L. Schwartz

A. Définition intégrale de la convolution de deux distributions

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 22, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A23_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954

-:-:-:-

2 juin 1954

Exposé n° 22

A. DÉFINITION INTÉGRALE DE LA CONVOLUTION DE DEUX DISTRIBUTIONS

Dans cet exposé, une distribution S , dépendant de la variable $x \in R^n$, sera notée $S(x)$; on écrira ainsi $T(\xi)$, $T(\eta)$, $U(y)$, etc ...

Il est utile, pour ce qui suit immédiatement, d'adopter la convention suivante : soit T une distribution ; on considérera aussi $T(y)$ comme une distribution à 2 variables x , y , en identifiant $T(y)$ à $1(x) \otimes T(y)$, où $1(x)$ est la distribution égale à la fonction constante 1 de la variable x.

Soit S une distribution ; on définira la distribution $S(x-y)$ par les égalités suivantes :

$$\left\langle S(x-y) , \varphi(x, y)\right\rangle = \left\langle S(\xi) \otimes 1(\eta) , \varphi(\xi+\eta, \eta)\right\rangle =$$
$$= \left\langle S(\xi) , \int \varphi(\xi+\eta, \eta) d\eta \right\rangle = \int \left\langle S(\xi) , \varphi(\xi+\eta, \eta)\right\rangle d\eta$$

On pourra, de la même façon, définir le produit multiplicatif de deux distributions $S(x)$ et $T(y)$, dépendant de deux variables différentes :

$$S(x)\ T(y) = \left[S(x) \otimes 1(y)\right] \left[1(x) \otimes T(y)\right] = S(x) \otimes T(y)$$

Alors on voit que, pour n'importe quelles distributions S et T , le produit $S(x-y)\ T(y)$ a un sens, qui est donné par :

$$\left\langle S(x-y)\ T(y) , \varphi(x,y)\right\rangle = \left\langle S(\xi) \otimes T(\eta) , \varphi(\xi+\eta, \eta)\right\rangle$$

Si l'on cherche maintenant à donner un sens à l'intégrale

$$\int S(x-y)\ T(y)\ dy$$

la question se pose de savoir quand $S(x-y)\ T(y)$ est sommable par rapport à y , i.e. quand $S(x-y)\ T(y) \in (\mathcal{D}'_{L^1})_y\ (\mathcal{D}'_x)$

On vérifie tout de suite que cela est vrai dans les cas usuels où la convolution a un sens.

Il peut arriver cependant que $\int S(x-y)\,T(y)\,dy$ ait un sens sans que l'on ait pu définir $S * T$ de la manière ordinaire ; mais on peut s'attendre alors aux pires canulars. Par exemple, on ignore s'il y a encore commutativité :

$$\int S(x-y)\,T(y)\,dy \overset{?}{=} \int S(y)\,T(x-y)\,dy$$

En effet, $S(x-y)\,T(y)$ et $S(y)\,T(x-y)$ sont deux distributions bien distinctes.

On peut donner une autre définition de la convolution de S et T. Si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, la distribution $S(\xi)\,T(\eta)\,\varphi(\xi+\eta) \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{\xi,\eta}$, alors on pourra écrire l'intégrale :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \iint S(\xi)\,T(\eta)\,\varphi(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Cette intégrale définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, puisqu'elle est limite d'intégrales :

$$\iint \alpha(\xi)\,\beta(\eta)\,S(\xi)\,T(\eta)\,\ (\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta$$

[où $\alpha(\xi)$ (resp. $\beta(\eta)$ sont à support compact et convergent vers $1(\xi)$ (resp. $1(\eta)$) au sens de $\mathcal{E}_\xi$ (resp. $\mathcal{E}_\eta$) en restant bornées dans $\mathcal{B}_\xi$ (resp. $\mathcal{B}_\eta$)] définissant des formes linéaires continues.

Cette définition paraît être celle qui recouvre les cas les plus nombreux. Si $S * T$ a un sens d'après cette définition, il a un sens pour les définitions antérieures, car on doit avoir, d'après Fubini

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \iint S(\xi)\,T(\eta)\,\varphi\,(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta = \iint S(x-y)\,T(y)\,\varphi\,(x)\,dx\,dy$$
$$= \int dy \int S(x-y)\,T(y)\,\varphi(x)\,dx\ ,$$ ce qui signifie que $S(x-y)\,T(y)$ est partiellement sommable en y et que $S * T = \int S(x-y)\,T(y)\,dy \in \mathcal{D}'_x$.

B. DÉFINITION INTÉGRALE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION

Nous avons vu (exposé n° 18, p. 15) que $\mathcal{S}$ est nucléaire. Comme c'est un Fréchet, $\mathcal{S}'$ est aussi nucléaire et l'on a :

$$\mathcal{S}'_{x,y} \approx (\mathcal{S}_{x,y})' \approx (\mathcal{S}_x \hat{\otimes} \mathcal{S}_y)' \approx \mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y$$

La transformation de Fourier à n variables est le produit tensoriel de n transformations à une seule variable (Exposé n° 20, p. 6) ; nous nous bornerons donc à considérer $\mathcal{F}_x$, $x \in R$.

Est-il alors possible de définir $\mathcal{F}U$ ($U \in \mathcal{D}'$) par l'intégrale

$$\int U(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \qquad ?$$

Le produit $U(x)\, e^{-2i\pi x\xi}$ a un sens, en tant que distribution à 2 variables. D'autre part, si $U \in \mathcal{S}'_x$, on a $U(x)\, e^{-2i\pi x\xi} \in (\mathcal{D}'_{L^1})_x\, (\mathcal{D}'_\xi)$.

En effet, en tant que fonction de x, à valeurs dans $\mathcal{S}'_\xi$, $e^{-2i\pi x\xi}$ est scalairement dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que, pour toute $\varphi(\xi) \in \mathcal{S}_\xi$,

$\int e^{-2i\pi x\xi}\varphi(\xi)\, d\xi \in \mathcal{S}_x$, ce qui est de notoriété publique. Or on a $\mathcal{S}(E) \approx \tilde{\mathcal{S}}(E)$, ce qui signifie que $e^{-2i\pi x\xi}$ est, non seulement scalairement, mais effectivement dans $\mathcal{S}$ (Exposé n° 10, p. 12). Autrement dit :

$$e^{-2i\pi x\xi} \in \mathcal{S}_x(\mathcal{S}'_\xi) \approx \mathcal{S}_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi$$

et aussi $\qquad \in \mathcal{S}_\xi \hat{\otimes} \mathcal{S}'_x$

Le produit multiplicatif d'une $T \in \mathcal{S}'$ par une $\varphi \in \mathcal{S}$ est une distribution de $\mathcal{O}'_C$ (i.e. à décroissance rapide à l'infini). Si donc on multiplie $e^{-2i\pi x\xi} \in \mathcal{S}_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi$ par $U(x) \in \mathcal{S}'_x$, on obtient

$U(x)\, e^{-2i\pi x\xi} \in (\mathcal{O}'_C)_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi$, qui est évidemment sommable par rapport à x, et son intégrale en x est bien dans $\mathcal{S}'_\xi$.

Inversion de la transformation de Fourier

Est-ce que $U(x) = \int e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \int U(y)\, e^{-2i\pi\xi y}\, dy$? Et d'abord, l'intégrale $\iint e^{2i\pi\xi(x-y)}\, U(y)\, d\xi\, dy$ a-t-elle un sens et peut-on y intervertir l'ordre des intégrations ?

Remarquons que si $\varphi(x) \in \mathcal{S}_x$, $\theta(\xi) = \int e^{2i\pi\xi x}\varphi(x)\, dx \in \mathcal{S}_\xi$; comme $e^{-2i\pi\xi y} \in \mathcal{S}_y \otimes \mathcal{S}'_\xi$ et $U(y) \in \mathcal{S}'_y$, le produit multiplicatif de $e^{-2i\pi\xi y}$ par $U(y)$ d'une part et $\theta(\xi)$ de l'autre, est un élément de

$(\mathcal{O}'_C)_y \hat{\otimes} (\mathcal{O}'_C)_\xi$ et a fortiori de $(\mathcal{D}'_{L^1})_{\xi, y}$. Ceci montre que $U(y)\, e^{-2i\pi \xi(x - y)}$, en tant que distribution en ξ, y, à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, est scalairement dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_{\xi, y}$. Cela entraîne que l'intégrale $\iint e^{2i\pi\xi(x-y)}\, U(y)\, d\xi\, dy$ a un sens et que l'on peut y intervertir l'ordre des intégrations :

$$\int e^{2i\pi x\xi} d\xi \int U(y)\, e^{-2i\pi\xi y}\, dy = \int U(y)\, dy \int e^{2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi$$

Etablissons alors la formule $\int e^{2i\pi\xi\lambda}\, d\xi = \delta(\lambda)$.

L'égalité $\lambda\delta(\lambda) = 0$ caractérise δ à un facteur numérique près ; or

$$2i\pi\lambda \int e^{2i\pi\lambda\xi}\, d\xi = \int \frac{\partial}{\partial\xi}\left(e^{2i\pi\lambda\xi}\right) d\xi = 0$$

Ceci montre que $\int e^{2i\pi\lambda\xi}\, d\xi = k\,\delta(\lambda)$; k se détermine en prenant la valeur de la distribution $\int e^{2i\pi\lambda\xi}\, d\xi$ pour une fonction $\varphi(\lambda)$ dont on connaît la transformée inverse de Fourier : $e^{-\pi\lambda^2}$ $(\bar{\mathcal{F}} e^{-\pi\lambda^2} = e^{-\pi\xi^2})$

On trouve donc : $k = 1$.

Dans $\int e^{2i\pi\lambda\xi} d\xi$, on peut, avant ou après intégration, remplacer λ par $x - y$, car ce changement de variables est une opération continue de $\mathcal{D}'_\lambda$ dans $\mathcal{D}'_{x,y}$; on a donc $\int e^{2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi = \delta(x - y)$, et avec les notations du paragraphe A, on peut écrire :

$$\int U(y)\, \delta(x - y)\, dy = (U * \delta)_x = U(x)$$

Pour terminer ce paragraphe, signalons les isomorphies suivantes :

$$\mathcal{D}'_{x,y} \approx \mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y \qquad \mathcal{E}'_{x,y} \approx \mathcal{E}'_x \hat{\otimes} \mathcal{E}'_y$$

$$\mathcal{S}'_{x,y} \approx \mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y \qquad (\mathcal{O}'_C)_{x,y} \approx (\mathcal{O}'_C)_x \hat{\otimes} (\mathcal{O}'_C)_y$$

L'établissement de la première et de la dernière isomorphie présente seul des difficultés. Mais $\mathcal{D}'_{x,y} \approx \mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ équivaut au théorème des noyaux (exposé n° 11, p. 5) et $(\mathcal{O}'_C)_{x,y} \approx (\mathcal{O}'_C)_x \hat{\otimes} (\mathcal{O}'_C)_y$ résulte de

$(\mathcal{O}_M)_{x,y} \approx (\mathcal{O}_M)_x \hat{\otimes} (\mathcal{O}_M)_y$ par application de la transformation de Fourier.

C. DÉFINITION TRÈS GÉNÉRALE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE PARTIELLE PAR RAPPORT A L'UNE DES VARIABLES

Les espaces $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$:

Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'espace des fonctions d'une variable $x \in R$, indéfiniment dérivables, et qui décroissent à l'infini à droite, ainsi que chacune de leurs dérivées, plus vite que toute exponentielle. Un système fondamental de voisinages de 0 dans la topologie de $\mathcal{L}$ sera constitué par les ensembles $V(m, \lambda ; \varepsilon ; a)$ (m entier ; λ réel ; $\varepsilon > 0$; a réel) ainsi définis :

$\varphi \in V(m; \lambda ; \varepsilon ; a)$ équivaut à $|e^{\lambda x} \varphi^{(p)}(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq a$ et pour tout $p \leq m$. Il est clair que $\mathcal{L}$ est un espace de Fréchet.

Nous désignerons par $\mathcal{L}'$ le dual de $\mathcal{L}$ et nous le supposerons muni de la topologie de la convergence bornée. $\mathcal{L}'$ est l'espace des distributions à support limité à gauche, à croissance "tempérée par rapport aux exponentielles"; pour que $T \in \mathcal{L}'$, il faut et il suffit que T soit de la forme

$\frac{d^k}{dx^k}\left[e^{\lambda x} g(x)\right]$ où $g(x)$ est une fonction continue, bornée sur toute la droite, et à support limité à gauche. Dans la suite, nous considérerons exclusivement $\mathcal{L}'_+$, espaces des distributions de $\mathcal{L}'$ qui ont leur support dans $[0, +\infty[$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}'_+$ sont nucléaires. Il suffit de le montrer pour $\mathcal{L}$ puisque c'est un Fréchet et que tout sous-espace d'un nucléaire est nucléaire.

Or, on peut considérer que la topologie de $\mathcal{L}$ est la moins fine de celles qui rendent continues les applications $\varphi(x) \longrightarrow \alpha(x)\, e^{\lambda x} \varphi(x)$ ($\lambda \in R, \alpha \in \mathcal{B}$, à support limité à gauche) de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}$; autrement dit, $\mathcal{L}$ est limite projective d'espaces nucléaires ; d'où le résultat.

La transformation de Laplace dans $\mathcal{L}'_+$ et $\mathcal{L}'_+(E)$

$\mathcal{L}'_+$ sera, par excellence, l'espace des distributions "laplacisables".

En effet, toute $T \in \mathcal{L}'_+$ peut s'écrire $T(t) = \dfrac{d^k}{dt^k}(e^{\lambda t} g(t))$;

$T(t)\, e^{-pt}$ sera intégrable dès que $\mathcal{R}p \geq \lambda$.

On appellera alors transformée de Laplace de T la fonction de p, holomorphe pour $\mathcal{R}p \geq \lambda$:

$$LT(p) = \int T(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Soit alors E un espace vectoriel localement convexe. Nous désignerons par $\mathcal{L}'_+(E)$ l'espace des distributions en t, à valeurs dans E, qui sont scalairement dans $\mathcal{L}'_+$; il sera alors possible de former, pour chaque $\overleftarrow{e}' \in E'$, la transformée de Laplace de la distribution $\langle \vec{T}, \overleftarrow{e}' \rangle \in \mathcal{L}'_+$; mais il n'est pas permis, en général, de parler de la transformée de Laplace de $\vec{T}$.

Toutefois :

THÉORÈME - Si E est un espace $\mathcal{DF}$, toute $\vec{T} \in \mathcal{L}'_+(E)$ possède une vraie transformée de Laplace.

Remarquons que $\vec{T} \in \mathcal{L}'_+(E)$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{L}$ dans E. Puisque $\mathcal{L}$ est un espace de Fréchet et que, par hypothèse, E est du type $\mathcal{DF}$, il existe un ouvert Ω de $\mathcal{L}$ dont l'image par $\varphi \to \vec{T}(\varphi)$ est bornée dans E. T est encore une application continue de $(\mathcal{L}_\Omega)^\wedge$ dans E. D'après la définition des voisinages de 0 dans $\mathcal{L}$, il existe λ réel tel que $e^{-pt} \in (\mathcal{L}_\Omega)^\wedge$ dès que $\mathcal{R}p > \lambda$. Alors l'intégrale

$$\vec{T}(e^{-pt}) = \int T(t) e^{-pt}\, dt$$

définit une fonction de p, holomorphe pour $\mathcal{R}p \geq \lambda$, à valeurs dans E.

Si E n'est pas un $\mathcal{DF}$, on cherche à voir s'il n'est pas limite projective d'espaces E_i du type $\mathcal{DF}$. Alors, à $\vec{T} \in \mathcal{L}'_+(E)$ correspondra, par Laplace, une collection de fonctions $F_i(p)$, holomorphes pour $p \geq \lambda_i$, telles que si $i \leq j$, $F_i(p)$ soit l'image de $F_j(p)$ par $E_j \to E_i$ pour $\mathcal{R}p$ assez grand.

Soit par exemple, $T(x, t)$ une distribution à 2 variables. Si $T(x, t) \in (\mathcal{L}'_+)_t \ (\mathcal{D}'_x)$, $T(x, t)$ aura une transformée de Laplace partielle par rapport à t au sens suivant :

Comme $\mathcal{D}'_x$ est limite projective des $(\mathcal{D}_K)'_x$, qui sont des duals de Fréchets, et qu'on peut remplacer ceux-ci par les $(\mathcal{D}'_\Omega)_x$, Ω ouverts bornés de R^n, on voit que pour chaque ouvert Ω borné, il y a une transformée de Laplace $F_\Omega(p)$ à valeurs dans $\mathcal{D}'_\Omega$ définie pour $\mathcal{R}p$ assez grand, avec $F_\Omega(p) = F_\omega(p)$ dans ω pour $\mathcal{R}p$ assez grand si $\Omega \supset \omega$.
