L. SCHWARTZ

L'espace $L^p(\mu)$ associé à une famille de mesures $(1 \leq p < \infty)$

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 5, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953-1954
-:-:-:-

16 décembre 1953

Exposé n° 5

L'ESPACE $L^p_{(\mu)}$ ASSOCIÉ À UNE FAMILLE DE MESURES $(1 \leq p < \infty)$

Soit $(\mu) = \{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille filtrante de mesures sur le même espace localement compact X. A toute fonction numérique, associons les quantités

$$N_{p,\mu_\alpha}(f) = [\int^* |f(x)|^p \, d\mu_\alpha(x)]^{1/p}$$

Soit $\mathcal{L}^p_{(\mu)}$ l'adhérence de $C(X)$ dans l'espace vectoriel des fonctions vérifiant $N_{p,\mu_\alpha}(f) < \infty$ pour tout α, muni des semi-normes N_{p,μ_α}. Pour que $f \in \mathcal{L}^p_{(\mu)}$ il faut et il suffit que $f \in \mathcal{L}^p_{(\mu_\alpha)}$ pour chaque μ_α. On a donc $\mathcal{L}^p_{(\mu)} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{L}^p_{(\mu_\alpha)}$. $L^p_{(\mu)}$ sera le quotient de $\mathcal{L}^p_{(\mu)}$ par le sous-espace fermé des f vérifiant $N_{p,\mu_\alpha}(f) = 0$ pour tout α c'est-à-dire nulles (μ) - presque - partout (on dira (μ) - presque - partout pour (μ_α)-presque-partout pour tout α)(1).

$L^p_{(\mu)}$ <u>est complet</u> si la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est dénombrable,
$L^p_{(\mu)}$ <u>est alors un Fréchet</u>.
On pourra définir de la même façon $L^p_{(\mu)}(E)$, (E étant un E.V.T. localement convexe) et son complété $\hat{L}^p_{(\mu)}(E)$. On a alors les résultats suivants :

<u>THÉORÈME</u> - <u>Soit X et Y deux edpaces localement compacts, (μ) et (ν) deux familles de mesures sur X et Y, $(\mu \times \nu)$ la famille des mesures produits $\mu_\alpha \otimes \nu_\beta$ sur $X \times Y$. On a les isomorphismes suivants</u> :

$$\hat{L}^p_{(\mu)}(\hat{L}^p_{(\nu)}) \approx \hat{L}^p_{(\nu)}(\hat{L}^p_{(\mu)}) \approx \hat{L}^p_{(\mu \times \nu)}$$

<u>THÉORÈME</u> - $L^1_{(\mu)} \hat{\otimes} E = \hat{L}_{(\mu)}(E)$. <u>En particulier</u> (<u>avec les notations du théorème précédent</u>) :

$$L^1_{(\mu)} \hat{\otimes} L^1_{(\nu)} = \hat{L}^1_{(\mu \times \nu)}$$

<u>THÉORÈME</u> - <u>Pour tout espace localement convexe V séparé complet, il</u>

---

(1) - Remarquer que l'on n'a pas $L^p_{(\mu)} = \bigcap_{\alpha \in A} L^p_{(\mu_\alpha)}$, ce dernier terme n'ayant pas de sens.

<u>existe un espace localement compact</u> X <u>et une famille</u> (μ) <u>de mesures sur</u> X <u>tels que</u> V <u>soit isomorphe à un quotient de</u> $\hat{L}^1_{(\mu)}$.

<u>Démonstration</u> - Soit I l'ensemble $\complement\{0\}$ dans V , muni de la topologie discrète (donc localement compacte) et $i \to x_i$ l'application identique de I dans E . Sur I une mesure est déterminée par la donnée de la masse $\mu(i) \geqslant 0$ de chaque point. Soit alors $\{p_\alpha\}$ une famille filtrante de semi-normes définissant la topologie de V , et soit (μ) la famille de mesures définies par $\mu_\alpha(i) = p_\alpha(x_i)$. La famille (μ) est filtrante et la réunion des supports des mesures (μ) est I ~~puisque~~ pour tout $x \neq 0$ il existe α tel que $p_\alpha(x) \neq 0$.

Considérons l'espace $l^1_{(\mu)}(I)$, espace des fonctions $\lambda : i \to \lambda(i)$, telles que $\sum_i |\lambda(i)| \mu_\alpha(i) = \sum_i |\lambda(i)| p_\alpha(x_i) < \infty$ pour tout α . Soit d'autre part ϖ l'application linéaire $\lambda \to \sum_i \lambda(i) \vec{x}_i$. Cette application est bien définie, car toutes les séries $\sum_i p_\alpha[\lambda(i) \vec{x}_i] = \sum_i |\lambda(i)| p_\alpha(x_i)$ sont sommables, autrement dit la série $\sum_i \lambda(i) \vec{x}_i$ est absolument sommable, donc sommable puisque V est complet. On a alors :

A. ϖ <u>est continue</u>. Très exactement pour tout α , on a

$$p_\alpha(\varpi(\lambda)) \leqslant \sum |\lambda(i)| \mu_\alpha(i) = N_{1;\mu_\alpha}(\lambda) .$$

B. ϖ <u>est épijective</u>. Il suffit de montrer que tout $x \neq 0$ est l'image d'un λ . Or soit i tel que $x_i = x$ et λ tel que $\lambda(i) = +1$ et $\lambda(j) = 0$ pour $j \neq i$. On a $\varpi(\lambda) = x$.

C. ϖ <u>est un épimorphisme</u>. Il suffit de montrer que l'image de la semi-boule $\sum_i |\lambda(i)| \mu_\alpha(i) < 1$ de $l^1_{(\mu)}(I)$ est la semi-boule $p_\alpha(x) < 1$ (1), c'est-à-dire que tout x avec $p_\alpha(x) < 1$ est l'image d'un $\lambda \in l^1_{(\mu)}(I)$ tel que $N_{1,\mu_\alpha}(\lambda) < 1$. Ceci découle de la construction faite en B.

<u>REMARQUE</u> - Pour tout $x \in V$, on a $p_\alpha(x) = \inf N_{1;\mu_\alpha}(\lambda)$, pour $\varpi(\lambda) = x$. Donc p_α est la semi-norme quotient de la semi-norme $N_{1;\mu_\alpha}$. En particulier, si V est un Banach, c'est un quotient d'un

---

(1) - Rappelons que la famille (p_α) est filtrante. Les semi-boules forment donc un système fondamental de voisinages.

espace L^1 par rapport à une famille réduite à une mesure μ unique et la norme de V est la norme quotient.

<u>THÉORÈME</u> - <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des Fréchet, tout</u> $u \in E \hat{\otimes} F$ <u>admet une représentation de la forme</u> $u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$ avec $x_n \to 0$ (<u>dans</u> E), $y_n \to 0$ <u>dans</u> F <u>et</u> $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$..

<u>Si l'on se donne 2 semi-normes</u> p_0 <u>et</u> q_0 <u>sur</u> E <u>et</u> F , <u>et</u> $\varepsilon > 0$, <u>on peut choisir les suites</u> $\{x_n\}$ <u>et</u> $\{y_n\}$ <u>telles que</u> $p_0(x_n) \leqslant 1$, $q_0(y_n) \leqslant 1$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq p_0 \otimes q_0(u) + \varepsilon$$

<u>Si</u> u <u>reste sur un compact de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>on peut laisser fines les suites</u> $\{x_n\}$ <u>et</u> $\{y_n\}$ <u>et</u> $\{\lambda_n\}$ <u>parcourt un compact de</u> l^1 .

<u>Démonstration</u>.

A. <u>Notations</u> -

Soit $\{p_\alpha\}$ (resp. $\{q_\beta\}$) une famille filtrante de semi-normes sur E (resp. F). Pour tout $\gamma = (\alpha,\beta)$, nous écrirons desormais p_γ et q_γ au lieu de p_α et q_β . La famille de semi-normes $\{p_\gamma \otimes q_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ constitue une famille filtrante de semi-normes sur $E \hat{\otimes} F$, définissant la topologie de $E \hat{\otimes} F$. Soit $I = \complement\{0\}$ dans E , $J = \complement\{0\}$ dans F (munis de la topologie discrète) et $K = I \times J$, $i \to x_i$ et $j \to y_j$ les applications canoniques de I dans E et de J dans F . Nous appellerons k un élément (i , j) de K , donc $k \to x_k$ et $k \to y_k$ les applications canoniques $k \to x_i$ et $k \to y_j$. A tout $\gamma \in \Gamma$ correspond une mesure μ_γ sur I définie par $\mu_\gamma(i) = p_\gamma(x_i)$, une mesure ν_γ sur J définie par $\nu_\gamma(j) = q_\gamma(y_j)$ et une mesure $\rho_\gamma = \mu_\gamma \times \nu_\gamma$ sur K ($\rho_\gamma(k) = \mu_\gamma(x_k)\, \nu_\gamma(y_k)$). Désignons par (μ) , (ν) , (ρ) , les familles de mesures (μ_γ) , (ν_γ) , (ρ_γ) ; soit ϖ_1 l'application de $l^1_{(\mu)}(I)$ sur E définie par

$$\varpi_1(\mu^{(1)}) = \sum_{i \in I} \lambda^{(1)}(i)\, x_i$$

et ϖ_2 l'application de $l^1_{(\nu)}(J)$ sur F définie par

$$\varpi_2(\lambda^{(2)}) = \sum_{j \in J} \lambda^{(2)}(j)\, y_j$$

Construisons l'espace $l^1_{(\rho)}(K)$. C'est un espace de Fréchet qui s'identifie à $l^1_{(\mu)}(I) \hat{\otimes} l^1_{(\nu)}(J)$. De plus $N_{1,\rho_\gamma} = N_{1,\mu_\gamma} \otimes N_{1,\nu_\gamma}$ (produit tensoriel des semi-normes).

Soit alors φ l'application linéaire de $l^1_{(\rho)}(K)$ dans $E \hat{\otimes} F$ définie par

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k \in K} \lambda(k) x_k \otimes y_k \quad .$$

Cette application est bien définie, car pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\sum_{k \in K} |\lambda(k)| \, p_\gamma \otimes q_\gamma (x_k \otimes y_k) = \sum_{k \in K} |\lambda(k)| \, p_\gamma(x_k) \, q_\gamma(y_k) =$$
$$= \sum_{k \in K} \lambda |k| \, \rho_\gamma(k) < \infty$$

et dans $E \hat{\otimes} F$ qui est complet toute série absolument sommable est sommable. Pour $u = \varphi(\lambda)$, on a

$$(p_\gamma \otimes q_\gamma)(u) \leqslant \sum_{k \in K} |\lambda(k)| \, p_\gamma(x_k) \, q_\gamma(y_k) \leqslant N_{1,\rho_\gamma}(\lambda)$$

donc φ est continue.

B. $\varphi = \varpi_1 \hat{\otimes} \varpi_2$.

Il suffit de vérifier que la restriction de φ à $l^1_{(\mu)}(I) \hat{\otimes} l^1_{(\nu)}(J)$ est identique à $\varpi_1 \otimes \varpi_2$, c'est-à-dire que $\varphi(\lambda^{(1)} \otimes \lambda^{(2)}) = \varpi^1 \lambda^{(1)} \otimes \varpi^2 \lambda^{(2)}$, ce qui est trivial car

$$\varphi(\lambda^{(1)} \otimes \lambda^{(2)}) = \sum_{k \in K} \lambda^{(1)}(i) \lambda^{(2)}(j) \, x_i \otimes y_j =$$
$$= \Big(\sum_{i \in I} \lambda^{(1)}(i) \, x_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j \in J} \lambda^{(2)}(j) \, y_j\Big)$$

(en vertu de la continuité de l'application canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$)

$$= \varpi^1 \lambda^{(1)} \otimes \varpi^2 \lambda^{(2)} .$$

C. φ <u>est un épimorphisme</u>

En efet ϖ_1 et ϖ_2 sont des épimorphismes et E et F étant des Fréchet $\varpi_1 \hat{\otimes} \varpi_2$ est un épimorphisme.

D. <u>Pour tout</u> $u \in E \hat{\otimes} F$ <u>tout</u> $\gamma \in \Gamma$ <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $\lambda \in l^1_{(\rho)}(K)$ <u>tel que</u>

$$(p_\gamma \otimes q_\gamma)(u) \geqslant N_{1;\rho_\gamma}(\lambda) - \varepsilon$$

En effet p_γ (resp. q_γ) n'est autre que la semi-norme quotient

<u>dans l'enveloppe équilibrée fermée du produit tensoriel de deux compacts</u>.

<u>Application</u>. - Soit G un E.V.T. complet. L'isomorphisme de $B(E,F\,;\,G)$ sur $L(E \hat{\otimes} F\,,\,G)$ est un isomorphisme topologique si l'on met sur $B(E,F\,;\,G)$ la topologie de la convergence uniforme sur les produits de compacts, et sur $L(E \hat{\otimes} F\,,\,G)$ la topologie de la convergence compacte.

La propriété n'est plus vraie en général si on remplace "compact" par "borné" . Elle reste cependant vraie si E et F sont des Banach, car la boule unité ouverte de $E \hat{\otimes} F$ est alors l'enveloppe équilibrée convexe du produit des deux boules unités ouvertes de E et F .