Gérard Petiau

Sur quelques types d'équations d'ondes non linéaires et leurs solutions

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. n° 3, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1957/58
-:-:-:-

26 novembre 1957

SUR QUELQUES TYPES D'ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES ET LEURS SOLUTIONS

par Gérard PETIAU

Je me propose d'exposer ici quelques résultats que j'ai obtenus dans l'étude de certains types d'équations d'ondes non linéaires susceptibles d'être introduites en mécanique ondulatoire.

Certaines de ces équations ont déjà été rencontrées notamment par SCHIFF, IVANENKO, FINKELSTEIN et HEISENBERG. Mon point de départ est très différent de celui de ces auteurs et je pense que ma méthode pourrait compléter et éclaircir certains de leurs résultats.

Je commencerai par des considérations sur les hypothèses permettant de guider dans la recherche des équations d'ondes non linéaires susceptibles de généraliser les équations de la mécanique ondulatoire ordinaire.

1. Les types de solutions de l'équation de Klein-Gordon.

Je vais commencer par examiner les solutions de l'équation de Klein-Gordon :

$$\Box\Psi(x , y , z , t) + \mu_0^2 \Psi = 0 , \quad \mu_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{1}$$

représentant en mécanique ondulatoire ordinaire les corpuscules sans spin.

Suivant les problèmes étudiés, on considère différents types d'ondes Ψ, solutions de cette équation.

Ce sont les solutions appelées :

- ondes planes,
- ondes invariantes,
- ondes sphériques,
- ondes champs propres,
- ondes guidées.

1° Les solutions ondes planes s'obtiennent à partir de l'équation (1) en supposant que les fonctions $\Psi(x , y , z , t)$ ne dépendent que d'une seule variable τ , combinaison linéaire de x , y , z , t de la forme

(2) $$\tau = \frac{1}{\hbar}\left[Wt - (\vec{p}\,\vec{x})\right]$$

d'où

(3) $$\Psi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t) = \Psi(\tau)$$

Les paramètres W , $\vec{p}$ sont liés par la relation

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2\,c^2$$

La fonction $\Psi(\tau)$ est déterminée par une équation <u>différentielle</u>

(4) $$\frac{d^2\,\Psi(\tau)}{d\,\tau^2} + \Psi(\tau) = 0\ ,$$

La solution générale est alors une combinaison linéaire de deux types de solutions, paires et impaires :

(5) $$\Psi_c = A\cos\tau\ ,\ \Psi_s = A'\sin\tau\ .$$

Les différentes valeurs des fonctions $\Psi(\tau)$ peuvent être considérées comme déduites de la solution du système propre

$$\Psi = \Psi(t)$$

(alors $\tau = \frac{2\pi}{\hbar}\,m_0\,c^2\,t = \mu_0\,c\,t$) au moyen d'une transformation de Lorentz.

Nous pouvons déjà remarquer que les solutions (5) sont des solutions de (1) <u>dépendant d'une seule variable</u>, <u>périodiques</u>, <u>uniformes et d'amplitude finie</u>.

2° Les solutions dites <u>invariantes</u> s'obtiennent à partir de (1) en considérant des fonctions $\Psi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)$ qui ne dépendent de x , y , z , t que par l'intermédiaire <u>d'une seule variable auxiliaire</u>, celle-ci étant un <u>invariant relativiste</u>.

On prend généralement

$$u = \pm\sqrt{c^2\,t^2 - r^2}$$
$$u^2 = c^2\,t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

On voit facilement que

$$\square = \frac{d^2}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d}{du}\ .$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d}{du} + \mu_0^2 \right] \Psi(u) = 0$$

C'est à nouveau une équation <u>différentielle</u> dont la solution générale s'exprime au moyen des fonctions de Bessel :

$$\Psi(u) = \frac{A}{u} J_1(\mu_0\, u) + \frac{A'}{u}\; N_1(\mu_0\, u)$$

$$= \frac{B}{u} H_1^{(1)}(\mu_0\, u) + \frac{B'}{u}\; H_1^{(2)}(\mu_0\, u)$$

Ces fonctions ne possèdent éventuellement qu'un point critique : le point $u = 0$ correspondant au cône de lumière.

3° Pour l'introduction des ondes sphériques et des ondes guidées, nous allons supposer qu'il existe attaché au corpuscule un repère privilégié R_0 dans lequel les fonctions d'ondes $\Psi(x , y , z , t)$ s'expriment sous la forme d'un produit d'une fonction de t, soit $\Psi_1(t)$ et d'une fonction des variables d'espace $\Psi_2(x , y , z)$ ou $\Psi_2(r , \theta , \varphi)$

$$\Psi(x , y , z , t) = \Psi_1(t)\, \Psi_2(x , y , z) = \Psi_1(t) \Psi_2(r , \theta , \varphi)$$

alors on aura

$$\Psi_2 \; \frac{d^2\Psi_1}{d\, t^2} - \Psi_1\, \Delta\Psi_2 + \mu_0^2\; \Psi_1\; \Psi_2 = 0 \quad .$$

Introduisant deux constantes de couplage λ_1, λ_2, telles que

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_0^2 \quad ,$$

$\Psi_1(t)$ et $\Psi_2(t)$ satisferont aux deux équations

$$\frac{d^2\Psi_1}{d\, t^2} + \lambda_1 \; \Psi_1(t) = 0 \; ,$$

$$\Delta\Psi_2(x , y , z) + \lambda_2\; \Psi_2(x , y , z) = 0$$

Nous supposerons λ_1 et λ_2 réelles (λ_1 sera > 0, ceci afin d'éviter que les solutions $\Psi_1(t)$ ne soient de type évanescent ; ces solutions seraient à considérer dans une étude plus générale que je ne fais pas ici). Alors

$$\Psi_1(t) = C_1\, e^{i\sqrt{\lambda_1}\, t} + C_2\, e^{-i\sqrt{\lambda_1}\, t} = C_1' \cos \sqrt{\lambda_1}\, t + C_2' \sin \sqrt{\lambda_1}\, t \; .$$

Pour les fonctions Ψ_2 , deux cas sont à considérer.

En effet on a $\lambda_2 = \lambda_1 - \mu_0^2$, d'où

a. $$\lambda_1 > \mu_0^2 , \quad \lambda_2 > 0 .$$

$$\Delta \Psi_2 + \lambda_2 \Psi_2 = 0 , \quad \lambda_2 > 0 ,$$

admet pour solution générale

$$\Psi_2(r , \theta , \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} [A \, J_{\ell+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_2}\, r) + B N_{\ell+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_2}\, r)] \, Y_\ell^m(\theta , \varphi) .$$

b. $$\lambda_1 < \mu_0^2 , \quad \lambda_2 < 0$$

$$\Delta \Psi_2 - |\lambda_2| \Psi_2 = 0$$

admet pour solution bornée quand $r \to \infty$

$$\Psi_2(r , \theta , \varphi) = \frac{A}{\sqrt{r}} K_{\ell+\frac{1}{2}} (\sqrt{|\lambda_2|}\, r) \, Y_\ell^m(\theta , \varphi)$$

(la solution en $I_{\ell+\frac{1}{2}}$ diverge pour $r \to \infty$) . Si nous nous bornons au cas $\ell = 0$

$$\Psi_2(r , \theta , \varphi) = \Psi_2(r)$$

alors on a dans les cas :

a. $$\Psi_2(r) = A' \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}\, r}{r} + B' \frac{\cos \sqrt{\lambda_2}\, r}{r}$$

b. $$\Psi_2(r) = \frac{A''}{r} e^{-\sqrt{|\lambda_2|}\, r} .$$

Les solutions dites <u>ondes sphériques</u> sont obtenues à partir de ces expressions, en posant

$$\lambda_1 = \frac{W^2}{\hbar^2 c^2} = K^2 , \quad \lambda_2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = |\vec{K}|^2 ,$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_0^2 . \text{ Ici } \lambda_1 > \mu_0^2 .$$

$$\Psi \text{ sph} = \Psi_1(t)\Psi_2(r)$$
$$= (C_1' \cos Kct + C_2' \sin Kct)\left(A' \frac{\sin|\vec{K}|\ r}{r} + A'' \frac{\cos|\vec{K}|\ r}{r}\right)$$
$$= C_1'' \frac{\sin(Kct \mp |\vec{K}|\ r)}{r} + C_2'' \frac{\cos(Kct \mp |\vec{K}|\ r)}{r}$$

Ces ondes sont les ondes sphériques (du cas $\ell = 0$) de la mécanique ondulatoire ordinaire.

Celle-ci considère en outre le cas particulier, dit du champ propre de la particule. Ces ondes correspondent au cas où

$$\lambda_1 = 0 \text{ alors } \Psi(x , y , z , t) = \Psi_2 (r) = \Psi(r) .$$
$$\lambda_1 = 0 \text{ entraîne } |\lambda_2| = \mu_0^2 ,$$
$$\Psi(r) = \frac{C_0}{r} e^{-\mu_0 r} .$$

Cette solution en fixant la valeur de la constante C_0 est considérée comme champ Ψ créé par une source C_0 localisée au point $r = 0$ dans le système propre de la source.

On passe de ces solutions ondes sphériques générales aux solutions ondes guidées en considérant les solutions (a) et (b) complètes et en effectuant sur le repère R_0 une transformation de Lorentz générale.

Soit

$$ct = \text{ch}\,\gamma\, ct' - \text{sh}\,\gamma\, z' \quad , \quad x = x'$$
$$z = \text{sh}\,\gamma\, ct' - \text{ch}\,\gamma\, z' \quad , \quad y = y'$$
$$r^2 \rightarrow x'^2 + y'^2 + \text{ch}^2\gamma\,[z' - \text{th}\,\gamma\, ct']^2$$
$$\sqrt{\lambda_1}\, t \rightarrow \sqrt{\lambda_1}\,[\text{ch}\,\gamma\, ct' - \text{sh}\,\gamma\, z'] .$$

Posant $\sqrt{\lambda_1} = \mu_1$,

$$K_1 = \mu_1 \text{ ch}\,\gamma, \quad |\vec{K_1}| = \mu_1 \text{ sh}\,\gamma, \quad \text{th}\,\gamma = v_1$$
$$\sqrt{\lambda_1}\, t \rightarrow K_1\, ct' - |\vec{K_1}|\, z'$$
$$r^2 \rightarrow x'^2 + y'^2 + \left(\frac{K_1}{\mu_1}\right)^2 (z' - v_1\, t')^2 = \rho'^2$$

$$\Psi(x , y , z , t) = [C_1' \cos \sqrt{\lambda_1}\, t + C_1'' \sin \sqrt{\lambda_1}\, t] \times$$
$$\times \left[A' \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}\, r}{r} + A'' \frac{\cos \sqrt{\lambda_2}\, r}{r}\right] \rightarrow \tilde{\Psi}(x' , y' , z' , t') =$$

$$= [C_1' \cos(K_1\, ct' - |\vec{K_1}|\, z') + C'' \sin(K_1\, ct' - |\vec{K_1}|\, z')] \times$$
$$\times [A' \frac{\sin \sqrt{\lambda_2}\, \rho'}{\rho'} + B' \frac{\cos \sqrt{\lambda_2}\, \rho'}{\rho'}]$$

De même la solution champ Ψ, $\Psi(r) = C_0 \frac{e^{-\mu_0 r}}{r}$ donne la solution guidée particulière

$$\Psi(x', y', z', t') = \frac{C_0\, e^{-\mu_0 \sqrt{x'^2+y'^2+ch^2 \gamma (z'-th\gamma ct')^2}}}{\sqrt{x'^2+y'^2+ch^2 \gamma\, (z'-th\, \gamma\, ct')^2}}$$

correspondant au champ de Yukawa d'une source en mouvement rectiligne et uniforme.

Alors que les solutions du type ondes invariantes étaient des solutions de (1) à points critiques fixes, les ondes guidées sont des solutions à points critiques mobiles (c'est-à-dire dépendant des constantes d'intégration).

2. Les ondes planes associées aux fonctions elliptiques de Jacobi.

Dans une extension de la mécanique ondulatoire, nous devons généraliser soit l'ensemble de ces types de solutions (équivalentes dans un schéma linéaire lorsque l'on se borne aux solutions régulières), soit seulement certaines d'entre elles que des raisons physiques nous conduisent à considérer comme rattachées plus directement à la représentation de la matière.

Si nous considérons les solutions du type ondes planes, nous avons vu qu'elles peuvent être considérées comme résultant de l'application des transformations du groupe de Lorentz aux solutions particulières du système propre

$$\Psi_0 = \begin{cases} A \sin \tau = A \sin \frac{2\pi}{h} m_0 c^2\, t = A \sin 2\pi \nu_0\, t \\ A \cos \tau = A \cos \frac{2\pi}{h} m_0 c^2\, t \end{cases}$$

Cette forme de solution met en évidence un caractère fondamental de la représentation des corpuscules en mécanique ondulatoire :

Dans le système propre du corpuscule, la fonction d'ondes associe à celui-ci une "horloge" c'est-à-dire une fonction périodique du temps propre de période 2π et de fréquence $V_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$.

Si nous voulons généraliser cette conception tout en essayant d'enrichir la notion de corpuscule en introduisant non plus la seule constante intrinsèque

$\nu_0 = \dfrac{m_0 c^2}{h}$ mais deux ou plusieurs constantes, la généralisation la plus immédiate consiste à prendre comme fonction d'ondes représentant le corpuscule dans son système propre, au lieu des fonctions circulaires $\cos \tau$ ou $\sin \tau$ certaines des fonctions elliptiques de Jacobi possédant une période réelle et une période imaginaire définies au moyen d'un nombre k compris entre 0 et 1 , $0 \leq k \leq 1$ par les intégrales

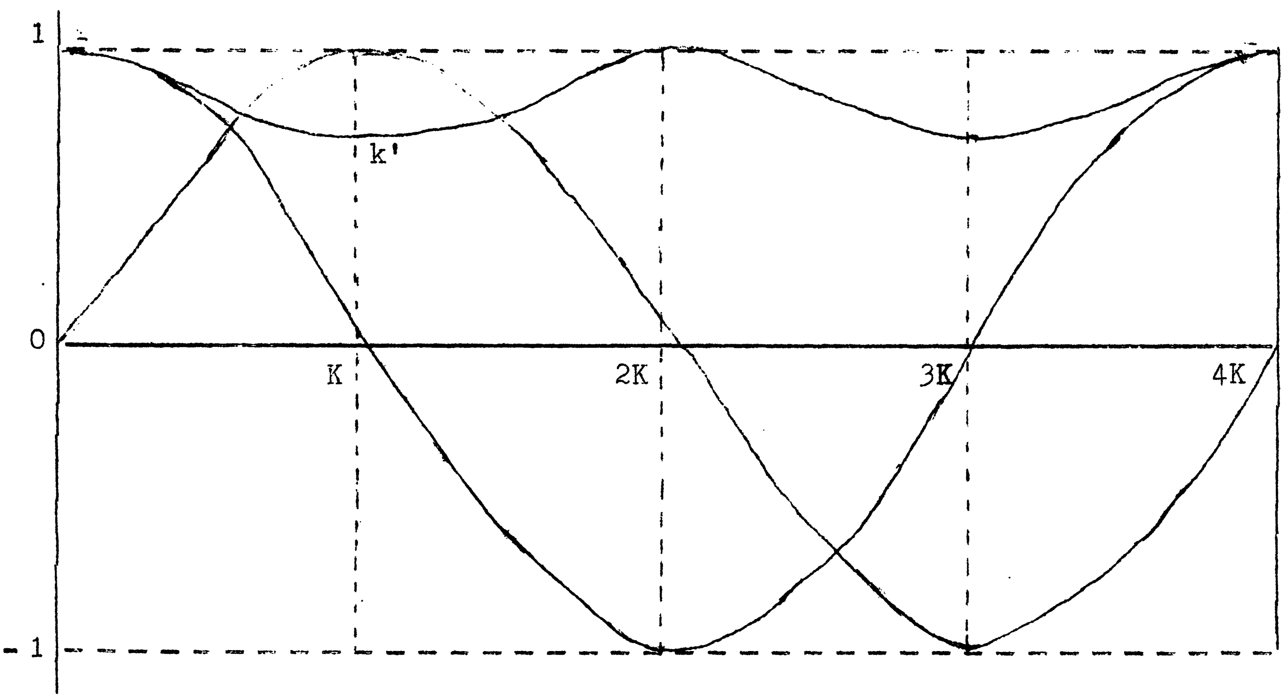
$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad , \qquad K' = K(k')$$

avec $k'^2 = 1 - k^2$, $0 \leq k' \leq 1$.

Pour $k \longrightarrow 0$ ces fonctions tendront vers $\sin \tau$ et $\cos \tau$.

La théorie des fonctions elliptiques de Jacobi définit trois fonctions fondamentales :

$\mathrm{sn}(u\,,\,k)$ de périodes $4K$ et $4iK'$
$\mathrm{cn}(u\,,\,k)$ de périodes $4K$ et $4iK'$
$\mathrm{dn}(u\,,\,k)$ de périodes $2K$ et $2iK'$



A partir de celles-ci, on construit un système de 12 fonctions fondamentales en adjoignant aux trois fonctions principales leurs inverses et leurs quotients.

Nous avons notamment les relations :

$$\mathrm{sn}(u + K\,,\, k) = \mathrm{cd}(u\,,\, k) = \frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}$$

$$\mathrm{sn}(u\,,\, 0) = \sin u \quad , \quad \mathrm{cd}(u\,,\, 0) = \cos u$$

$$\mathrm{sn}(u\,,\, 1) = \mathrm{th}\, u \qquad \mathrm{cd}(u\,,\, 1) = 1$$

$$\mathrm{cn}(u + K\,,\, k) = -\, k'\, \mathrm{sd}(u\,,\, k) = -\, k' \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}$$

$$\mathrm{cn}(u\,,\, 0) = \cos u \qquad \mathrm{sd}(u\,,\, 0) = \sin u$$

$$\mathrm{cn}(u\,,\, 1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\, u}$$

$$\mathrm{dn}(u + K\,,\, k) = -\, k'\, \mathrm{nd}(u\,,\, k) = -\, \frac{k'}{\mathrm{dn}\, u}$$

$$\mathrm{dn}(u\,,\, 0) = 1 \qquad \mathrm{dn}(u\,,\, 1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\, u}$$

Nous sommes donc conduits à poser ici : $u = \tau$, d'où

$$4K(k)\, \nu_0\, t = 4K(k)\, \frac{m_0\, c^2}{h}\, t = \frac{m_0\, c^2}{\hbar'}\, t = \mu_0\, ct \ .$$

4K est ici l'analogue du facteur 2π du cas trigonométrique.

$$\hbar' = \frac{h}{4K(k)} \quad \text{remplace} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

μ_0 sera défini par $\dfrac{m_0\, c^2}{\hbar'}$ (remarquons que $\hbar' < \hbar$).

Dans le système propre nous serons conduits à considérer trois systèmes possibles.

1° $\quad A\, \mathrm{sn}(\tau, k)$ et $A'\, \mathrm{cd}(\tau, k)$

2° $\quad A\, \mathrm{cn}(\tau, k)$ et $A'\, \mathrm{sd}(\tau, k)$.

Ces deux types de fonctions soit paires soit impaires se réduisent pour $k = 0$ aux fonctions $\sin \tau$ et $\cos \tau$.

3° $\quad A\, \mathrm{dn}(\tau, k)$, $A'\, \mathrm{nd}(\tau, k)$

Ces fonctions paires se réduisent pour $k = 0$ à des constantes $(\mathrm{dn}(0) = 1)$. On sait que les fonctions sn u , cn u , dn u , satisfont aux équations différentielles suivantes :

1° $\quad y'^2 + (1 - 2k^2)\, y^2 + k^2\, y^4 - k'^2 = 0$

a pour solutions avec $y(0) = 1$, $y = \mathrm{cn}\, u$;

avec $y(0) = 0$, $y = k' \,\mathrm{sd}\, u$.

Par suite

$$y'' + (1 - 2k^2)y + 2k^2\, y^3 = 0$$

a pour solutions

$$y = \mathrm{cn}\, u \quad \text{si} \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \;;$$

$$y = k'\mathrm{sd} u \quad \text{si} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = k' \,.$$

2° $$y'^2 + (1 + k^2)y^2 - k^2\, y^4 - 1 = 0$$

a pour solution bornée

avec $y(0) = 0$ $y = \mathrm{sn}\, u$

avec $y(0) = 1$ $y = \mathrm{cd}\, u$.

Par suite

$$y'' + (1 + k^2)y - 2k^2\, y^3 = 0$$

a pour solution

$$y = \mathrm{sn}\, u \quad \text{pour} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$y = \mathrm{cd}\, u \quad \text{pour} \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

3° $$y'^2 - (1 + k'^2)y^2 + y^4 + k'^2 = 0$$

a pour solutions

avec $y(0) = 1$ $y = \mathrm{dn}\, u$

avec $y(0) = k'$ $y = k' \,\mathrm{nd}\, u$.

Par suite

$$y'' - (1 + k^2)y + 2y^3 = 0$$

a pour solutions

$$y = \mathrm{dn}\, u \quad \text{pour} \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0 \;;$$

$$y = k'\mathrm{nd} u \quad \text{pour} \quad y(0) = k', \quad y'(0) = 0 \,.$$

Revenant des équations différentielles satisfaites par les fonctions $\Psi(\tau)$ aux équations aux dérivés partielles satisfaites par les fonctions $\Psi(x , y , z , t)$, on voit que

1°
$$\Psi_c = \lambda \,\mathrm{cn}\left[\frac{1}{\hbar'}(Wt - px)\right]$$
$$\Psi_s = \lambda k' \mathrm{sd}\left[\frac{1}{\hbar'}(Wt - px)\right]$$

sont solutions particulières ondes planes de

$$\Box\Psi + (1 - 2k^2)\mu_0^2\Psi + \frac{2k^2\mu_0^2}{\lambda^2}\Psi^3 = 0$$

2°
$$\Psi_s = \lambda \,\mathrm{sn}\left[\frac{1}{\hbar'}(Wt - px)\right] ,$$
$$\Psi_c = \lambda \,\mathrm{cd}\left[\frac{1}{\hbar'}(Wt - px)\right] ,$$

sont solutions particulières de

$$\Box\Psi + (1 + k^2)\mu_0^2\Psi - \frac{2k^2\mu_0^2}{\lambda^2}\Psi^3 = 0 .$$

3°
$$\Psi_{dn} = \lambda \,\mathrm{dn}\left[\frac{1}{\hbar'}(Wt - px)\right]$$
$$\Psi_{nd} = \lambda k' \mathrm{nd}\left[\frac{1}{\hbar'}(Wt - px)\right] ,$$

sont solutions particulières de

$$\Box\Psi - (1 + k'^2)\mu_0^2\Psi + \frac{2\mu_0^2}{\lambda^2}\Psi^3 = 0$$

3. Les solutions ondes planes des équations d'ondes à termes non linéaires en Ψ^3 .

Réciproquement, nous pourrons utiliser ces résultats pour caractériser les solutions ondes planes des quatre types d'équations d'ondes suivants

α) $$\Box\Psi + \mu_1^2\Psi + \mu_2^2\Psi^3 = 0 ,$$

β) $$\Box\Psi + \mu_1^2\Psi - \mu_2^2\Psi^3 = 0 ,$$

γ) $$\Box\Psi - \mu_1^2\Psi + \mu_2^2\Psi^3 = 0 ,$$

δ) $$\Box\Psi - \mu_1^2\Psi - \mu_2^2\Psi^3 = 0 .$$

Plus précisément nous allons chercher à déterminer lorsqu'elles existent sous des conditions à préciser les solutions ondes planes d'amplitudes bornées de ces équations.

α) L'équation (α) écrite

$$\Box\Psi + \mu_1^2\Psi + \mu_2^2\Psi^3 = 0 ,$$

a pour solutions ondes planes

$$\Psi = \lambda \,\mathrm{cn}\,[\frac{1}{\hbar} (Wt - px) + \xi_0 \,,\, k] \;,$$

en déterminant μ_0 et k par

$$(1 - 2k^2)\mu_0^2 = \mu_1^2 \quad , \quad \frac{2k^2 \mu_0^2}{\lambda^2} = \mu_2^2$$

$$(\mu_0 = \frac{m_0 c^2}{\hbar}) \;.$$

On en déduit

$$\mu_0^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 \lambda^2 \quad , \quad k^2 = \frac{\mu_2^2 \lambda^2}{2(\mu_1^2 + \mu_2^2 \lambda^2)}$$

On vérifie que l'on a toujours ici $0 \leq k^2 \leq \frac{1}{2}$. L'onde plane Ψ n'est donc jamais apériodique. La masse dynamique μ_0 est toujours supérieure à μ_1.

Si réciproquement on se fixe $\mu_0 > \mu_1$, λ et k deviennent fixés : on a alors

$$\lambda^2 = \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{\mu_2^2} \quad , \quad k^2 = \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\mu_0^2} \;.$$

Seul λ dépend de μ_2, k ne dépend que de μ_0^2 et μ_1. Les solutions ci-dessus sont les seules solutions ondes planes de l'équation (α) sans restriction sur les conditions initiales.

β) L'équation (β)

$$\Box\Psi + \mu_1^2 \Psi - \mu_2^2 \Psi^3 = 0$$

admet pour solutions périodiques bornées les fonctions

$$\Psi = \lambda \,\mathrm{sn}\,[\frac{1}{\hbar} (Wt - px) + \xi_0 \,,\, k)] \;.$$

On a ici

$$\mu_0^2 = \mu_1^2 - \frac{\mu_2^2 \lambda^2}{2} \quad , \quad k^2 = \frac{\mu_2^2 \lambda^2}{2\mu_1^2 - \mu_2^2 \lambda^2}$$

μ_0 est $< \mu_1$.

$0 \leq k^2 \leq 1$ entraîne la condition $\lambda^2 < \dfrac{\mu_1^2}{\mu_2^2}$.

Ceci correspond à des restrictions sur les conditions initiales $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$ nécessaires pour que les solutions de (β) soient d'amplitudes bornées.

En effet l'étude générale des solutions de

$$y''_{x^2} + \alpha y - |\gamma| \, y^3 = 0$$

montre que suivant les valeurs des conditions initiales y_0 et y'_0 ces équations admettent les solutions suivantes

1° $Y = \lambda \, \mathrm{sn} \, [\omega(x - x_0) + \xi_0]$ si $0 \leq y_0^2 \leq \frac{1}{|\gamma|}(\alpha - \sqrt{2|\gamma| y_0'^2})$ et $y_0'^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{2|\gamma|}$

2° $Y = \lambda \, \mathrm{scd} \, [\omega(x - x_0) + \xi_0]$.

$$\text{si} \left.\begin{matrix} \alpha - \sqrt{2|\gamma| Y_0'^2} \\ 0 \end{matrix}\right\} \leqslant |\gamma| \, Y_0^2 \leqslant \alpha + \sqrt{2|\gamma| \, Y_0'^2}$$

3° $Y = \frac{\lambda}{k} \, \mathrm{ns} \, [\omega(x - x_0) + \xi_0]$

$$\text{si} \quad \frac{1}{|\gamma|} (\alpha + \sqrt{2|\gamma| y_0'^2}) \leq Y_0^2 \leq \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\alpha^2 + 2|\gamma| Y_0'^2}$$

4° $Y = \lambda \, \mathrm{nc} \, [\omega(x - x_0) + \xi_0]$

$$\text{si} \quad \frac{1}{|\gamma|} [\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2|\gamma| Y_0'^2}] \leqslant Y_0^2 \quad .$$

Seule la solution $Y = \lambda \, \mathrm{sn} \, [\omega(x - x_0) + \xi_0]$ est d'amplitude bornée. L'équation (β) n'aura donc de solutions périodiques de type acceptable que si les fonctions initiales satisfont aux conditions

$$[\Psi'(0)]^2 \leqslant \frac{\mu_1^2}{2\mu_2^2} \quad ,$$

$$[\Psi(0)]^2 \leq \frac{1}{\mu_2^2} (\mu_1^2 - \sqrt{2\mu_2^2 (\Psi_0')^2}] \quad .$$

Réciproquement la donnee de $\mu_0 < \mu_1$ détermine λ^2 et k^2 :

$$\lambda^2 = \frac{2(\mu_0^2 - \mu_1^2)}{\mu_2^2} \quad , \quad k^2 = \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{\mu_0^2} \quad .$$

Ici encore seul λ dépend de μ_2, k ne dépend que de μ_0 et μ_1. La solution $\Psi = \lambda \,\mathrm{Sn}\,[\quad]$ devient apériodique pour $\lambda^2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}$ ou $\mu_0^2 = \frac{\mu_1^2}{2}$, $\mathrm{sn}(u\,,\,1) = \mathrm{th}\,u$,

d'où

$$\Psi = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,\mathrm{th}\,[\frac{1}{\hbar}\,(Wt - px)]$$

γ) Les équations (γ) soit

$$\Box\Psi - \mu_1^2\,\Psi + \mu_2^2\,\Psi^3 = 0$$

admettent selon les conditions initiales des solutions soit du type $\lambda\,\mathrm{cn}\,\tau$, soit $\lambda\,\mathrm{dn}\,\tau$

a.
$$\Psi = \lambda\,\mathrm{dn}\,[\frac{1}{\hbar}\,(Wt - px) + \xi_0\,,\,k]$$

est solution de (γ) si l'on a

$$\mu_0^2 = \frac{\mu_2^2\,\lambda^2}{2} \quad , \quad k^2 = \frac{2(\mu_2^2\,\lambda^2 - \mu_1^2)}{\mu_2^2\,\lambda^2}$$

sous la condition $\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} < \lambda^2 < \frac{2\mu_1^2}{\mu_2^2}$.

Pour $|\lambda| = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $k = 0$, Ψ se réduit à une constante.

Pour $k^2 = 1$ ou $|\lambda| = \frac{\mu_1\sqrt{2}}{\mu_2}$, Ψ devient apériodique.

$[\mathrm{dn}(u\,,\,1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,u}]$:

$$\Psi = \frac{\mu_1\,\sqrt{2}}{\mu_2}\;\frac{1}{\mathrm{ch}\,[\frac{1}{\hbar}(Wt - px) + \xi_0]}\,.$$

Réciproquement, si μ_0 est fixé, alors

$$\lambda^2 = \frac{2\mu_0^2}{\mu_2^2} \quad , \quad k^2 = \frac{2\mu_0^2 - \mu_1^2}{\mu_0^2}$$

μ_0 étant $< \mu_1$ et tel que $\frac{\mu_1^2}{2} < \mu_0^2 < \mu_1^2$.

Ici encore seul λ fait intervenir la constante μ_2 . k ne dépend que de μ_0 et μ_1 .

b. $$\Psi = \lambda \, \mathrm{cn} \, [\frac{1}{\hbar'} (Wt - px) + \xi_0 \, , \, k] \, , \text{ avec } \frac{1}{2} \leq k^2 \leq 1 \, ,$$

satisfait à l'équation (γ) si

$$\mu_0^2 = \mu_2^2 \lambda^2 - \mu_1^2 \quad , \quad k^2 = \frac{\mu_2^2 \lambda^2}{2(\mu_2^2 \lambda^2 - \mu_1^2)} \quad ,$$

sous la condition $\lambda^2 \geq \frac{2\mu_1^2}{\mu_2^2}$.

Réciproquement si μ_0^2 est donné avec la condition $\mu_0^2 \geqslant \mu_1^2$:

$$\lambda^2 = \frac{\mu_0^2 + \mu_1^2}{\mu_2^2} \quad ; \quad k^2 = \frac{\mu_0^2 + \mu_1^2}{2\mu_0^2} \; .$$

Ici encore k est déterminé par μ_0 et μ_1 ; μ_2 n'intervient que dans la détermination de λ .

Cette forme de solution devient apériodique pour $k = 1$, $\lambda^2 = \frac{2\mu_1^2}{\mu_2^2}$, alors

$\mathrm{cn}(u \, , \, 1) = \frac{1}{\mathrm{ch} \, u}$ (ou encore $\mu_0 = \mu_1$)

$$\Psi = \frac{\mu_1 \sqrt{2}}{\mu_2} \; \frac{1}{\mathrm{ch} \, [\frac{1}{\hbar'} (Wt - px) + \xi_0]} \; .$$

δ) L'équation

$$\Box \Psi - \mu_1^2 \Psi - \mu_2^2 \Psi^3 = 0$$

n'admet jamais de solutions périodiques ondes planes d'amplitudes bornées. Selon les conditions initiales on a des solutions de l'une des formes

$$\lambda \, \mathrm{tn} \, \tau \; , \; \lambda \, \mathrm{scd} \, \tau \; , \; \lambda \, \mathrm{nc} \, \tau$$

Nous avons donc dans les trois cas (α) , (β) , (γ) obtenus des ondes planes fonctions périodiques bornées <u>réelles</u>. Ces solutions ont donc le caractère d'ondes stationnaires.

Mais la mécanique ondulatoire considère dans nombre de problèmes des ondes planes "progressives" de la forme

$$\Psi = A\, e^{\pm \frac{i}{\hbar}(Wt-px)}$$

correspondant aux solutions

$$\Psi = A\, e^{\pm i\tau} \quad \text{de l'équation différentielle}$$

$$y''_{\tau^2} + y(\tau) = 0 \,.$$

On peut se demander: Existe-t-il ici des solutions progressives pour les équations non linéaires considérées ?

Si l'on considère $y''_{t^2} + \mu_0^2\, c^2\, y = 0$, celle-ci donne par intégration

$$y'^2_t + \mu_0^2\, c^2\, y^2 = \varkappa_0 \quad \text{constante arbitraire} > 0 \,.$$

Si $\varkappa_0 \neq 0$ on est conduit aux solutions ondes stationnaires

$$y = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\mu_0} \sin \mu_0\, ct$$

ou

$$y = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\mu_0} \cos \mu_0\, ct$$

tandis que les solutions progressives $y = A\, e^{\pm i\mu_0 ct}$ correspondent à $\varkappa_0 = 0$ d'où $y' = \pm\, i\, \mu_0\, cy$.

Si on considère l'équation

$$y''_{\tau^2} + \mu_1^2\, y + \mu_2^2\, y^3 = 0$$

l'intégration directe donne

$$y'^2_\tau + \mu_1^2\, y^2 + \frac{\mu_2^2}{2}\, y^4 = \varkappa_0 \,.$$

$\varkappa_0 \neq 0$ conduit aux solutions stationnaires réelles en λ cn τ déjà considérées.
$\varkappa_0 = 0$ conduit à un nouveau type de solutions nécessairement complexes.

Pour obtenir facilement celles-ci, il suffit de remarquer que si l'on pose $y = \frac{1}{z}$ on aura immédiatement à partir de

$$y'^2_\tau + \mu_1^2 y^2 + \frac{\mu_2^2}{2} y^4 = 0$$

$$z'^2 + \mu_1^2 z^2 + \frac{\mu_2^2}{2} = 0 \ .$$

On voit facilement que l'on a alors

$$y = \frac{1}{C_1 e^{i\mu_1\tau} - C_2 e^{-i\mu_1\tau}} ,$$

C_1, C_2 étant deux constantes liées par $C_1 C_2 = \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}$.

Posant $\frac{1}{C_1} = \lambda_1$, $\frac{1}{C_2} = \lambda_2$, on écrit encore cette solution

$$y = \frac{\lambda_1}{e^{i\mu_1\tau} - \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}\lambda_1^2 e^{-i\mu_1\tau}} = \frac{\lambda_2}{e^{-i\mu_1\tau} - \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}\lambda_2^2 e^{i\mu_1\tau}}$$

ou alternativement

$$y = \frac{\lambda_1}{(1 + \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}\lambda_1^2)\ e^{i\mu_1\tau} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2}\lambda_1^2 \cos \mu_1\tau}$$

$$y = \frac{\lambda_2}{(1 + \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}\lambda_2^2)\ e^{-i\mu_1\tau} - \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2}\lambda_2^2 \cos \mu_1\tau}$$

On voit que les ondes planes correspondant à ces solutions ne sont jamais purement progressives mais comportent à côté d'un terme progressif un terme stationnaire dépendant du facteur de non linéarité μ_2 .

De même pour les équations (β) et (γ) on trouve les solutions progressives :

$$(\beta) \qquad \Psi(\tau) = \frac{\lambda_1}{e^{i\mu_1\tau}\ (1 - \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}\lambda_1^2) + \frac{\mu_2^2\lambda_1^2}{4\mu_1^2} \cos \mu_1\tau}$$

$$= \frac{\lambda_2}{e^{-i\mu_1\tau}\ (1 - \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2}\lambda_2^2) + \frac{\lambda_2^2\mu_2^2}{4\mu_1^2} \cos \mu_1\tau}$$

$$(\gamma) \qquad \Psi(\tau) = \frac{\lambda_1}{e^{\mu_1 \tau}\left(1 - \frac{\mu_2^2 \lambda_1^2}{8\mu_1^2}\right) + \frac{\mu_2^2 \lambda_1^2}{4\mu_1^2} \operatorname{ch} \mu_1 \tau}$$

$$= \frac{\lambda_2}{e^{-\mu_1 \tau}\left(1 - \frac{\mu_2^2 \lambda_2^2}{8\mu_1^2}\right) + \frac{\mu_2^2 \lambda_2^2}{4\mu_1^2} \operatorname{ch} \mu_1 \tau}$$

Les équations considérées jusqu'ici ne sont pas linéaires et la somme de deux solutions n'est pas une solution.

Néanmoins et c'est là un point fondamental sur lequel je veux insister maintenant, il existe pour les ondes planes considérées jusqu'ici un théorème d'addition ou si l'on préfère un théorème de composition des fonctions d'ondes.

Par une composition convenable on peut, à partir de deux solutions en construire une troisième.

Ce théorème d'addition va résulter ici du théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Je rappellerai d'abord les relations

$$\operatorname{cn}(u + K) = - k' \operatorname{sd} u$$

$$\operatorname{sd}(u + K) = \frac{1}{k'} \operatorname{cn} u$$

$$\operatorname{sn}(u + K) = \operatorname{cd} u$$

On peut montrer que les théorèmes d'addition classiques des fonctions elliptiques s'écrivent également sous la forme modifiée suivante plus adaptée à notre problème

$$\operatorname{cn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp k'^2 \operatorname{sd} u \operatorname{sd} v}{1 \pm k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{sd} u \operatorname{cn} v \operatorname{sd} v},$$

$$\operatorname{sd}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sd} u \operatorname{cn} v \pm \operatorname{sd} v \operatorname{cn} u}{1 \mp k^2 \operatorname{sd} u \operatorname{sd} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}.$$

Si nous considérons deux états correspondants à des valeurs τ_1 et τ_2 caractérisés par les fonctions d'ondes

$$\Psi_c^{(1)} = \lambda \operatorname{cn} \tau_1 \quad , \quad \Psi_s^{(1)} = \lambda k' \operatorname{sd} \tau_1 \quad ,$$

$$\Psi_c^{(2)} = \lambda \operatorname{cn} \tau_2 \quad , \quad \Psi_s^{(2)} = \lambda k' \operatorname{sd} \tau_2 \quad ,$$

la fonction d'état (1) + (2) ou $\Psi(\tau_1 + \tau_2)$ sera caractérisée par les fonctions

$$\Psi_c^{(1)+(2)} = \lambda \,\mathrm{cn}(\tau_1 + \tau_2 , k)$$

$$\Psi_s^{(1)+(2)} = \lambda k' \mathrm{sd}(\tau_1 + \tau_2 , k) .$$

Le théorème d'addition nous donne alors

$$\Psi_c^{(1)+(2)} = \frac{\lambda^3 (\Psi_c^{(1)} \Psi_c^{(2)} - \Psi_s^{(1)} \Psi_s^{(2)})}{\lambda^4 + \frac{k^2}{k'^2} \Psi_s^{(1)} \Psi_s^{(2)} \Psi_c^{(1)} \Psi_c^{(2)}}$$

$$\Psi_s^{(1)+(2)} = \frac{\lambda^3 (\Psi_s^{(1)} \Psi_c^{(2)} + \Psi_s^{(2)} \Psi_c^{(1)})}{\lambda^4 - \frac{k^2}{k'^2} \Psi_s^{(1)} \Psi_s^{(2)} \Psi_c^{(1)} \Psi_c^{(2)}}$$

La possibilité de construire des fonctions d'états à 2 ou plusieurs corpuscules à partir des fonctions d'état à un corpuscule rend possible une seconde quantification de la théorie.

4. Les équations d'ondes non linéaires plus générales.

La généralisation des fonctions d'ondes considérée jusqu'ici partait des solutions du type ondes planes.

Je vais maintenant examiner la possibilité de généraliser les ondes du type invariantes. Il semble en effet vraisemblable que les équations d'ondes non linéaires à considérer doivent présenter l'invariance relativiste de la mécanique ondulatoire linéaire.

Nous avons vu qu'après introduction de la variable $u = \sqrt{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ l'équation $\square \Psi + \mu_0^2 \Psi = 0$ déterminait des solutions invariantes $\Psi(u)$ par l'équation différentielle $\left(\frac{d^2}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d}{du} + \mu_0^2\right) \Psi(u) = 0$ dont j'ai indiqué les solutions.

Un des caractères de cette équation est de ne présenter de point critique pour ses solutions qu'au point $u = 0$ c'est-à-dire sur le cône de lumière.

Il semble que l'on puisse demander aux fonctions d'ondes, solutions d'équations plus générales, de conserver cette propriété ou tout au moins de ne posséder que des solutions à points critiques fixes (c'est-à-dire indépendant des valeurs des constantes d'intégration).

Si nous cherchons une équation aux dérivées partielles du second ordre invariante relativiste, la forme la plus générale de celles-ci s'écrit :

$$(E) \qquad \Box \Psi_0 + F\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t})^2 - \Sigma(\frac{\partial \Psi}{\partial x})^2 \ , \ ct\frac{\partial \Psi}{\partial t} - x\frac{\partial \Psi}{\partial x} \ , \Psi, \ u\right] = 0 \ .$$

Les solutions invariantes seront des fonctions <u>de</u> u <u>seul</u> satisfaisant à l'équation différentielle.

$$\frac{d^2\Psi}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d\Psi}{du} + F\left[(\frac{d\Psi}{du})^2 \ , \ u\frac{d\Psi}{du} \ , \ u \ , \Psi(u)\right] = 0 \ .$$

Si l'équation (E) doit admettre également des solutions ondes planes, il faudra que, en posant

$$m_0 c \tau = [Wt - (\vec{p}\vec{x})] \ ,$$

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

l'équation (E) conduise à une équation différentielle ne dépendant que de τ .
Or

$$\Box\Psi \rightarrow \frac{d^2\Psi(\tau)}{d\tau^2} \qquad , \qquad (\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t})^2 - \Sigma(\frac{\partial\Psi}{\partial x})^2 \rightarrow (\frac{d\Psi}{d\tau})^2$$

$$ct\frac{\partial\Psi}{\partial t} - x\frac{\partial\Psi}{\partial x} \rightarrow m_0 c \tau \frac{d\Psi}{d\tau}$$

par suite (E) donnera une équation différentielle en τ si u n'entre pas dans l'équation.

Si cette condition est réalisée

$$(E_1) \qquad \Box\Psi + F\left[(\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t})^2 - \Sigma(\frac{\partial\Psi}{\partial x})^2 \ , \ t\frac{\partial\Psi}{\partial t} - x\frac{\partial\Psi}{\partial x} \ , \Psi\right] = 0$$

donnera naissance aux deux équations différentielles

$$(E_2) \qquad \frac{d^2\Psi}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d\Psi}{du} + F\left[(\frac{d\Psi}{du})^2 \ , \ u\frac{d\Psi}{du}, \ \Psi(u)\right] = 0$$

$$(E_3) \qquad \frac{d^2\Psi}{d\tau^2} + F\left[(\frac{d\Psi}{d\tau})^2 \ , \tau\frac{d\Psi}{d\tau} \ , \Psi(\tau)\right] = 0$$

La généralisation des propriétés des fonctions d'ondes planes et invariantes de la mécanique ondulatoire ordinaire nous conduit à postuler.

α) Les solutions de E_2 doivent être à points critiques fixes.

β) Les solutions de E_3 devront être des fonctions continues, uniformes et bornées (ou d'amplitudes finies).

Or on peut obtenir toutes les équations différentielles du second ordre de la forme

$$y'' = R(y\ ,\ y') \quad \text{ou} \quad y'' = R(x\ ,\ y\ ,\ y')\ ,$$

R étant rationnel en y' et algébrique en x et y, dont les intégrales sont soit uniformes, soit à points critiques fixes, au moyen des résultats d'un mémoire de P. PAINLEVÉ [2], complété par B. GAMBIER [1]. Ces mémoires donnent toutes les formes admissibles dans le cadre des hypothèses ci-dessus. Les équations

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0$$

sont les équations (4) du tableau (9) de Painlevé.

Parmi les équations d'ondes non linéaires remarquables que l'on peut déduire des tableaux de Painlevé, je signalerai seulement l'équation

$$\text{(C)} \qquad \Box\Psi - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{1}{\Psi} + \mu_n^2\Psi = 0$$

n étant entier.

On trouve facilement toutes les solutions de cette équation.

En effet, soit $\varphi(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)$ tel que

$$(C_1) \qquad \Box\varphi + \mu_1^2\varphi = 0\ ,$$

et soit $\Psi_1 = [\varphi(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)]^n$, l'équation (C_1) entraîne

$$\Box\Psi_1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\Psi_1}\left[\left(\frac{1}{c}\Psi_t'\right)^2 - \sum(\Psi_x')^2\right] + n\,\mu_1^2\,\Psi_1 = 0$$

On posera donc

$$\mu_n^2 = n\,\mu_1^2 \qquad , \qquad \mu_n = \mu_1\sqrt{n}\ .$$

Par suite l'équation (C) admet toutes les solutions de C_1 (ondes planes, ondes invariantes, ondes guidées, etc.) avec

$$\Psi(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t\ ;\ \mu_n) = \left(\varphi\left(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t\ ;\ \frac{\mu_n}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

pour un corpuscule de masse $\mu_1 = \dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}$ avec $\Psi = \varphi^n$.

Par suite, si on considère l'équation

$$\Box\Psi - \lambda\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{1}{\Psi} + \mu^2\Psi = 0$$

Il suffit d'imposer à cette équation d'admettre des solutions ondes planes fonctions uniformes de τ pour imposer $\lambda = 1 - \frac{1}{n}$, avec n entier et il en résulte les états de masse $\mu_n = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$. On voit ici comment une condition d'uniformité imposée aux fonctions d'ondes peut conduire à une quantification de la masse.

Je vais maintenant signaler un autre point de vue peut-être plus riche de prolongements possibles.

La seconde quantification a été jusqu'ici considérée comme un attribut du linéaire.

Je pense que ceci n'est pas nécessaire et il me semble que la seconde quantification est essentiellement attachée à la possibilité de construire des états à 2 particules, n particules à partir des états à 1 particule.

Pour cela, il suffira que dans la théorie considérée, il existe un théorème d'addition ou de composition des états, c'est-à-dire qu'à partir des fonctions d'ondes représentant un état à n particules et un état à une particule on puisse construire la fonction d'ondes représentant un état à n + 1 ou n - 1 particules.

Les fonctions d'ondes acceptables seront celles admettant un théorème d'addition ou de composition. Cette condition semble très large. Néanmoins ce problème possède une solution partielle..

En effet, WEIERSTRASS a démontré un théorème remarquable relatif à notre problème.

WEIERSTRASS appelle théorème d'addition algébrique une relation algébrique liant les fonctions $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u+v)$ et voici son théorème :

Toute fonction pour laquelle il existe un théorème d'addition algébrique est une fonction elliptique ou l'une de ses dégénérescences.

Ceci nous ramène donc aux équations non linéaires que nous avons considérées.

Toutefois les hypothèses mathématiques introduites ne sont pas justifiées du point de vue physique. Rien ne nous conduit à admettre que la nature obéisse à des règles traduites par des lois algébriques.

Je vais d'ailleurs terminer en considérant un exemple simple où je retrouverai tous les caractères admissibles pour une équation d'ondes non linéaires sans l'hypothèse de liaison algébrique ou d'addition algébrique.

Pour cela je considère l'équation non linéaire

(D) $$\Box \Psi (x , y , z , t) + \mu_0^2 \sin \lambda \Psi = 0$$

En première approximation (?) , $\lambda \Psi$ petit, cette équation s'écrit

$$\Box \Psi + \mu_0^2 \lambda \Psi = 0 \quad ,$$

ou

$$\Box \Psi + \mu_1^2 \Psi = 0 \quad , \quad \mu_1^2 = \mu_0^2 \lambda \; .$$

En seconde approximation,

$$\Box \Psi + \mu_0^2 \lambda \Psi - \frac{\mu_0^2 \lambda^3}{6} \Psi^3 = 0 \quad ,$$

et avec $\mu_2^2 = \dfrac{\mu_0^2 \lambda^3}{6}$,

$$\Box \Psi + \mu_1^2 \Psi - \mu_2^2 \Psi^3 = 0$$

C'est une équation du type non linéaire considéré précédemment.

Si l'on pose $\lambda \Psi = \varphi$, nous sommes ramenés à

(D_1) $$\Box \varphi + \mu_1^2 \sin \varphi = 0$$

dépendant d'un seul paramètre μ_1 .

Si l'on cherche les solutions ondes planes de cette équation, on est ramené à l'équation

$$\frac{d^2 \varphi (\tau)}{d \tau^2} + \mu_1^2 \sin \varphi (\tau) = 0 \quad .$$

Cette équation est bien connue en physique : c'est l'équation du pendule.

Alors que l'équation de Klein-Gordon associait au corpuscule dans son système propre l'oscillateur le plus simple, nous lui associons ici un mouvement pendulaire.

Les solutions de (D) ou (D_1) ne sont définies qu'à un multiple de 2π près : $\varphi_1(\tau) = \varphi_0(\tau) + 2n\pi$. De même si on pose $\varphi' = \varphi \pm n\frac{\pi}{2}$, les fonctions φ' satisfont à

$$\Box\varphi' \pm \mu_1^2 \cos\varphi' = 0 .$$

Les solutions de (D_1) donnent simultanément les solutions de

$$\Box\varphi \pm \mu_1^2 \sin\varphi = 0 \quad ,$$

$$\Box\varphi \pm \mu_1^2 \cos\varphi = 0 \,.$$

Nous allons maintenant déterminer des solutions ondes planes de (D_1) .

L'équation $\varphi'' + \mu_1^2 \sin\varphi = 0$ donne

$$\varphi'^2 - 2\mu_1^2 \cos\varphi = Co , \quad Co = Cte$$

$$Co = \varphi_0'^2 - 2\mu_1^2 \cos\varphi_0 \quad ,$$

d'où la condition

$$-2\mu_1^2 + \varphi_0'^2 \leq Co \leq 2\mu_1^2 + \varphi_0'^2 \quad .$$

$$\varphi'^2 = (Co + 2\mu_1^2)\left(1 - \frac{4\mu_1^2}{Co + 2\mu_1^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) .$$

Soit alors

A) $$\frac{4\mu_1^2}{Co + 2\mu_1^2} = k^2 < 1 \quad ,$$

ce qui exige $Co > 2\mu_1^2$, d'où

$$2\mu_1^2 \leq Co \leq 2\mu_1^2 + \varphi_0'^2 \quad .$$

Il vient

$$\varphi'^2 = \frac{4\mu_1^2}{k^2}\left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \quad ;$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \pm\frac{2\mu_1}{k}\, d\tau \quad .$$

Soit $\chi = \frac{\varphi}{2}$,

$$\int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = \pm \frac{\mu_1}{k} \tau + \xi_0 .$$

On reconnait au premier membre l'intégrale de Legendre

$$F(\chi \quad k) = F(\frac{\varphi}{2}, k)$$

Or si $F(\varphi, k) = u$, réciproquement $\varphi = \mathrm{am}\, u$ telle que

$$\sin \varphi = \mathrm{sn}\, u \quad , \quad \cos \varphi = \mathrm{cn}\, u .$$

On a donc

$$\frac{\varphi}{2} = \mathrm{am}(\frac{\mu_1}{k} \tau + \xi_0) \quad .$$

B) Soit $\frac{4\mu_1^2}{Co + 2\mu_1^2} = k_1^2 > 1$, alors $|k_1 \sin \frac{\varphi}{2}| < 1$.

Soit $k_1 = \frac{1}{k}$, on utilisera la relation $F(\varphi , k_1) = k\, F(\varphi_1 , k)$ avec $k_1 = \frac{1}{k}$, d'où

$$\varphi_1 = \mathrm{arc}\ \sin(k_1 \sin \varphi)$$

ou la formule dite du module réciproque

$$\mathrm{sn}(k\, u , k_1) = k\, \mathrm{sn}(u , k)$$

donnant ici

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k\, \mathrm{sn}(\mu_1 \tau + \xi_1 , k) .$$

La détermination des solutions ondes planes est donc complète.

Nous allons montrer que les fonctions ondes planes correspondantes possèdent un théorème d'addition.

Soit $\varphi(u_1 + u_2) = 2\mathrm{am}(u_1 + u_2)$ or

$$\mathrm{am}(u_1 \pm u_2) = \mathrm{arc}\ \mathrm{tg}(\mathrm{tn}\, u_1\, \mathrm{dn}\, u_2) \pm \mathrm{arc}\ \mathrm{tg}(\mathrm{tn}\, u_2\, \mathrm{dn}\, u_1) =$$

$$= \mathrm{arc}\ \mathrm{tg}(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}) \pm \mathrm{arc}\ \mathrm{tg}(\frac{\sin\frac{\varphi_2}{2}}{\cos\frac{\varphi_2}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}}) .$$

Il n'est pas nécessaire de souligner le caractère non algébrique de ce théorème d'addition ! Toutefois nous voyons qu'il est possible de construire à partir de modèles physiques relativement simples des équations d'ondes non linéaires possédant des solutions dont les caractères généralisent ceux des fonctions d'ondes de la mécanique ondulatoire usuelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GAMBIER (B.). - Sur les équations différentielles de second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, Acta Math., t. 33, 1910, p. 1-55.

[2] PAINLEVÉ (Paul). - Sur les équations différentielles de second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, Acta Math., t. 25, 1902, p. 1-85.