L. Schwartz

Distributions à valeurs vectorielles

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 20, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A21_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

12 mai 1954

Exposé n° 20

DISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES

-:-:-:-

Dans cet exposé, E désignera un espace vectoriel localement convexe complet. Le problème est d'associer à tout espace de distributions $\mathcal{H}'$ un espace de distributions $\mathcal{H}'(E)$ à valeurs dans E

1.- Définition de $\mathcal{D}'^m(E)$.

On posera $\mathcal{D}'^m(E) \approx \mathcal{L}(\mathcal{D}^m, E)$ et en particulier $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{D}, E)$ une distribution à valeurs dans E est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans E. Elle est d'ordre $\leq m$, si elle se prolonge en une application continue de $\mathcal{D}^m$ dans E, c'est-à-dire si elle est continue pour la topologie induite sur $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}^m$.

On munira $\mathcal{D}'^m(E)$ d'une $\mathfrak{S}$-topologie, définie par une famille de parties bornées de $\mathcal{D}^m$. Nous prendrons pour $\mathfrak{S}$ les parties compactes de $\mathcal{D}^m$ et poserons donc $\mathcal{D}'^m_c(E) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m, E)$ (Pour $m = \infty$, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}$)

PROPOSITION.- On a les isomorphismes algébriques et topologiques :

$$\mathcal{D}'^m_c(E) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m, E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{D}'^m_c) \approx \mathcal{D}'^m_c \hat{\otimes}_\varepsilon E$$

Démonstration.- Le premier isomorphisme est une définition. Le deuxième est un isomorphisme universel obtenu par transposition. Le troisième découle du fait que $\mathcal{D}'^m_c$ possède la propriété d'approximation (et ceci, par transposition, parce que $\mathcal{D}^m$ la possède, et que $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}_m ; \mathcal{D}_m) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{D}'^m_c ; \mathcal{D}'^m_c) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{D}'^m_c ; \mathcal{D}'^m_c)$, voir page 4

2.- Différentes définitions de $\mathcal{H}'(E)$.

$\mathcal{H}'$ est un espace de distributions qui pourra ou non être le dual d'un espace $\mathcal{H}$.

A).- Définitions naturelles.

Premier exemple : $\mathcal{E}(E)$. On peut définir le support d'une distribution $\in \mathcal{D}'(E)$ et par suite les distributions à valeurs dans E , à support compact. Pour définir une topologie sur $\mathcal{E}'^m(E)$ on posera

$$\mathcal{E}'^m(E) = \bigcup_K \mathcal{E}'^m_K(E)$$

$\mathcal{E}'^m_K(E)$ (espace des distributions d'ordre $\leq$ m , à support dans K) sera muni de la topologie induite par $\mathcal{D}'^m(E)$ lui-même muni d'une $\mathfrak{S}$-topologie et $\mathcal{E}'^m(E)$ de la topologie limite inductive des précédentes. (Rappelons que si $m = \infty$, on peut remplacer la convergence compacte par la convergence bornée).

Deuxième exemple : $L^p(E)$ est l'espace des fonctions à valeurs dans E de puissance p-ième absolument sommable.

B).- Cas où $\mathcal{H}'$ est le dual d'un espace $\mathcal{H}$.

On pourra alors poser $\mathcal{H}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{H},E)$. A toute $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathcal{H}'$ (topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties de $\mathcal{H}$) , correspondra une topologie analogue sur $\mathcal{H}'(E)$. En particulier à la topologie forte de $\mathcal{H}'$, correspondra la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{H}$.

C).- Espace des distributions scalairement dans $\mathcal{H}'$ ou $\tilde{\mathcal{H}}'(E)$.

A tout $e' \in E'$ faisons correspondre la distribution scalaire $T_{e'} = \langle \vec{T} , \overleftarrow{e'} \rangle$ définie (pour $\varphi \in \mathcal{D}$) par

$$T_{e'}(\varphi) = \langle \vec{T}(\varphi) , \overleftarrow{e'} \rangle$$

(L'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ est la transposée de l'application $\varphi \longrightarrow T(\varphi)$). Une distribution T , à valeurs dans E , sera dite scalairement dans $\mathcal{H}'$ si $T_{e'} \in \mathcal{H}'$ pour tout $e' \in E'$. Autrement dit $T \in \tilde{\mathcal{H}}'(E)$ si $T_{e'} \in \mathcal{H}'$ pour tout $e' \in E'$, c'est-à-dire si l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ continue de E'_c dans $\mathcal{D}'$ applique E' dans $\mathcal{H}'$ (sans condition de continuité).

On pourra munir $\tilde{\mathcal{H}}'(E)$ de la topologie de la convergence uniforme de $T_{e'}$ sur les parties équicontinues de E' , si cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire si la condition suivante est satisfaite:

($\mathcal{E}$) L'image par l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ de toute partie équicontinue de E' est une partie bornée de $\mathcal{H}'$.

D).- On peut préciser la définition précédente en ne considérant que les distributions T telles que l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ (continue de E'_c dans $\mathcal{D}'$) applique continûment E'_c dans $\mathcal{H}'$ c'est-à-dire considérer l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{H}')$. On a alors $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{H}') \subset \widetilde{\mathcal{H}}'(E)$ et si la condition (ε) est satisfaite la topologie de $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{H}')$ est la topologie induite par $\widetilde{\mathcal{H}}'(E)$.

3.- THÉORÈME I.- Soit $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_c$ un espace de distribution dual d'un espace $\mathcal{H}$ et muni de la topologie de la convergence compacte. On suppose $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$, les immersions étant continues, et $\mathcal{D}$ étant dense dans $\mathcal{H}$. On suppose que $\mathcal{H}$ induit sur $\mathcal{D}$ une topologie bornologique (ce qui sera réalisé en particulier si $\mathcal{H}$ est métrisable)(1) et enfin que $\mathcal{H}$ a la propriété d'approximation.

On a alors les isomorphismes algébriques et topologiques suivants :

$$\widetilde{\mathcal{H}}'(E) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{H}') \approx \mathcal{H}' \hat{\otimes}_\varepsilon E$$

Exemples : $\mathcal{H}' = \mathcal{E}'^m_c$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{D}'^+$, L^p_c (L^p dual de $L^{p'}$) $(p \neq 1)$, $(\mathcal{D}'_{L^p})_c$, $\mathcal{B}'$.

Démonstration.-

a) On a a priori $\widetilde{\mathcal{H}}'(E) \supset \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, E)$. On doit montrer que si l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ applique E' dans $\mathcal{H}'$, l'application $\varphi \longrightarrow T(\varphi)$ de $\mathcal{D}$ dans E est continue, si on munit $\mathcal{D}$ de la topologie induite par $\mathcal{H}$. Cette topologie étant bornologique il suffit de montrer que l'application $\varphi \longrightarrow T(\varphi)$ applique tout borné de $\mathcal{D}$ dans un borné de E c'est-à-dire que (d'après Mackey, identité des parties bornées et faiblement bornées dans E), pour tout $e' \in E'$ (fixe), $\langle \vec{T}(\varphi), \overleftarrow{e'} \rangle$ reste borné lorsque φ parcourt un ensemble de $\mathcal{D}$, borné pour la topologie induite par $\mathcal{H}$. Or on a

$$\langle \vec{T}(\varphi), \overleftarrow{e'} \rangle = T_{e'}(\varphi)$$

Comme $T_{e'} \in \mathcal{H}'$, la propriété est vérifiée.

D'autre part $T \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}, E)$, si $T(\varphi) \longrightarrow 0$ dans E uniformément quand φ parcourt un compact de $\mathcal{H}$ et e' une partie équicontinue de E'. Comme $\langle T(\varphi), e' \rangle = T_{e'}(\varphi)$, ceci exprime que $T_{e'} \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{H}'_c$, uniformement si e' parcourt une partie équicontinue de E', c'est-à-dire que $T \longrightarrow 0$ dans $\widetilde{\mathcal{H}}'(E)$.

b) Le deuxième isomorphisme est universel (transposition).

c) Le troisième isomorphisme est universel du moment que $\mathcal{H}'_c$ possède la

---

(1) - ce qui implique que $\mathcal{H}'$ soit complet.

propriété d'approximation c'est-à-dire si dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}'_c, \mathcal{H}'_c)$, l'identité est approchable par des applications linéaires de rang fini.

Comme $\mathcal{D}$, muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$ est bornologique, toute partie compacte de $\mathcal{L}_c(\mathcal{H};\mathcal{H})$, équicontinue sur tout compact de $\mathcal{H}$ d'après Ascoli, est équicontinue sur $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$ donc sur $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}'_c;\mathcal{H}'_c) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'_c;\mathcal{H}'_c)$. Comme enfin $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'_c;\mathcal{H}'_c) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{H};\mathcal{H})$ parctransposition, la propriété d'approximation pour $\mathcal{H}'_c$ est équivalente à la même propriété pour $\mathcal{H}$.

4.- THÉORÈME II.- Soit $\mathcal{H}'$ un espace de distributions ($\mathcal{H}' \subset \mathcal{D}'$, l'injection $\mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ étant continue) complet semi-Montel(1) (non nécessairement dual d'un espace $\mathcal{H}$), ayant la propriété d'approximation et tel qu'il existe des applications continues θ_i de $\mathcal{H}'$ dans des espaces $\mathcal{H}'_i$, prolongeables en des applications continues de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, de telle sorte que

a/ $\mathcal{H}$ ait la topologie limite projective définie par les applications θ_i

b/ Les espaces $\mathcal{H}'_i$ vérifient la condition (ε).

Alors on a les isomorphismes algébriques et topologiques suivants :

$$\widetilde{\mathcal{H}}'(E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{H}') \approx \mathcal{H}' \widehat{\otimes}_\varepsilon E$$

Exemples : $\mathcal{S}'(\Gamma)$ (théorie de la transformation de Laplace) (les applications θ_i sont les applications $T \longrightarrow e^{-\xi x}\, T$ de $\mathcal{S}'(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}'$).

$\mathcal{O}'_c$ (les applications θ_i sont les applications $T \longrightarrow QT$ de $\mathcal{O}'_c$ dans $\mathcal{B}'$, Q polynômes)

Rappelons que $\mathcal{S}'(\Gamma)$ et $\mathcal{O}'_c$ sont nucléaires, donc semi-Montel, et ont la propriété d'approximation.

Démonstration.

Soit $T \in \mathcal{D}'(E)$. Définissons $\theta_i T \in \mathcal{D}'(E)$ par $(\theta_i T)_{e'} = \theta_i(T_{e'})$ pour tout $e' \in E'$. Le 2° membre étant continu par rapport à $e' \in E'_c$ la formule définit bien $\theta_i T$ comme élément de $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{D}')$. Si $T \in \widetilde{\mathcal{H}}'(E)$ on a alors $\theta_i T \in \widetilde{\mathcal{H}}'_i(E)$

---

(1)- C'est-à-dire tel que toute partie bornée fermée soit compacte. L'espace est un Montel si en outre il est tonnelé.

Montrons que l'hypothèse (ε) est vérifiée par $\tilde{\mathcal{K}}'(E)$ c'est-à-dire que si e' parcourt une partie équicontinue de E' $T_{e'}$ reste borné dans $\mathcal{K}'$. Ceci résulte du fait que pour tout i, $\theta_i T_{e'} = (\theta_i T)_{e'}$ reste bornée dans $\mathcal{K}'_i$ (hypothèse (ε) pour $\mathcal{K}'_i$) et de ce que la topologie de $\mathcal{K}'$ est limite projective de celles des $\mathcal{K}'_i$.

L'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ de E'_c dans $\mathcal{K}'$ applique donc tout équicontinu de E' dans un borné de $\mathcal{K}'$ c'est-à-dire dans un relativement compact et nous devons montrer qu'elle est continue. Composons l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ avec l'identité dans $\mathcal{K}'$. Sur tout compact de $\mathcal{K}'$, cette application identique s'approche uniformement par une application continue de rang fini qu'on peut supposer être la restriction à $\mathcal{K}'$ d'une application de rang fini de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{K}'$ (1). Par suite l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ est approchable uniformément sur tout équicontinu de E' par le produit de l'application $e' \longrightarrow T_{e'}$ continue de E'_c dans $\mathcal{D}'$ et d'une application continue de rang fini de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{K}'$, c'est-à-dire par une application continue de E'_c dans $\mathcal{K}'$. Elle est donc adhérente à $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{K}')$. Comme $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{K}')$ est complet, cette application appartient à $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{K}')$. On a donc bien $\tilde{\mathcal{K}}'(E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c ; \mathcal{K}')$.

Le deuxième isomorphisme découle du fait que $\mathcal{K}'$ possède la propriété d'approximation.

5.- Une application.

On a $\tilde{\mathcal{S}}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{S}, E)$. Une distribution U à valeurs dans E est donc tempérée si elle se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans E, ou bien si pour tout $e' \in E'$, $U_{e'} \in \mathcal{S}'$. On peut alors définir sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(U)$, qui est une distribution temperée, par

---

(1) Soient en effet deux espaces localement convexes (G et H) et une injection continue de G dans H. Une application de rang fini u de G dans G définie par $ug = \sum \langle g, g'_i \rangle g_i$ $(g_i \in G, \; g'_i \in G')$ est approchable uniformément sur tout compact par des applications $\tilde{u}$ de $\check{H}$ dans G de rang fini de la forme $\tilde{u}h = \sum \langle g, h'_i \rangle g_i$ $(h'_i \in H')$ en approchant les g'_i par les h'_i uniformement sur tout compact de G. C'est possible parce que, $G \longrightarrow H$ étant injective, sa transposée applique H' sur un sous-espace faiblement dense de G'. Comme G'_c a pour dual G, un sous-espace faiblement dense de G' est aussi dense dans G'_c.

$$\mathcal{F}(U)\ (\varphi) = U(\mathcal{F}\varphi)$$

ou bien par $\mathcal{F}(U_{e'}) = (\mathcal{F}U)_{e'}$ pour tout $e' \in E'$.

Par exemple, soit $U_{x,y}$ une distribution à deux variables. Si $U_{x,y} \in \mathcal{S}'_x(\mathcal{D}'_y)$; U sera dite <u>tempérée en x</u> ; on peut définir sa transformée de Fourier $\mathcal{F}_x U_{x,y} \in \mathcal{S}'_\xi(\mathcal{D}'_y)$ par rapport à la variable x. On a $\mathcal{S}'_\xi(\mathcal{D}'_y) \subset \mathcal{D}'_\xi(\mathcal{D}'_y) = \mathcal{D}'_{\xi,y}$ (théorème des noyaux), $\mathcal{F}_x U_{x,y}$ est donc bien une distribution en ξ, y, tempérée en ξ.

<u>Remarque</u>.- On peut caractériser les éléments de $\mathcal{S}'_x(\mathcal{D}'_y)$ de la façon suivante : $U \in \mathcal{S}'_x(\mathcal{D}'_y)$ équivaut à : $U \cdot \varphi \in \mathcal{S}'_x$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_y$, avec :

$$U \cdot \varphi = \int U_{x,y}\,\varphi(y)\,dy \quad ,$$

c'est-à-dire aussi à : $\langle U_{x,y}, \varphi(y)\,\psi(\xi - x)\rangle$ est à croissance lente en ξ pour tous $\varphi \in \mathcal{D}_y$ et $\psi \in \mathcal{D}_x$.

Supposons enfin $U_{x,y} \in \mathcal{S}'_{x,y}$; alors $U_{x,y} \in \mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y$ (l'inclusion $\mathcal{S}'_{x,y} \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}_x ; \mathcal{S}'_y)$ est evidente. La réciproque résulte de ce que $\mathcal{S}$ est un Fréchet nucléaire. :

$\mathcal{L}(\mathcal{S}_x ; \mathcal{S}'_y)$ est l'espace des formes bilinéaires sur $\mathcal{S}_x \times \mathcal{S}_y$ **hypocon**tinues relativement aux parties bornées, donc continues, $\mathcal{S}_x$ et $\mathcal{S}_y$ étant des Fréchets ; c'est donc le dual de $\mathcal{S}_x \hat{\otimes}_\pi \mathcal{S}_y \approx \mathcal{S}_x \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{S}_y$ ($\mathcal{S}$ nucléaire) $\approx \mathcal{S}_{x,y}$, c'est donc $\mathcal{S}'_{x,y}$), de sorte que $\mathcal{F}_x U_{x,y}$ est dans $\mathcal{S}'_\xi(\mathcal{S}'_y) \approx \mathcal{S}'_y(\mathcal{S}'_\xi)$; on peut alors calculer $\mathcal{F}_y(\mathcal{F}_x U_{x,y}) \in \mathcal{S}'_{\xi,\eta}$, et l'on a

$$\mathcal{F}_{x,y} U_{x,y} = \mathcal{F}_y (\mathcal{F}_x U_{x,y}) = \mathcal{F}_x (\mathcal{F}_y U_{x,y})$$

parce que ces 3 opérations sont continues sur $\mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y = \mathcal{S}'_{x,y}$ et qu'elles coincident sur $\mathcal{S}'_x \otimes \mathcal{S}'_y$. La transformation de Fourier peut donc se faire par plusieurs transformations de Fourier partielles dans un ordre arbitraire On peut encore dire que $\mathcal{F}_{x,y}$, considérée comme application linéaire continue de $\mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y$ dans $\mathcal{S}'_\xi \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\eta$, est le produit tensoriel des applications $\mathcal{F}_x\ (\mathcal{S}'_x \longrightarrow \mathcal{S}'_\xi)$ et $\mathcal{F}_y\ (\mathcal{S}'_y \longrightarrow \mathcal{S}'_\eta)$.