Séminaire L. de Broglie. Théories physiques

G. Jakobi
N. N. Kolesnikov

Sur la structure de l'électron

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. nº 8, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A7_0>

SUR LA STRUCTURE DE L'ÉLECTRON

par G. JAKOBI et N.N. KOLESNIKOV

INTRODUCTION. - Les expériences récentes de diffusion des électrons rapides sur les protons ont montré un écart par rapport à la formule habituelle de Mott [16], formule valable pour deux particules ponctuelles interagissant d'après la loi de Coulomb. Le caractère de ces écarts indique qu'une loi d'interaction purement coulombienne, aux petites distances, n'est pas possible.

HOFSTADER et d'autres (cf. [5], [6], [8], [23], [24]) ont montré que pour expliquer ces écarts, il suffit d'admettre que le proton n'est pas une particule ponctuelle et que sa charge et son moment magnétique sont répartis suivant une certaine loi.

La théorie actuelle n'a pas assez d'arguments pour prédire un électron étendu, toutefois il semble prématuré d'exclure cette possibilité, avant qu'aient été effectuées des expériences, où des effets dûs à la structure de l'électron auraient pu se révéler. Dans la théorie de l'électron étendu, on évite les difficultés liées à la masse infinie, et le "rayon classique" de l'électron a un sens physique [19]. De plus on pourrait expliquer les expériences de diffusion des électrons rapides sur les protons par le fait qu'aux petites distances apparaissent des effets non linéaires du champ électromagnétique.

Examinons ces deux possibilités en essayant de déterminer quelles expériences pourraient révéler la véritable interaction aux faibles distances.

Commençons par l'examen de la théorie linéaire des particules étendues.

1. Interaction de l'électron avec le proton et les autres particules.

a. Interaction Electron-Proton. - Nous examinerons dans ce qui suit le seul cas de l'interaction des charges électriques. Car dans les conditions des expériences de Hofstader, dont nous chercherons avant tout à donner une interprétation, l'interaction des moments magnétiques donne un effet moins important pour presque tous les angles. Nous supposerons de plus que les répartitions de charge de proton $\rho_p(r_1)$ et de l'électron $\rho_e(r_2)$ sont à symétrie sphérique (r_1 et r_2 sont respectivement les distances au centre du proton et de l'électron). L'énergie d'interaction d'un proton étendu avec un électron étendu dont les centres sont à la distance r peut alors être mise sous la forme

$$V(r) = - e^2 \iint \frac{\rho_p(r_1)\ \rho_e(r_2)\ dv_1\ dv_2}{|\vec{r} - \vec{r_1} - \vec{r_2}|} \tag{1}$$

avec $\int \rho_p(r_1) dv_1 = 1$ et $\int \rho_e(r_2) dv_2 = 1$.

En effectuant l'intégration par rapport aux angles dans (1) on obtient

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{4\pi e^2}{r} \int_r^\infty \rho_p(r_1) r_1 (r_1 - r) dr_1 + \frac{8\pi^2 e^2}{r} \int_0^\infty \rho_p(r_1) r_1 dr_1 \int_{|r-r_1|}^{r+r_1} dr_2 \int_{r_2}^\infty \rho_e(r_2') r_2' (r_2' - r_2) dr_2' \tag{2}$$

Dans le cas de la diffusion des électrons rapides sur les protons l'approximation de Born dans le cas relativiste [8], [13][24]

$$d\sigma = \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \beta^2} |f(\theta)|^2\ 2\pi \sin\theta\ d\theta = \left(\frac{Ze^2}{2E}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{4}} |f(\theta)|^2 2\pi \sin\theta\ d\theta \left(\beta = \frac{v}{e}\right)$$

donne des résultats peu différents de la valeur exacte de la section efficace.

La proportionnalité au carré du coefficient du facteur de forme $f(\theta)$ se conserve aussi dans la formule exacte pour des énergies pas trop élevées.

Le coefficient [8], [13], [24]

$$f(\theta) = - \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr}\ V(r)\ r^2\ dr \tag{3}$$

détermine la manière dont la section efficace dépend des particularités des interactions entre les diverses particules, autrement dit de leur structure.

En portant (2) dans (3) et en intégrant par parties les intégrales contenant les deux premiers termes du second membre de (2) on obtient :

$$\begin{aligned} f(\theta) = {} & \frac{2me^2}{\hbar^2 k^2} \cdot 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \rho_p(r) r^2\ dr - \\ & - \frac{2me^2}{\hbar^2} 8\pi^2 \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr}\ r\ dr \int_0^\infty \rho_p(r_1) r_1\ dr_1 \int_{|r-r_1|}^{r+r_1} dr_2 \int_{r_2}^\infty \rho_e(r_2')\ r_2'(r_2' - r_2) dr_2' . \end{aligned} \tag{4}$$

Supposons alors que grâce à la rapide décroissance de ρ_p et de ρ_e seul le domaine $kr \ll 1$ joue un rôle essentiel c'est-à-dire que les impulsions de recul $p = \hbar k$ ne sont pas très grandes ce qui est en tout cas réalisé pour des énergies pas trop élevées (c'est-à-dire dans les expériences de HOFSTADER).

Alors $\frac{\sin kr}{kr} \simeq 1 - \frac{k^2 r^2}{6}$. En portant dans le premier terme du second membre de (4) les deux termes de ce développement et en se limitant pour le second terme de (4) au seul premier terme du développement on obtient

(5) $$f(\theta) = \frac{2a_o}{(a_o k)^2} \left\{ 1 - \frac{k^2}{6} \langle r_p^2 \rangle - k^2 \, \mathfrak{J} \right\}$$

où $a_o = \frac{\hbar^2}{mc^2}$ est le rayon de Bohr

(6) $$\langle r_p^2 \rangle = \int \rho_p(r) r^2 \, dv$$

et

(7) $$\mathfrak{J} = 8\pi \int_o^\infty r dr \int_o^\infty \rho_p(r_1) r_1 \, dr_1 \int_{|r-r_1|}^{r+r_1} dr_2 \int_{r_2}^\infty \rho_e(r_2') \, r_2'(r_2' - r_2) \, dr_2' \, .$$

En effectuant une série d'intégrations par parties et en tenant compte des conditions de normalisation, on obtient finalement

(8) $$\mathfrak{J} = \frac{1}{6} \int \rho_e(r) \, r^2 \, dv = \frac{1}{6} \langle r_e^2 \rangle \, .$$

En portant (8) dans (5) ob obtient finalement

(9) $$f(\theta) = \frac{2a_o}{(a_o \, k)^2} \left[1 - \frac{k^2}{6} \left(\langle r_p^2 + r_e^2 \rangle \right) \right] .$$

De sorte que si l'on admet que l'électron n'est pas ponctuel, les valeurs obtenues par HOFSTADER pour le rayon quadratique moyen du proton ($0{,}8 \pm 0, 10.10^{-13}$cm) ([5],[6],[23]) devraient représenter la racine carrée de la somme des carrés des rayons quadratiques moyens de l'électron et du proton.

De façon analogue la structure de l'électron apparaitrait dans le déplacement des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène [17]. Le déplacement des niveaux d'énergie dûs à la structure du proton et de l'électron, en première approximation, sans tenir compte des effets de distorsion des fonctions d'ondes électroniques et des corrections relativistes qui sont peu importantes dans ce cas

[15] est égal à

(10) $$\Delta E = - \int |\Psi_e|^2 \, dv \, [V + \frac{e^2}{r}]$$

dans la mesure où $V + \frac{e^2}{r}$ décroît très vite à des distances beaucoup plus petites que le rayon de l'orbite de Bohr, pour l'état ns de l'électron on peut alors sortir $|\Psi_e|^2$ de l'intégrale en la supposant égale à sa valeur à l'origine. En portant de plus pour V la valeur (2) on obtient :

$$\Delta E = - 4\pi e^2 |\Psi_e(0)|^2 \left\{ 4\pi \int_0^\infty r dr \int_r^\infty \rho_p(r_1) r_1 (r_1 - r) \, dr_1 + \right.$$

$$\left. + 8\pi \int_0^\infty r dr \int_0^\infty \rho_p(r_1) \, dr_1 \int_{|r_1 - r|}^{|r_1 + r|} dr_2 \int_{r_2}^\infty \rho_e(r_2') \, r_2'(r_2' - r_2) \, dr_2' \right\} .$$

En intégrant par parties, on obtient que le premier terme est égal à $\langle r_p^2 \rangle$ tandis que le second terme, d'après (7) et (8), est égal à $\langle r_e^2 \rangle$; finalement en exprimant ΔE en cm^{-1} nous aurons

(11) $$\Delta E = \frac{\alpha}{3} |\Psi_e(0)|^2 \left\{ \langle r_p^2 \rangle + \langle r_e^2 \rangle \right\} .$$

b. Interactions des autres particules. - L'interaction d'un électron avec un neutron est purement électrique et ne dépend que de la structure de ce dernier ce que l'on peut montrer à l'aide d'un calcul analogue à celui effectué ci-dessus, on a alors

(12) $$f(\theta) = \frac{2me^2}{\hbar^2} \langle r_n^2 \rangle = 2a_o \frac{\langle r_n^2 \rangle}{a_o^2} .$$

L'interaction du positron avec le neutron et le proton est analogue et l'interaction de l'électron avec ces particules. Avec cette différence toutefois qu'il faudrait remplacer $\langle r_e^2 \rangle$ par le rayon quadratique moyen du positron dans la formule (9) si les répartitions de charge de l'électron et du positron s'avéraient différentes.

c. Interaction électron-deutéron. - On a :

$$(13) \quad \begin{cases} f_d(\theta) = \dfrac{2m\, e^2}{\hbar^2} \left\{ 1 - \dfrac{k^2}{6} \left[\langle r_d^2 \rangle + \langle r_p^2 \rangle + \langle r_e^2 \rangle - \langle r_n^2 \rangle \right] \right\} \\ \Delta E = \dfrac{\alpha}{3} |\Psi_e(0)|^2 \left\{ \langle r_d^2 \rangle + \langle r_p^2 \rangle + \langle r_e^2 \rangle - \langle r_n^2 \rangle \right\} \end{cases}$$

qui dépend en particulier de $\langle r_d^2 \rangle$ qui caractérise la répartition de la charge dans le deutéron qui détermine la fonction d'onde du proton.

De (13) et (11) il résulte que la partie du déplacement de Lamb (Lambshift) [22] due au volume est égale à la différence des énergies données par (13), et (11) ne dépend pas des dimensions de l'électron et du proton

$$\Delta E_d - \Delta E_n = \frac{\alpha}{3} |\Psi_e(0)|^2 \left\{ \langle r_d^2 \rangle - \langle r_n^2 \rangle \right\} .$$

La différence des sections efficaces de la diffusion élastique, ne dépend aussi qu'approximativement de la différence $\langle r_d^2 \rangle - \langle r_n^2 \rangle$.

Si les répartitions de charge de l'électron et du positron sont les mêmes, les effets dûs au volume dans les interactions $e^- e^-$, $e^- e^+$, $e^+ e^+$ doivent être rigoureusement égaux et ne dépendre que de $\langle r_e^2 \rangle$.

2. Self-énergie de l'électron.

L'énergie électrostatique W de l'électron ayant une répartition de charge ρ_e peut être mise sous la forme

$$(15) \qquad W = \frac{e^2}{2} \iint \frac{\rho_e(r_1)\, \rho_e(r_2)}{r_{12}}\, dv_1\, dv_2 = \frac{1}{8\pi} \int E^2\, dv .$$

Mais d'après le théorème de Gauss

$$E = \frac{e}{r^2} \int_0^r \rho_e(r')\, dv'$$

d'où en portant l'expression de E dans (15) et en intégrant par parties on obtient

$$W = e^2 \int_0^\infty \frac{\rho_e(r) dv}{r} \int_0^{r_1} \rho_e(r_1) dv_1 \quad \frac{e^2}{(\overline{1})_{R_e}^{-1}} \quad \text{où} \quad \frac{1}{(\overline{1})_{R_e}^{-1}} = \int_0^\infty \rho_e \frac{dv}{r} \int_0^\infty \rho_e\, dv'$$

et comme $W = m_o c^2 \eta$ où m_o est la masse de l'électron au repos et η le rapport de la masse électromagnétique de l'électron à sa masse expérimentale ;

on a $\,_{-1}^{(1)}R_e = \frac{r_o}{\eta}$ où $r_o = \frac{e^2}{mc^2}$ est le rayon classique de l'électron.

3. Théorie non linéaire.

Supposons alors que l'électron est une particule ponctuelle mais que le champ est non linéiare, cette non linéarité n'est toutefois sensible qu'aux petites distances ([2] , [3] , [4] , [9] , [10] , [11] , [19] , [22]). Nous allons rechercher les conditions générales que doivent satisfaire le Lagrangien d'un champ non linéaire.

Pour que le Lagrangien soit invariant, il doit être une fonction des invariants du champ électromagnétique formés à partir des dérivées des potentiels du champ électromagnétique. L'invariant formé à partir des composantes du potentiel A_μ ne doit figurer dans le Lagrangien car alors on n'obtiendrait pas des équations du type de Maxwell [4] , [9] , [10] , [11] , [19] .

Pour cette même raison nous ne devons considérer $\mathcal{L}$ que comme une fonction de l'invariant $\mathfrak{J}$ formé à partir des composantes du tenseur antisymétrique

(17) $$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

à savoir $\mathfrak{J} = f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$. Formons alors l'intégrale d'action $\mathcal{J} = \int \mathcal{L}(\mathfrak{J})\, dx$ (intégrale quadridimensionnelle) et utilisons un principe variationnel de la manière habituelle, en prenant $A_{\mu,\nu}$ pour variables. En annulant la variation, on obtient l'équation d'Euler [4], [9], [10] , [11]

(18) $$\partial_\mu p^{\mu\nu} = 0$$

où

(19) $$p^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} .$$

Par ailleurs en tenant compte de ce que $f_{\mu\nu} = - f_{\nu\mu}$, on peut écrire

(20) $$d\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{\mu\nu}} df_{\mu\nu}$$

d'où en tenant compte de (17) et de (18) nous avons

(21) $$p^{\mu\nu} = + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{\mu\nu}}$$

de cette formule il résulte que

(22) $$p_{\mu\nu} = - p_{\nu\mu}$$

c'est pourquoi

(23) $$dL = \frac{1}{2} p^{\mu\nu} df_{\mu\nu} .$$

Montrons que la propriété d'invariance du Lagrangien peut être utilisée pour le mettre sous une forme plus simple, pour cela effectuons une transformation infinitésimale des coordonnées [1], [4], [9], [10], [11], $x'_\mu = x_\mu + \varepsilon \xi^\mu_{(x'\mu)}$ pour laquelle le potentiel A_μ et ses dérivées deviennent

$$A'_\mu = A_\mu - \varepsilon \partial_\mu \xi^\nu . A_\nu$$
$$\partial'_\mu A'_\nu = A'_{\mu,\nu} = A_{\mu,\nu} = \partial^\rho (A_\nu - \varepsilon \partial^\nu \xi^\sigma . A_\sigma) \partial'_\mu x^\rho$$

et

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} p^{\mu\nu} \delta A_{\mu,\nu} = - \frac{\varepsilon}{2} (p^{\mu\nu} A_{\sigma,\nu} + p^{\nu\mu} A_{\nu,\sigma}) \partial_\mu \xi^\sigma + \frac{1}{2} p^{\sigma\mu} A_\nu \partial_\sigma \partial_\mu \xi^\nu .$$

Le Jacobien de la transformation est égal à :

$$\frac{\partial(x'_1 , x'_2 , x'_3 , x'_4)}{\partial(x_1 , x_2 , x_3 , x_4)} = 1 + \varepsilon \partial_\mu \xi^\mu .$$

De l'invariance du Lagrangien pour la transformation :

$$\int_{\mathcal{D}'} (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}) dx' = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L} \, dx$$

en annulant les coefficients de $\partial_\mu \xi^\sigma$ et en tenant compte de ce que $p^{\sigma\mu} A_\nu \partial_\sigma \partial_\mu \xi^\nu = 0$ étant donnée l'antisymétrie de $p_{\mu\nu}$, il vient :

(24) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(p^{\mu\nu} A_{\sigma\nu} + p^{\nu\mu} A_{\nu\sigma}) \delta^\sigma_\mu = \frac{1}{2}(p^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + p^{\nu\mu} A_{\nu\mu}) = \frac{1}{2} p^{\mu\nu} f_{\mu\nu} .$$

De plus le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique peut être mis sous la forme

(25) $$H^\mu_\nu = \mathcal{L} \delta^\mu_\nu - p^{\mu\sigma} \varphi_{\nu\sigma}$$

mais $p^{\mu\sigma} \varphi_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} p^{\mu\sigma} f_{\nu\sigma}$ c'est pourquoi en tenant compte de la formule (24) on peut écrire :

(26) $$H^{\mu}_{\nu} = \mathcal{L}\,\delta^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,p^{\mu\sigma}\,f_{\nu\sigma}$$

et en particulier l'hamiltonien H^4_4 sera

(27) $$H = p^{4\sigma}\,f_{4\sigma} + \frac{1}{2}\,p^{\mu\nu}\,f_{\mu\nu}\,.$$

On peut montrer que dans le cas de l'électrodynamique non linéaire on a les mêmes conditions de conservation que dans le cas linéaire. Et de plus le théorème de Von Laue est vérifié [4], [9], [10], [11], [19].

Passons maintenant aux notations vectorielles habituelles de l'électromagnétisme. Les vecteurs intensités $\vec{E}$ et $\vec{H}$ des champs électriques et magnétiques ainsi que les inductions correspondantes $\vec{D}$ et $\vec{B}$ seront définies de la manière suivante :

(28) $$\begin{cases} \vec{B} = \sqrt{4\pi}\,f_{ij} \\ \vec{E} = \sqrt{4\pi}\,f_{k4} \end{cases} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} \vec{H} &= \sqrt{4\pi}\,p^{ij} \\ \vec{D} &= -\sqrt{4\pi}\,p^{k4} \end{aligned} \right. .$$

Les équations d'Euler (18) et les conditions d'intégration

$$\partial^{\sigma}\,f_{\mu\nu} + \partial^{\mu}\,f_{\nu\sigma} + \partial^{\nu}\,f_{\sigma\mu} = 0$$

(résultant du choix particulier de la fonction $f^{\mu\nu}$) donnent les équations de Maxwell sous leurs formes habituelles.

Toutefois alors qu'en électromagnétisme linéaire dans le cas du vide on a $\vec{B} = \vec{H}$, $\vec{D} = \vec{E}$ en théorie non linéaire ces relations ne sont pas conservées. En effet comme

$$p^{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{J}}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial f_{\mu\nu}} = -\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{J}}f^{\mu\nu} = \varepsilon\,(\mathcal{J})\;f^{\mu\nu}$$

où ce qui revient au même

(29) $$\vec{D} = \varepsilon\,(\mathcal{J})\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \varepsilon(\mathcal{J})\vec{B}$$

Nous trouvons de plus

(30) $$\begin{cases} \mathcal{J} = \dfrac{1}{8\pi}\,(E^2 - B^2) \\ H_{44} = \dfrac{1}{8\pi}\,(DE - BH) \\ \mathcal{L} = \dfrac{1}{4\pi}\,(DE - BH) \end{cases} .$$

Passons maintenant à l'étude du cas statique. Soit une charge ponctuelle e, il résulte alors de l'équation $\operatorname{div}.\vec{D} = 0$ que $\vec{D} = \frac{e\vec{r}}{r^3}$. De plus si nous avons la forme explicite du Lagrangien, en utilisant la formule (29) nous pouvons toujours calculer $\vec{E}$.

Comparons alors au champ non linéaire $\vec{E}$ donné le champ linéaire $\vec{E}_{lin}$ qui se confond avec lui. Il est évident que la source de ce dernier peut être une certaine répartition équivalente ρ_e de la charge e [18]. D'après le théorème de Gauss :

$$\vec{E}_{lin} = \frac{e\vec{r}}{r^3} \int_0^r \rho_e \, dv \quad .$$

d'où

$$\vec{E} = \vec{D} \int_0^r \rho_e \, dv = \vec{D} \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{D^2}}} \rho_e \, dv$$

tandis que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} D^2 \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{8\pi}\cdot\frac{8\pi}{D^2}}} \rho_e \, dv$$

dans le cas statique et

$$\mathcal{L} = \mathcal{J}_1 \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{8\pi \mathcal{J}_1}}} \rho_e \, dv$$

dans le cas général avec $\mathcal{J}_1 = \frac{1}{8\pi} (D^2 - H^2)$.

Ces dernières formules montrent que l'on peut se donner aussi le Lagrangien à l'aide de la fonction de répartition de charge équivalente ; une telle notation sera plus commode pour ce qui suit.

Exprimons, en tenant compte de (31) l'énergie totale du champ

$$\mathcal{H} = \int H_{44} dv = \frac{4\pi}{8\pi} \int_0^\infty \vec{D}\vec{E} \, r^2 dr = \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^r \rho_e \, r^2 dr = \frac{e^2}{2} \Big| - \frac{1}{r} 4\pi \int_0^r \rho_e r^2 dr \Big|_0^\infty + \frac{e^2}{2} 4\pi \int_0^\infty \rho_e r dr = \frac{e^2}{2 \, {}_{-1}R_e}$$

avec ${}_{-1}R_e = \int_0^\infty \rho_e \frac{dv}{r}$.

En posant $M = m.\eta$ la masse électromagnétique de l'électron, l'expression précédente peut être mise sous la forme :

(32) $$_{-1}R_e = \frac{r_o}{2\eta} .$$

Montrons alors que pour tout $\rho(r)$ toujours positif, on a : $_2R_e = \sqrt{\langle r^2\rangle} \geqslant {}_{-1}R_e$.
Pour cela mettons $\langle r^2\rangle$ sous la forme

$$\langle r_e^2\rangle = \frac{\int_o^\infty \rho_e(r)\ r^4\ dr}{\int \rho_e(r)\ r^2\ dr} = \frac{[\int_o^\infty \rho_e(r)\ r^4\ dr][\int_o^\infty \rho_e(r)\ r\ dr]^2}{[\int_o^\infty \rho_e(r)\ r^2\ dr]^3} \cdot \frac{1}{|\langle \frac{1}{r}\rangle|^2}$$

et montrons que le coefficient de $\frac{1}{|\langle \frac{1}{r}\rangle|^2}$ est supérieur ou égal à 1 ou encore,

ce qui revient au même, que

$$F = [\int_o^\infty \rho_e(r)\ r^4\ dr][\int_o^\infty \rho_e(r)\ rdr]^2 - [\int_o^\infty \rho_e(r)\ r^2\ dr]^3 \geqslant 0 .$$

Pour cela après avoir posé $\varphi = \rho_e(r)r^2$ mettons F sous forme de limite d'une somme :

$$F = \lim\left\{ [\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(r_i)r_i^2\Delta r_i][\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(r_j)\frac{\Delta r_j}{r_j}]^2 - [\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(r_i)\,\Delta r_i]^3 \right\}$$

$$= \lim [\sum_{ijk} \varphi(r_i)\ \varphi(r_j)\ \varphi(r_k)\ \Delta r_i\ \Delta r_j\ \Delta r_k(\frac{r_i^2}{r_j\ r_k} - 1)]$$

$$= \lim [\sum_{i>j>k} \varphi(r_i)\ \varphi(r_j)\varphi(r_k)\ \Delta r_i\ \Delta r_j\ \Delta r_k \left\{\frac{r_i^2}{r_j\ r_k} + \frac{r_j^2}{r_i\ r_k} + \frac{r_k^2}{r_i\ r_j} - 3\right\}]$$

mais comme

$$r_i^3 + r_j^3 + r_k^3 - 3r_i\ r_j\ r_k = \frac{1}{2}\ (r_i + r_j + r_k)\ [(r_i - r_j)^2 + (r_j - r_k)^2 + (r_k - r_i)^2] \geqslant 0$$

on a aussi $F \geqslant 0$.

De (32) et (33) il résulte que l'on doit avoir la relation

$$_2R_e \geqslant {}_{-1}R_e = \frac{r_o}{2\eta} .$$

Dans le cas non linéaire il est raisonnable de supposer que toute la masse a une origine électromagnétique c'est-à-dire que $\eta = 1$. Mais alors l'inégalité (35) ${}_2R_e \geqslant \frac{r_o}{2}$ n'est pas vérifiée même dans le cas particulier où le proton serait ponctuel. Car d'après les expériences de Hofstader le rayon quadratique total est plus petit que la moitié du rayon classique de l'électron. De sorte que la répartition de charge équivalente doit changer de signe.

Dans le cas de la théorie linéaire de l'électron étendu on doit avoir une relation analogue à (35). Avant tout on peut montrer que pour une valeur donnée de la masse électromagnétique, le rayon quadratique est minimum pour une répartition de charge uniforme dans le volume [14] (1) . Mais dans le cas où ce domaine est une sphère de rayon R_o l'énergie électrostatique est égale à $\frac{3}{5}\frac{e^2}{R_o}$ ce qui

---

(1)

$$E_{coulomb} = e^2\int_\rho U\, dv = \frac{e^2}{4\pi}\int \Delta U.U\, dv = \frac{e^2}{4\pi}\int (\nabla U)^2\, dv = e^2\int \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 r^2\, dr = \frac{1}{{}_{-1}^{1}R_e},$$

$$< r^2 > = \frac{6\Delta E}{4\pi e^2} = 6\int_0^\infty \left(U - \frac{1}{r}\right) r^2\, dr \quad .$$

Cherchons l'extremum de la fonction $\frac{E_{coulomb}}{e^2} = \frac{1}{{}_{-1}^{(1)}R_e}$ dans le cas où $< r^2 > = Cte$.

Pour cela formons la fonction

$$\mathfrak{J} = \frac{\lambda}{{}_{-1}^{(1)}R_e} + < r^2 > = \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 r^2\, dr + 6\int_0^\infty \left(U - \frac{1}{r}\right) r^2\, dr = \int \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 r^2 + 6r^2 U - 6r^2\right\} dr$$

$$\delta\mathfrak{J} = \int_0^\infty \left\{6r^2 - \lambda\frac{d}{dr}\left(2r^2\frac{dU}{dr}\right)\right\}\delta U\, dr = 0$$

d'où

$$\lambda\frac{d}{dr}\left(2r^2\frac{dU}{dr}\right) = 6r^2$$

ou bien

$$\frac{\lambda}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 3$$

soit $\Delta U = \frac{3}{\lambda} = Cte$ c'est-à-dire que : $4\pi\rho = \frac{3}{\lambda} = Cte$.

signifie que ${}^{\;1}_{-1}R_e = \frac{5}{3} R_o$ alors que ${}_2R_e = \sqrt{\frac{3}{5}} R_o$. Par suite

$$(35a) \qquad {}_2R_e \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} {}^{(1)}_{-1}R_e = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r_o}{\eta} \; .$$

Toutefois on ne peut pas faire à partir de là les mêmes conclusions que dans la théorie non linéaire, ne serait-ce que parce que dans la théorie linéaire on ne peut pas supposer que toute la masse a une origine électromagnétique, car un tel électron ne serait pas stable. Pour expliquer la stabilité et la non déformabilité de l'électron en présence de champs électriques intenses, il faudrait supposer l'existence d'une tension complémentaire de très grande intensité entre les diverses parties de l'électron. Mais alors la masse électromagnétique de l'électron devrait être beaucoup plus grande que la masse expérimentale . En théorie non linéaire nous ne rencontrons pas de telles difficultés.

Le problème de l'interaction des particules en théorie non linéaire n'est pas très simple. A cause de la non linéarité du champ on ne peut pas séparer, en général, le Lagrangien en Lagrangien du champ libre et Lagrangien d'interaction, bien que cela soit toujours possible en théorie linéaire. Toutefois si l'on se donne le Lagrangien du champ on peut toujours calculer l'énergie d'intéraction. Etant donnée l'importance de cette question, examinons l'interaction d'un proton étendu avec un électron, en se limitant comme ci-dessus aux interactions électrostatiques. Nous utiliserons le fait qu'en théorie non linéaire les vecteurs inductions s'ajoutent comme en théorie linéaire tandis que cela ne se produit pas pour les champs. Soit

$$(36) \qquad \vec{D}_1 = \frac{e\vec{r}_1}{r_1^3} \int_o^{r_1} \rho_p \, dv'$$

le vecteur induction créé par le proton étendu ;

$$(36a) \qquad \vec{D}_2 = \frac{e\vec{r}_2}{r_2^3}$$

le vecteur induction créé par l'électron ponctuel

$$(36b) \qquad \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 \; .$$

De plus d'après les formules (30) et (31)

$$H = \int H_{44}\, dv = \frac{1}{8\pi}\int [D_1^2 + D_2^2 + 2\vec{D}_1\, \vec{D}_2\, dv \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{D_2}}} \rho_e\, dv' .$$

En déduisant de là l'énergie du champ libre (champ des particules sans interactions)

$$H_o = \frac{1}{8\pi}\int D_1^2\, dv \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{D_1^2}}} \rho\, dv' + \frac{1}{8\pi}\int D_2^2\, dv \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{D_2^2}}} \rho\, dv'$$

on obtient simplement l'énergie d'interaction

(37) $$W = H - H_o = W_{11} + W_{22} + W_{12}$$

où :

(38) $$W_{11} = \frac{1}{8\pi}\int D_1^2\, dv \int_{r_1'}^{r_3'} \rho\, dv'$$

(39) $$W_{22} = \frac{1}{8\pi}\int D_2^2\, dv \int_{r_2}^{r_3'} \rho\, dv'$$

(40) $$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{D}_1\, \vec{D}_2\, dv \int_0^{r_3'} \rho\, dv'$$

(41a) $$r_2 = \sqrt{\frac{e}{D_2}}$$

(41b) $$r_1' = \sqrt{\frac{e}{D_1}} = \frac{r_1}{\sqrt{\int_0^{r_1} \rho_p\, dv}}$$

$$r_3' = \left\{\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{(r_1')^4} + \frac{2\cos\chi}{r_2^2 (r_1')^2}\right\}^{-\frac{1}{4}}$$

où χ est l'angle des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

On voit aisément qu'en passant à l'électromagnétisme habituel, il vient

$$W_{11} = W_{22} = 0 \quad \text{et} \quad W_{12} = \frac{e_1\, e_2}{r_{12}} \quad \text{(dans le cas d'un proton ponctuel).}$$

Sans tenir compte de la forme compliquée des expressions W_{11}, W_{22}, W_{12}, on peut quand même les évaluer au moins dans le cas où le rayon du proton est plus grand que le rayon d'action de la non linéarité ; supposons que la non linéarité n'agit que dans un petit domaine r^o de sorte que $\int_o^{r^o} \rho\, dv \simeq 1$ pour tout $r \geqslant r^o$. Traçons du point où se trouve la première particule (centre du proton) et de celui où se trouve la deuxième particule (électron) deux sphères de rayon r^o. Alors suivant la distance des deux particules, on peut avoir les deux cas suivants :

i. les sphères se coupent

ii. les sphères ne se coupent pas.

Examinons d'abord le premier cas, c'est-à-dire lorsque $r^o < \frac{R}{2}$. Dans la région où $r_2 < r^o$,

$$r_3' = \left\{ r_2^{-4} + (r_1')^{-4} + 2r_2^{-2}(r_1')^{-2} \cos\chi \right\}^{-1/4} \simeq r_2$$

car $r_2 > r_1'$, étant donné que d'après (41) r_1' ne peut pas être plus petit que le rayon r_p du proton qui est lui-même plus grand que r^o. Dans le domaine où $r_2 > r^o$, r_3' n'est pas plus petit que $\dfrac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_p}}$ qui est toujours plus grand que r^o et comme r_2' est aussi plus grand que r^o on peut sans changer la valeur de l'intégrale $\int_o^{r_3'} \rho\, dv'$ remplacer la borne supérieure par r_2.

De façon analogue on peut examiner le deuxième cas, on peut alors démontrer que l'on peut remplacer r_3' par r_2. De sorte que nous pouvons noter

$$W_{12} \simeq \frac{1}{4\pi} \int \vec{D}_1\, \vec{D}_2\, dv \int_o^{r_2} \rho\, dv' .$$

En remplaçant $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ par leur valeur il vient :

$$W_{12} \simeq \frac{1}{4\pi} \int dv \left\{ \frac{e\vec{r}_1}{r_1^3} \int_o^{r_1} \rho_p\, dv' \right\} \left\{ \frac{e\vec{r}_2}{r_2^3} \int_o^{r_2} \rho_e\, dv'' \right\} .$$

Mais ceci est l'interaction d'un proton de répartition de charge ρ_p et d'un électron de répartition de charge ρ_e. Autrement dit l'interaction de ces deux particules peut être mise sous la forme (1) et c'est pourquoi on peut en théorie non linéaire utiliser les mêmes raisonnements que ci-dessus pour l'interaction d'un proton et d'un électron étendu.

L'évaluation montre que le terme correctif à W_{12} représente une erreur relative de $\frac{1}{2}\left(\frac{r^o}{r_p}\right)^2$ le terme W_{11} est plus petit que W_{12} et on $\frac{W_{11}}{W_{12}} = \frac{1}{3}\left(\frac{r_o}{r_p}\right)^3$ et $\frac{W_{22}}{W_{12}} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_o}{r_p}\right)$.

En examinant l'interaction de deux électrons les termes W_{11} et W_{12} deviennent très sensibles aux distances de l'ordre des dimensions des particules. Un détail important de la théorie non linéaire est la différence de la diffusion $e^- e^-$ (ou $e^+ e^+$) et $e^- e^+$ car dans le cas de l'interaction de particules de mêmes charges, W_{12} a le même signe que W_{11} et W_{22}. Alors que dans le cas de particules de charges de signes différents W_{12} est négatif tandis que W_{11} et W_{22} sont positifs.

Un effet analogue, bien que beaucoup plus faible, devrait se produire lors de la diffusion des positrons sur les protons comparées à celle des électrons sur les protons. En théorie linéaire les diffusions $e^- e^-$ et $e^- e^+$ doivent être identiques mêmes en tenant compte des dimensions de ces particules.

Par ailleurs les théories linéaires et non linéaires doivent conduire à des répartitions angulaires un peu différentes (en particulier dans les expériences $e^- e^-$) car dans les théories non linéaires de répartition de charge doit changer de signe, tandis que ceci n'est pas obligatoire en théorie linéaire.

Les corrections possibles peuvent être introduites en tenant compte des effets radiatifs purement quantique [7] aussi bien dans le cas de la théorie non linéaire de l'électron ponctuel que dans la théorie linéaire de l'électron étendu. Toutefois il est douteux qu'elles soient assez importantes pour modifier les résultats obtenus.

4. Paradoxe apparent des théories non linéaires.

Pour obtenir, sous leurs formes habituelles, les équations de Maxwell, le Lagrangien des théories non linéaires doit être mis sous forme de somme des

Lagrangiens du champ et de l'interaction, où le Lagrangien d'interaction est égal à $j_\mu A^\mu$. Toutefois la formule de Lorentz habituelle n'est pas valable en théorie non linéaire.

Examinons, par exemple, le cas statique de l'interaction de deux particules chargées. Essayons d'évaluer la force créé par la première particule et agissant sur la deuxième. La particule agissante étant supposée ponctuelle. La force sera donnée par l'intégrale $e\int \rho(r)\vec{E}\,dv$ où $\vec{E}$ est le champ total qui est égal à

$$\vec{E} = \vec{D}\int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{D^2}}} \rho_e(r')\,dv' \quad , \quad \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 \quad , \quad \vec{D}_1 = \frac{e\vec{r}_1}{r_1^3} \quad , \quad \vec{D}_2 = \frac{e\vec{r}_2}{r_2^3}\int_0^r \rho\,dv$$

donc

$$\vec{F} = e^2\int_0^{r\to\infty} \bar{\rho}(r)\,dv \int_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{D^2}}} \rho_e(r)\,dv \left\{ \vec{D}_1(\vec{r}_1) + \vec{D}_2(\vec{r}_2) \right\} .$$

Supposons de plus que $\bar{\rho}(r)$ n'est pas nul uniquement dans une sphère de rayon très petit $r_o \to 0$. On peut écrire dans ce cas que $\vec{D} \neq \vec{D}_2$. Mais on voit alors que $\vec{F} = 0$.

De sorte que bien que le champ existe $(\vec{E} \neq 0)$ la force d'interaction est nulle. Ce résultat inattendu est une conséquence de l'existence en théorie non linéaire d'un champ maximum. Au voisinage d'une particule, la composante principale du champ total est donnée par le champ créé par cette particule elle-même $(\vec{E} \simeq \vec{E}_2)$. Ce résultat erroné est une conséquence de la non validité de la formule de Lorentz dont la forme doit changer en théorie non linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLOKHINCEV (D. I.). - Théorie non locale et non linéaire du champ [en russe], Usp. Fis. Nauk, t. 61, 1957, p. 137-159.

[2] BORN (Max). - On the quantum theory of the electromagnetic field, Proc. royal Soc. London, Series A, t. 143, 1934, p. 410-437.

[3] BORN (Max). - Théorie non-linéaire du champ électromagnétique, Ann. Inst. Henri Poincaré, t. 7, 1937, p. 155-265.

[4] BORN (Max) and INFELD (L.). - Foundations of the new field theory, Proc. royal Soc. London, Series A, t. 144, 1934, p. 425-451.

[5] BUMILLER (F.) and HOFSTADTER (R.). - Form factor studies of the proton at hogh energies, Bull. Amer. phy. Soc., Series 2, t. 2, 1957, p. 390.

[6] CHAMBERS (E.E.) and HOFSTADTER (R.). - Structure of the proton, Phys. Rev., Series 2, t. 103, 1956, p. 1454-1463.

[7] COOPER (L.N.) and HENLEY (E.M.). - Mu-mesonic atoms the electromagnetic radius of the nucleus, Phy. Rev., Series 2, t. 92, 1953, p. 801-811.

[8] HOFSTADTER (Robert). - Electron scattering and nuclear structure, Rev. mod. Phys., t. 28, 1956, p. 214-254.

[9] INFELD (L.). - The new action function and the unitary field theory, Proc. Cambridge philos. Soc., t. 32, 1936, p. 127-137.

[10] INFELD (L.). - A new group of action functions in the unitary field theory, II, Proc. Cambridge philos. Soc., t. 33, 1937, p. 70-78.

[11] INFELD (L.). - The Lorentz transformations in the new quantum electrodynamics, Proc. royal Soc. London, Series A, t. 158, 1937, p. 368-371.

[12] IVANENKO (D.D.) i KOLESNIKOV (N.N.). - Effet de volume dans le déplacement isotopique pour l'hydrogène et le deutérium [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 91, 1953, p. 47-50.

[13] IVANENKO (D.D.) i SOKOLOW (A.). - Klassische Feldtheorie. - Berlin, Akademie-Verlag, 1953.

[14] JAKOBI (G.) et KOLESNIKOV (N.). - Sur la structure de l'électron, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 286-289.

[15] KOLESNIKOV (N.N.). - Sur l'effet de la dimension du proton sur la position des niveaux électroniques dans l'hydrogène et le deutérium [en russe], Ž. eksper. teor. Fiz., t. 33, 1957, p. 819-821.

[16] MOTT (N. F.). - The scattering of fast electrons by atomic nuclei, Proc. royal Soc. London, Series A, t. 124, 1929, p. 425-442.

[17] MOTT (N.F.) and MASSEY (H.S.W.). - The theory of atomic collisions, 2e éd. - Oxford, Clarendon Press, 1949.

[18] PAULI (W.). - Relativitätstheorie, Encyklopädie mathematischen Wissenschaften, 5. Band, Zweiter Teil. - Leipzig, B. G. Teubner, 1904-1922 ; p. 539-775.

[19] PETUKHOV (V.A.). - Sur la possibilité expérimentale d'étudier la structure de l'électron [en russe], Ž. eksper. teor. Fiz., t. 32, 1937, p. 379-380.

[20] SCHWINGER (Julian). - On radiative corrections to electron scattering, Phys. Rev., Series 2, t. 75, 1949, p. 898-899.

[21] SUURA (Hiroshi). - Radiative correction to high energy electron scattering, Phys. Rev., Series 2, t. 99, 1955, p. 1020-1028.

[22] TRIEBWASSER (S.), DAYHOFF (E.S.) and LAMB (W.E.). - Fine structure of a hydrogen atom, V., Phys. Rev., Series 2, t. 89, 1953, p. 98-106 ; VI, p. 106-115.

[23] YEARIAN (M.R.) and HOFSTADTER (R.). - Form factor investigation of the neutron by high-energy electron scattering, Bull. Amer. phys. Soc., Series 2, t. 2, 1957, p. 389.

[24] YENNIE (D.R.), LÉVY (M.M.) and RAVENHALL (D.G.). - Electromagnetic structure of nucleons, Rev. mod. Phys., t. 29, 1957, p. 144-157.