M. Cotte

Étude critique de la notion de vitesse de groupe

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. nº 14, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1957/58
-:-:-:-

11 mars 1958

ÉTUDE CRITIQUE DE LA NOTION DE VITESSE DE GROUPE

par M. COTTE

1. Notion de vitesse de groupe.

La notion de vitesse de groupe a été introduite par Lord RAYLEIGH à propos de la propagation d'un signal dans un milieu dispersif. Une application classique est la propagation de rides à la surface de l'eau, mais la notion est très générale. On la retrouve en téléphonie, en optique et en mécanique ondulatoire. Nous reproduirons la démonstration classique afin de bien mettre en évidence les hypothèses qu'elle implique.

Soit un signal $y(t)$, fonction donnée du temps t . Ce signal admet le développement de Fourier

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp i\omega t \, d\omega \tag{1}$$

avec

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) \, y(t) \, dt \quad . \tag{2}$$

Si $F(\omega)$ a un maximum accusé pour $\omega = \omega_0$, et tombe à des valeurs extrêmement petites quand ω s'écarte de ω_0 , on a affaire à un paquet d'ondes, et on peut écrire

$$y(t) = \exp i\omega_0 t . \, A(t) \tag{3}$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp[i(\omega - \omega_0)t] \, d\omega \tag{4}$$

La fonction $A(t)$ varie beaucoup moins vite que $e^{i\omega_0 t}$, et on peut représenter le signal comme une onde de fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi$ dont l'amplitude et la phase sont lentement variables.

Si $y(t)$ est réel, $A(t)$ est complexe, et il est commode de considérer son module $M(t)$ et son argument $\Phi(t)$. On peut alors écrire

$$y(t) = M(t) \cos [\omega_o t + \Phi(t)] \tag{5}$$

ce qui permet de regarder $y(t)$ comme une onde de fréquence f_o (onde porteuse) modulée à la fois en amplitude et en fréquence. La modulation d'amplitude est $M(t)$, la modulation de fréquence est $\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi'(t)$.

Les oscillations rapides de $y(t)$ seront limitées, enveloppées pour ainsi dire, par les deux courbes à variation lente $\pm M(t)$, tandis que les intervalles entre deux zéros consécutifs de $y(t)$ sont sensiblement $\pi/(\omega_o + \Phi'(t))$.

Etudions la propagation du signal $y(t)$ dans un milieu homogène dispersif. Ce milieu sera caractérisé par une constante de propagation $k(\omega)$ telle qu'après la traversée d'une épaisseur x , l'onde $e^{i\omega t}$ devienne $e^{i(\omega t - kx)}$.

Dans ces conditions, si le signal $y(t)$ est appliqué à l'entrée du milieu, on trouvera, après la traversée de l'épaisseur x le signal $z(t,x)$ tel que

$$z(t\ ,\ x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp [i(\omega t - kx)]\, d\omega \ . \tag{6}$$

Supposons que la pulsation ω_o tombe dans une région de transparence du milieu, c'est-à-dire que k soit réel, et bien représenté pour ω voisin de ω_o par le développement

$$k = k(\omega_o) + (\omega - \omega_o)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_o + \frac{1}{2}(\omega - \omega_o)^2 \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_o + \dots \tag{7}$$

L'hypothèse du "paquet d'ondes" permet souvent de négliger dans (7) les termes autres que les deux premiers.

Posons

$$\left.\begin{aligned} k_o &= k(\omega_o) \\ \frac{1}{W} &= \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_o \end{aligned}\right\} \ . \tag{8}$$

Nous aurons alors

$$i(\omega t - kx) = i(\omega_o t - k_o x) + i(\omega - \omega_o)(t - \frac{x}{W})$$

et

$$z(t\ ,\ x) = \exp [i(\omega_o t - k_o x)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp [i(\omega - \omega_o)(t - \frac{x}{W})] d\omega$$

ou

$$(9) \qquad z(t\ ,\ x) = \exp\left[i(\omega_o t - k_o x)\right] A(t - \frac{x}{w})$$

Nous reconnaissons dans (9) la porteuse transportée avec la vitesse de phase

$$v = \omega_o / k_o$$

et la modulation transportée avec la vitesse de groupe

$$w = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_o \ .$$

Si $y(t)$ est réel, on a

$$z(t\ ,\ x) = M(t - \frac{x}{w}) \cos\left[\omega_o t - k_o x + \Phi(t - \frac{x}{w})\right]$$

ce qui montre que non seulement la modulation d'amplitude, mais encore la modulation de fréquence se propagent avec la vitesse de groupe. Toutefois, si nous considérons que le signal n'est pas $A(t)$, ni $M(t)$, ni $\Phi(t)$ mais $y(t)$, on voit que pour $v \neq w$, $z(t\ ,\ x)$ n'est pas la copie exacte de $y(t)$ avec un décalage dans le temps proportionnel à x. Par exemple si $\Phi(t)$ est nul, les ondes paraîtront se déplacer à l'intérieur de leur enveloppe avec la vitesse relative $v - w$.

D'autre part ces résultats ont été établis sous deux hypothèses assez restrictives

1° k est réel

2° le développement (7) peut être limité aux deux premiers termes, c'est-à-dire x est assez petit pour que l'on ait

$$(10) \qquad x(\omega - \omega_o)^2 \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_o \ll 2\pi$$

dans tout l'intervalle de fréquence pour lequel $F(\omega)$ est sensiblement différent de zéro.

Il semble donc que si ces conditions ne sont pas vérifiées on ne pourra plus reconnaître ni le signal, ni la modulation. Comme nous le verrons, cette conclusion n'est pas toujours exacte.

2. Durée de trajet de groupe et distorsion de la durée de trajet de groupe.

Une extension naturelle de la notion de vitesse de groupe est celle de durée de trajet de groupe. Dans le calcul de $z(t\ ,\ x)$, les variables k et x

n'interviennent pas séparément, mais seulement par le produit

(11) $$\Gamma = ikx = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad .$$

Lorsque k est réel, φ_1, est nul.

La quantité

(12) $$\varphi_2(\omega_o) = xk_o = \omega_o \frac{x}{v}$$

représente la rotation de phase introduite dans l'onde $e^{i\omega_o t}$ par la propagation sur la longueur x .

La modulation se propage sur la longueur x dans le temps

(13) $$\tau = \frac{x}{w} = \left(\frac{d\varphi_2}{d\omega}\right)_o \quad .$$

C'est la durée de trajet de groupe ; la vitesse de groupe n'est autre que le quotient $\frac{x}{\tau}$.

L'avantage de substituer $\Gamma(\omega)$ à $zk(\omega)$ est que la donnée de $\Gamma(\omega)$ permet de représenter l'effet sur l'onde $y(t)$ d'une portion de ligne homogène ou inhomogène ou d'un appareil de transmission quelconque. La seule chose à supposer est que le système de transmission est linéaire, c'est-à-dire que si on reçoit un signal $z_1(t)$ quand on applique $y_1(t)$ à l'entrée, et si on reçoit $z_2(t)$ quand on applique $y_2(t)$ à l'entrée, on reçoit

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

si on applique $y_1(t) + y_2(t)$ à l'entrée.

Il arrive qu'un système ait de bonnes propriétés de transmission, alors que les hypothèses restrictives à la base de la notion de vitesse de groupe, que l'on peut écrire $$\varphi_1 = 0$$

(14) $$(\omega - \omega_o)^2 \left(\frac{d^2\varphi_2}{d\omega_o^2}\right) \ll 2\pi \quad .$$

ne sont pas remplies.

Un exemple est le câble de télévision. Les inévitables irrégularités de fabrication ont pour effet que $\varphi_1(\omega)$ et $\varphi_2(\omega)$ subissent des oscillations de faible amplitude, mais capricieuses autour d'une loi de croissance régulière. Par des réseaux correcteurs relativement simples on peut obtenir que pour l'ensemble câble et réseaux, $\varphi_1(\omega)$ soit à peu près constant, et que $\varphi_2(\omega)$

soit une fonction linéaire de ω . Mais la correction porte sur l'allure générale de la courbe et laisse subsister les indentations. Or justement dans les transmissions de télévision, l'intervalle f_1 f_2 des fréquences à transmettre est très grand, et la condition (14) ne sera certainement pas remplie par l'ensemble câble réseau-correcteur. Comme de tels systèmes sont cependant utilisables, on a proposé un autre critère. Dans l'intervalle de fréquence f_1 , f_2 la durée de trajet de groupe $\tau = \frac{d\varphi_2}{d\omega}$ varie entre une borne inférieure τ_{min} et une borne supurieure τ_{max} . On a proposé que la distorsion de la durée de trajet de groupe $\frac{d\varphi_2}{d\omega}$ soit assujetti à être inférieur à la durée θ de l'émission d'un point de l'image télévisée. Cette condition beaucoup moins sévère que (14) a l'air raisonnable si on envisage l'émission successive de deux paquets d'ondes dont les fréquences moyennes correspondent respectivement à τ_{max} et τ_{min} : l'intervalle entre les maximums absolus de y ne doit pas être modifié de plus de θ .

On peut adresser diverses objections à cette façon de voir.

1° Comme φ_2 varie irrégulièrement les paquets d'ondes doivent être assez resserrés en fréquence, donc étalés dans le temps. Les instants des maximums absolus de y correspondant aux deux paquets d'ondes sont physiquement mal définis.

2° On peut s'attendre à ce que les variations de $d\varphi_1/d\omega$ aient une influence sur la qualité de la transmission.

3° Considérons l'exemple suivant qui malgré son caractère très théorique, montre bien qu'on ne peut pas fonder un critère de la qualité d'une transmission sur $d\varphi_2 | d\omega$.

Imaginons une ligne formée de trois portions parfaitement homogènes et sans distorsion ; la partie moyenne de la ligne a une impédance caractéristique un peu différente de celles des portions terminales ; l'émetteur et le récepteur sont adaptés à l'impédance caractéristique des portions terminales. Si y est le signal émis, z le signal reçu, k la constante de propagation, la même sur les trois tronçons, et r_1 et r_2 les coefficients de réflexion à l'entrée et à la sortie du tronçon moyen , v la vitesse de phase, on a en régime permanent

$$z = y\, e^{-ikL} [1 - r_1\, r_2\, e^{-2ik\ell}] \, . \tag{15}$$

Posons

$$r_1 \, r_2 = a \; ; \quad ik = \beta + \frac{i\omega}{v} \; ; \quad t_1 = \frac{2\ell}{v} \tag{16}$$

Supposons β petit, indépendant de la fréquence, et confondons $e^{2\beta\ell}$ avec l'unité. On a

$$z = y \, e^{-2\beta L} \, e^{i\omega L/v} \left[1 - a \, e^{-2i\omega\ell/v}\right] \tag{17}$$

Un calcul facile montre que la durée de trajet de groupe subit des variations d'amplitude at_1 autour d'une valeur moyenne. Pour une valeur donnée de a , la distorsion de la durée de trajet de groupe, peut être aussi élevée que l'on veut. Il suffit d'augmenter ℓ .

Or l'étude de ce système en régime transitoire montre qu'il possède, t_1 secondes après le signal utile, un écho d'amplitude relative $\pm$ a et on peut toujours prendre a assez petit pour que l'écho ne soit pas gênant.

Il semble donc que le critère basé sur la durée de trajet de groupe est mauvais.

3. Mesure de la distorsion d'un signal.

Reprenons le signal de durée finie $y(t)$ dont la décomposition spectrale est donnée par (1) , (2) . Si à la place de la pulsation ω , on introduit la fréquence f il vient

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) \, e^{2\pi i f t} \, df \tag{18}$$

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \, e^{-2\pi i f t} \, df \, . \tag{19}$$

La théorie des intégrales de Fourier montre que

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} |y^2(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 \, df \, . \tag{20}$$

De même à la place de (6) on peut écrire

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) \, e^{-\Gamma(f) + 2\pi i f t} \, df \, . \tag{21}$$

Nous pouvons remarquer qu'un retard θ dû à la transmission, et un affaiblissement uniforme qu'on peut compenser par une amplification uniforme n'empêchent pas de reconnaître le signal. Si m est une constante inférieure à 1 , et θ une autre constante, une transmission sera sans distorsion si la différence

$$(22) \qquad u(t) = \frac{z(t)}{m} - y(t - \theta)$$

entre la réponse ramenée au niveau du signal et le signal convenablement retardé est nulle. Dans le cas contraire, nous pourrons définir la distorsion par le rapport I/J avec

$$(23) \qquad I = \int_{-\infty}^{+\infty} |u^2(t)|^2 \, dt \, .$$

Si nous posons

$$(24) \qquad \begin{aligned} m &= e^{-\varphi_0} \\ X_1 &= \varphi_1 - \varphi_0 \\ X_2 &= \varphi_2 - 2\pi\theta f \end{aligned}$$

nous pouvons écrire, en vertu de (20)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 \left\{ [1 - e^{-X_1}]^2 + 4e^{-X_1} \sin^2 \frac{X_2}{2} \right\} df \, .$$

On ne peut espérer avoir $I/J \ll 1$ que si, dans tout le domaine des fréquences où $|A(f)|^2$ n'est pas extrêmement petit, $(1 - e^{-X_1})$ se trouve très petit, et X_2 voisin de $2n\pi$ avec n entier.

En fait supposons X_1 très petit et X_2 voisin de $2n\pi$ pour toutes les fréquences des signaux à transmettre. Pour cette valeur de n , et au voisinage immédiat des valeurs de θ et de m qui rendent I minimum, nous pouvons écrire, puisque X_1 et $X_2 - 2n\pi$ sont encore petits

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 \, [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 + (\varphi_2 - 2n\theta f - 2n\pi)^2] \, df \, .$$

Si $y(t)$ est réel, on peut dans (23) et (24) simultanément doubler l'intégrale et réduire l'intervalle d'intégration à $0 , \infty$.

Nous voyons que, pour un système de transmission donné, et un spectre donné de fréquences à transmettre, I est une fonction des constantes φ_0 , θ et n .

Comme il n'existe aucune raison de se donner a priori ces constantes, nous les choisirons de façon à rendre I minimum. On trouve alors que l'affaiblissement moyen du signal est

$$\varphi_0 = \frac{\int \varphi_1 |A(f)|^2 \, df}{\int |A(f)|^2 \, df} \tag{27}$$

et que le retard dû à la propagation est

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\int f |A(f)|^2 (\varphi_2 - 2n\pi) df}{\int f^2 |A(f)|^2 \, df} \tag{28}$$

Dans (28) n est en général donné sans ambiguité pour des signaux occupant une large bande de fréquence. D'ailleurs la condition de minimum absolu imposée à I permet de lever toute hésitation sur la valeur de n à adopter. D'une part la petitesse de I_{min}/J permettra de juger si le signal n'est pas trop déformé par la transmission. D'autre part, l'affaiblissement moyen φ_0 et la durée de propagation θ se trouvent définis par notre calcul pour tous les signaux ayant une distribution spectrale $|A(f)|^2$ donnée.

Les formules (27) et (28) montrent que φ_0 est compris entre le maximum et le minimum de l'affaiblissement φ_1 dans la bande de fréquence considérée, et que θ est compris entre τ_{max} et τ_{min}. On peut vérifier sur l'exemple que nous avons donné au paragraphe 2 que la distorsion définie par le rapport I_{min}/J peut rester faible alors que l'écart $\tau_{max} - \tau_{min}$ est assez important.

Dans le cas où on se préoccupe de la transmission non pas d'un signal, mais d'une modulation, il n'est plus nécessaire de supposer n entier. En effet, la démodulation, permettant d'ajouter ou de retrancher une même fréquence et une même phase à toutes les composantes de Fourier de l'onde modulée, pourra faire disparaître la partie fractionnaire de n au moment de la reconstitution du signal. Il suffit alors d'ajouter la condition $\partial I/\partial n = 0$.

Dans la théorie de l'information, on considère des signaux émis de façon ininterrompue de sorte que les intégrales figurant dans (20) divergent. En supposant y(t) réel, il suffit alors de remplacer J par la valeur moyenne du carré du signal

$$\overline{y(t)}^2 = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2(t) dt \tag{29}$$

I par la valeur moyenne du carré de $u(t)$, et $|A(f)|^2$ par la densité spectrale $G(f)$ définie par

$$G(f) = \lim_{T=\infty} \frac{|A_T(f)|^2}{T}$$

avec

$$A_T(f) = \int_{-T}^{+T} y(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt$$

La relation

$$\overline{y(t)}^2 = \int_0^{\infty} G(f)df$$

remplace (20), et permet de reprendre les calculs précédents et d'en garder les conclusions.

Nous devons enfin répondre à l'objection que la limitation de $\int u^2(t)dt$ ou de $\overline{u^2(t)}$ n'entraîne pas une limitation de u . On peut en effet imaginer que u est presque nul la plupart du temps et prend des valeurs très importantes pendant des intervalles de temps très courts. Mais il est à peu près évident que les signaux $y(t)$ correspondant ne seront que l'exception parmi les signaux ayant une répartition spectrale donnée. Si par exemple les valeurs instantanées de $y(t)$ obéissent à une loi de probabilité normale autour de la valeur moyenne $\overline{y(t)} = 0$, la probabilité pour que $|u(t)|$ dépasse $5\sqrt{\overline{u^2}}$ est inférieure à 7×10^{-7} .

4. Conclusion.

Ainsi lorsque les conditions très strictes relatives aux paquets d'ondes ne sont pas remplies, la transmission d'un signal peut rester assez bonne pour que le signal reste reconnaissable. Bien entendu, dans le cas d'un paquet d'ondes, le temps θ que nous définissons par les conditions $\frac{\partial I}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial I}{\partial \theta} = 0$ coïncide avec la durée de trajet de groupe pour la fréquence moyenne de la bande. Mais ce temps θ , qui représente la durée de propagation du signal reste défini alors même que la durée de trajet de groupe ne l'est plus.