L. Schwartz

Caractérisation des opérateurs nucléaires dans certains cas particuliers

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 13, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A14_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

24 février 1954

Exposé n° 13

CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS NUCLÉAIRES DANS CERTAINS CAS PARTICULIERS.

1.- CAS DES ESPACES L^p

Soit X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X. Considérons les applications nucléaires de l'espace de Banach E dans $F = L^1_\mu$. On sait que

$$E' \hat{\otimes} L^1_\mu \approx L^1_\mu(E')$$

les deux espaces étant ~~isométriques.~~ Donc si $u : E \rightarrow L^1_\mu$ est nucléaire, elle définit une ~~fonction~~ f, définie ~~presque~~ partout, à valeur dans E' et sommable ; et réciproquement.

On a, pour tout $\vec{e} \in E$: $u(\vec{e}) = \langle \overleftarrow{f}, \vec{e} \rangle$; ou $u(\vec{e})(x) = \langle \overleftarrow{f}(x), \vec{e} \rangle$ presque partout. Soit (Y, ν) un deuxième espace mesuré. Posons $E = L^p_\nu$ alors $E' = L^{p'}_\nu$ $(p \geqslant 1, \; p \neq \infty)$. On va interpréter $E' \hat{\otimes} F$ comme espace fonctionnel sur $X \times Y$. Nous ~~considérerons~~ l'espace des fonctions f définies sur $X \times Y$ et pour lesquelles

$$N_{1,p'}(f) = \int^{*} d\mu(x) \left[\int^{*} |f(x,y)|^{p'} \, d\nu(y) \right]^{1/p'}$$

est fini. C'est un espace vectoriel sur lequel $N_{1,p'}$ est une semi-norme. L'adhérence dans cet espace de $C(X \times Y) = C(X) \hat{\hat{\otimes}} C(Y)$ s'appellera $\mathcal{L}^{1,p'}$, et le quotient par le sous-espace des éléments de semi-norme nulle sera $L^{1,p'}$. Il est complet et a des propriétés analogues aux espaces $L^{p'}$ (démonstrations analogues aux démonstrations classiques ; se borner pour simplifier au cas où X et Y sont dénombrables à l'infini). En particulier $L^{1,p'}$ est l'espace des classes (modulo les fonctions négligeables pour la mesure produit $\mu \otimes \nu$) de fonctions $(\mu \otimes \nu)$-mesurables, pour lesquelles $N_{1,p'}$ est fini.

Alors $L^1_x(L^{p'}_y) = L^{1,p'}_{x,y}$ (même démonstration que pour $L^p_x(L^p_y) = L^p_{x,y}$, exposé 4, théorème 4.

2.- APPLICATIONS NUCLÉAIRES DÉFINIES DANS $\mathcal{C}(X)$

Soit toujours X un espace compact, $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues. Le dual de $\mathcal{C}(X)$ est l'espace $\mathcal{M}^1(X) = C'(X)$ des mesures. Soit B une bande dans $\mathcal{M}^1$, B' la bande supplémentaire de B. $\mathcal{M}^1$ est somme directe ordonnée de B et B' et si $\mu \in B$ $\nu \in B'$

$$\|\mu + \nu\| = \int d(|\mu| + |\nu|) = \|\mu\| + \|\nu\|$$

Donc la projection de $\mathcal{M}^1$ sur B parallèlement à B' est de norme 1. On en déduit que $B \hat{\otimes} F$ se plonge isométriquement dans $\mathcal{M}^1 \hat{\otimes} F$ pour tout espace de Banach F. Soit μ une mesure positive et $B(\mu)$ la bande engendrée par μ. Comme $\mu \in B(|\mu|)$ pour toute μ, $\mathcal{M}^1$ est la réunion des $B(\mu)$. De plus on a $\mu \leq |\mu| + |\nu|$, $\nu \leq |\mu| + |\nu|$, donc $B(|\mu| + |\nu|)$ contient $B(|\mu|)$ et $B(|\nu|)$; la famille des $B(\mu)$ est filtrante croissante. Enfin toute partie de $\mathcal{M}^1$ contenue dans l'enveloppe convexe fermée d'une suite est contenue dans un $B(\mu)$. Car si μ_i est la suite en question, on a $|\mu_i| \leq 2^i \|\mu_i\| \mu$ si l'on pose $\mu = \sum_i |\mu_i| \dfrac{1}{2^i \|\mu_i\|}$, cette série étant absolument convergente. Les μ_i sont donc dans $B(\mu)$ et comme celle-ci est fermée et convexe elle contient l'enveloppe convexe fermée des μ_i. En particulier tout compact de $\mathcal{M}^1$ est contenu dans un $B(\mu)$. On en déduit que tout compact de $\mathcal{M}^1 \hat{\otimes} F$ étant contenu dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée du produit de deux compacts est contenu dans un espace $B(\mu) \hat{\otimes} F$.

Or le théorème de Lebesque-Nikodym affirme que l'application $\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\varphi}\mu$ est une isométrie de $L^1(\mu)$ sur $B(\mu)$. Donc $B(\mu) \hat{\otimes} F$ est isométrique à $L^1_\mu(F)$. Soit alors M une mesure "nucléaire" à valeur dans F c'est-à-dire une application nucléaire de $\mathcal{C}(X)$ dans F. Il existe alors une fonction $\vec{f}$ sommable à valeur dans F et une mesure $\mu \geq 0$ telle que

$$M(\varphi) = \int \vec{f}(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x)$$

Comme on peut naturellement remplacer $\vec{f}$ et μ par ρf et $\dfrac{\mu}{\rho}$ on peut toujours supposer que $\|\vec{f}(x)\|_F \equiv 1$. Il en résulte que l'application canonique de $\mathcal{M}^1 \hat{\otimes} F$ dans $L^1(\mathcal{C}(X) ; F)$ est biunivoque, car si $M(\varphi) = 0$ quelle que soit φ, $\vec{f}$ est presque partout nulle.

Enfin il faut noter que les opérateurs intégraux à noyau continu sont nucléaires ; si K est une fonction continue de x, y :

$$(K \circ f)(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) ,$$

alors $K \in L^1(\mathcal{C}_y ; \mathcal{C}_x)$ et l'on a $\mathrm{Tr}(K) = \int K(x,x)\, d\mu(x)$ si $X = Y$.

3.- CAS DES ESPACES DE HILBERT.

Rappelons qu'un espace de Hilbert E est anti-isomorphe à son dual, cet anti-isomorphisme faisant correspondre à $a \in E$ la forme linéaire $\bar{a}$: $\bar{a}(x) = (x,a)$. On sait aussi que si E et F sont des espaces de Hilbert et u une application continue $E \longrightarrow F$ il existe une application adjointe u^* telle que

$$(u(x) \, , \, y) = (x \, , \, u^*(y))$$

u^* appliquant F dans E . Toute application $u : E \longrightarrow F$ se décompose de manière unique sous la forme

$$u = W.H$$

où H est un opérateur continu hermitien $\geqslant 0$ de E dans E , W un opérateur partiellement isométrique de E dans F [c'est-à-dire appliquant une sous-variété E_1 de E sur 0 , et la variété orthogonale E_2 isométriquement sur un sous-espace de F ; ce dernier est la variété finale de l'opérateur partiellement isométrique, E_2 sa variété initiale] ayant pour variété initiale $\overline{H(E)}$.

On a $H = \sqrt{u^*u}$, et W est défini sur $H(E)$ par

$$W(H(x)) = u(x)$$

(c'est bien une isométrie, car $(u(x),u(x)) = (u^*u \, x \, , x) = (H^2x \, , \, x) = (Hx,Hx)$; elle se prolonge donc de manière unique en une isométrie de $\overline{H(E)}$ sur un sous-espace de F , d'où le résultat).

On posera $H = |u|$. On a $\| W \| = 1$ (si $u \neq 0$) .

Si u est nucléaire, $H = W^* u$ est nucléaire; (si H est nucléaire, u est nucléaire) et $\| H \|_1 = \| u \|_1$. Il suffit donc d'étudier les opérateurs hermitiens ($\geqslant 0$) nucléaires de E dans E .

Soit donc u un opérateur hermitien nucléaire. Alors il est compact et l'on a donc

$$u = \sum_i \lambda_i \, P_i$$

P_i projecteur de rang fini n_i , λ_i suite tendant vers 0 , $P_i \, P_j = \delta_{ij} \, P_j$. Supposons que $\sum_i |\lambda_i| \, n_i < +\infty$; comme P_i est de rang fini, $P_i \in E' \otimes E$ et

$$\| P_i \|_{\pi} = \operatorname{Tr} P_i = n_i$$

donc la série $\sum \lambda_i \, P_i$ converge absolument dans $E' \hat{\otimes} E$; sa somme U_0 a pour image u dans $\mathcal{L}(E;E)$ car l'application canonique $E' \hat{\otimes} E \longrightarrow \mathcal{L}(E;E)$ est continue. De plus

$$\| u \|_1 \leqslant \| u_0 \|_{\pi} \leqslant \sum |\lambda_i| \, \| P_i \|_1 = \sum_i |\lambda_i| \, n_i$$

Réciproquement si u est hermitien nucléaire donc compact $u = \sum \lambda_i P_i$ et si l'on pose $Q_k = P_1 + P_2 + \dots + P_k$ on a

$$Q_k u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$$

et $\|Q_k u\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| n_i \leqslant \|Q_k\| \|u\|_1 = \|u\|_1$ donc à la limite $\sum |\lambda_i| n_i \leqslant \|u\|_1$

Finalement on a la proposition suivante

PROPOSITION : Pour qu'un opérateur hermitien u soit nucléaire, il faut et il suffit qu'il soit complètement continu, que la suite de ses valeurs propres (avec leur multiplicité) soit sommable et l'on a $\|u\|_1 = \sum |\lambda_i| n_i$.

L'application canonique $u_0 \to u$ de $E' \hat{\otimes}_\pi E$ sur $L^1(E;E)$ est une isométrie ($\|u_0\|_\pi = \|u\|_1$).

COROLLAIRE : si $u : E \to F$ est nucléaire, on a :

$$u = \sum_i \lambda_i \overline{e_i} \otimes f_i \qquad \text{et} \qquad \sum_i |\lambda_i| < +\infty$$

e_i suite orthonormée de E , f_i suite orthonormée de F et réciproquement.

On va maintenant introduire l'espace $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = G$ et chercher son dual. Une forme linéaire A sur G est définie par ses valeurs sur $E \otimes F$ donc par une forme bilinéaire. La topologie π étant plus fine que la topologie ε , A sera continue sur $E \otimes_\pi F$ donc définit une forme bilinéaire continue $\tilde{A}$ sur $E \times F$. Nous avons déjà dit qu'une telle forme bilinéaire était appelée intégrale.

Soit $u \in E \otimes F$, $\tilde{u}$ l'opérateur de rang fini de E' dans F qu'il définit. Soit $\tilde{A}$ l'opérateur continu de F dans E' associé à A . Alors $\langle A , u \rangle = \mathrm{Tr}(\tilde{u}\tilde{A})$.

Posons $\tilde{A} = W H$, W partiellement isométrique, H hermitien $\geqslant 0$. Si $\tilde{A}$ n'était pas compact, H ne le serait pas, il aurait un projecteur spectral P de rang infini,

$$P = B H \quad , \quad B \text{ continu} .$$

Alors :

$$\langle A , u \rangle = \mathrm{Tr}(\tilde{u} W H) .$$

Prenons des $\tilde{u}$ de la forme $\tilde{u} = v B W^*$; alors

$$\langle A , u \rangle = \mathrm{Tr}(v B W^* W H) = \mathrm{Tr}(v B H) = \mathrm{Tr}(v P) .$$

On a $\|\tilde{u}\| \leqslant \|B\| \|v\|$ donc si v parcourt les opérateurs de norme $\leqslant 1$, $\tilde{u}$ reste borné. Or si on prend pour v un projecteur de rang n contenu dans P , on a

$v\,P = v$ et $\mathrm{Tr}(v\,P) = n$ donc $\mathrm{Tr}(\tilde{u}\,\tilde{A})$ ne reste pas bornée contrairement à l'hypothèse de sa continuité. Donc H est compact. Donc $H = \sum_i \lambda_i P_i$. Mais alors $\mathrm{Tr}(v\,W^* \tilde{A}) = \mathrm{Tr}(v\,H) = \sum_i \lambda_i \mathrm{Tr}(v\,P_i)$; si donc $\|A\|$ est la norme de A dans $(E \hat{\otimes}_\varepsilon F)'$ on a

$$\left|\sum \lambda_i \mathrm{Tr}(v\,P_i)\right| \leq \|A\|\,\|v\|.$$

En posant $v = \sum_{i=1}^{k} P_i$ on a $\|v\| = 1$ et l'on en déduit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i n_i \leq \|A\|$.

Donc $\tilde{A}$ est nucléaire et $\|\tilde{A}\|_1 \leq \|A\|$.

Réciproquement il est trivial que si $u \in E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, $A \in E' \hat{\otimes}_\pi F'$ on a

$$|\langle A, u\rangle| \leq \|A\|_\pi \|u\|_\varepsilon$$

d'où $\|A\| \leq \|A\|_\pi = \|\tilde{A}\|_1$.

On a donc le théorème (Dixmier et Schatten) :

<u>THÉORÈME</u> : Dans le cas des espaces de Hilbert le dual de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est $J(E,F) = E' \hat{\otimes}_\pi F'$. Le bidual de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est $B(E',F')$. Autrement dit :
Le dual de l'espace des opérateurs complètement continus (muni de la norme des opérateurs) est l'espace des opérateurs nucléaires muni de la norme-trace et le dual de ce dernier est l'espace de tous les opérateurs continus((muni de la norme des opérateurs).