que $1 - \alpha + 5\varepsilon < 1$, on a bien $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda''(n)| < 1$

Corollaires.

A. – Soit E et F deux espaces de Banach. Tout élément u de la boule unité ouverte de $E \hat{\otimes} F$ admet une décomposition de la forme
$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, x_n \otimes y_n \quad \text{avec} \quad \|x_n\| < 1 \quad , \quad \|y_n\| < 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < 1$.

B. – Si E est un Fréchet , H un compact de E , il existe une suite $x_n \to 0$ telle que tout $u \in H$ admette une décomposition de la forme $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|$ étant uniformément borné.

C. – Si E est un Frédhet, tout compact H de E est contenu dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'une suite tendant vers zéro.

D. – Si E et F sont deux Fréchet, tout compact de $E \hat{\otimes} F$ est contenu de la semi-norme $N_{1;\mu_\gamma}$ sur E (resp. $N_{1;\nu_\gamma}$ sur F). Par suite $p_\gamma \otimes q_\gamma$ est la semi-norme sur $E \hat{\otimes} F$ quotient de la semi-norme $N_{1;\mu_\gamma} \otimes N_{1;\nu_\gamma} = N_{1;\rho_\gamma}$. On peut encore exprimer D. de la façon suivante :

Pour $u \in E \hat{\otimes} F$, tout couple (p_0, q_0) de semi-normes sur E et F et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\lambda \in l^1_{(\rho)}(K)$ tel que $u = \sum_n \lambda(k)\, x_k \otimes y_k$ avec :

$$\sum_k |\lambda(k)|\, p_0(x_k)\, q_0(y_k) \leqslant (p_0 \otimes q_0)(u) + \varepsilon$$

(Suite et fin de la démonstration dans l'exposé n° 6)