Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

P. Roussopoulos

Sur les processus non stationnaires en mécanique ondulatoire

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 26 (1956-1957), exp. nº 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1956-1957__26__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 10

SUR LES PROCESSUS NON STATIONNAIRES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(Exposé de P. ROUSSOPOULOS, le 19 février 1957)

1.- L'équation qui définit la variation du vecteur d'état en représentation d'interaction [1] s'écrit, pour $t > 0$:

(1) $$i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H(t)\Phi(t) \quad , \text{ avec } \quad \Phi(0) = \Phi_0 \quad \text{(état initial)} \ , \quad \text{et}$$

(2) $$H(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) H \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right)$$

Soient g_A^0 , E_A , les fonctions et valeurs propres de H_0 (Hamiltonien libre) ; $H_{A|B} = \langle H g_B^0 | g_A^0 \rangle$, les éléments de matrice de H (Hamiltonien d'interaction) dans la représentation où H_0 est diagonal.

Posons $b_A(t) = \langle \Phi(t) | A \rangle$, $\lambda_A = \langle \Phi_0 | A \rangle$.

(1) est alors équivalente, pour $t > 0$, au système d'équations intégrales :

(3) $$b_A(t) = \lambda_A + \frac{1}{i\hbar} \sum_B H_{A|B} \int_0^t \exp(i\omega_{AB} t') b_B(t') dt'$$

avec $\omega_{AB} = \frac{1}{\hbar}(E_A - E_B) = \omega_A - \omega_B$.

Considérons alors les fonctions $\tilde{b}_A(t)$ (solutions retardées), définies (pour t positif ou négatif) par :

(4) $$\tilde{b}_A(t) = \lambda_A \eta(t) + \frac{1}{i\hbar} \sum_B H_{A|B} \int_{-\infty}^t \exp(i\omega_{AB} t') b_B(t') dt'$$

avec $\eta(t)$ égal à 1 pour $t > 0$ et à zéro pour $t < 0$.

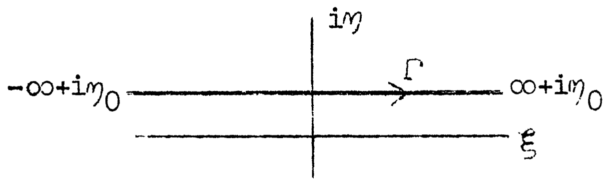
Il est facile de voir que $\tilde{b}_A(+0) - \tilde{b}_A(-0) = \lambda_A$; d'autre part $b_A(-\infty) = 0$. Donc, comme (4) conserve la norme $\sum_A |\tilde{b}_A(t)|^2$ aussi bien pour $t < 0$ que pour $t > 0$, il résulte $\tilde{b}_A(t) = 0$ pour $t < 0$, $\tilde{b}_A(t) = b_A(t)$ pour $t > 0$.

Considérons alors les fonctions $\mathcal{E}_A(\zeta)$ de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$, que nous supposerons holomorphes sur le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$, privé de l'axe réel, et telles que $|\mathcal{E}_A(\zeta)| \to 0$ au moins comme $|\zeta|^{-1}$ pour $|\zeta| \to \infty$.

Nous chercherons la solution de (4) sous la forme :

$$\tilde{b}_A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{E}_A(\zeta)\, e^{-i\zeta t}\, d\zeta \tag{5}$$

Γ étant le chemin d'intégration indiqué ci-dessous ($\eta_0 > 0$) :



Pour $t < 0$, $|e^{-i\zeta t}| = e^{\eta t} \to 0$ lorsque $|\zeta| \to \infty$ avec $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$, donc $\int_\Gamma \mathcal{E}_A(\zeta) e^{-i\zeta t}\, d\zeta = 0$. (5) satisfait donc automatiquement au système (4) pour $t < 0$. Pour $t > 0$, (4) s'écrit, en tenant compte de (5) :

$$(6)\quad \int_\Gamma \mathcal{E}_A(\zeta) e^{-i\zeta t}\, d\zeta = 2\pi i \lambda_A \eta(t) + \frac{1}{i\hbar}\sum_B H_{A|B}\int_\Gamma \mathcal{E}_B(\zeta) d\zeta \int_0^t \exp i(\omega_{AB}-\zeta)t'\, dt' = \ldots$$

$$\ldots = 2\pi i \lambda_A \eta(t) + \frac{1}{i\hbar}\sum H_{A|B}\int_\Gamma \mathcal{E}_B(\zeta)\frac{\exp i(\omega_{AB}-\zeta)}{i(\omega_{AB}-\zeta)} - \frac{1}{i\hbar}\sum_B H_{A|B}\int_\Gamma \mathcal{E}_B(\zeta)\,\frac{d\zeta}{i(\omega_{AB}-\zeta)}$$

La seconde intégrale du second membre de (6) est nulle, cela découle des hypothèses admises sur les $\mathcal{E}_A(\zeta)$.

D'autre part $\eta(t) = \frac{-1}{2\pi i}\int \frac{d\zeta}{\zeta} e^{-i\zeta t}$. Il en résulte que (6) peut s'écrire :

$$\int_\Gamma e^{-i\zeta t}\left\{\mathcal{E}_A(\zeta) + \frac{1}{\zeta}\left[\lambda_A - \frac{1}{\hbar}\sum_B H_{A|B}\mathcal{E}_B(\zeta+\omega_{AB})\right]\right\} d\zeta = 0$$

d'où l'on tire :

(7) $$-\mathcal{E}_A(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\,(\lambda_A - \frac{1}{\hbar}\sum_B H_{A|B}\ \mathcal{E}_B(\zeta+\omega_{AB}))$$

Nous constatons que ces équations ne contredisent pas les hypothèses admises sur les fonctions $\mathcal{E}_A(\zeta)$

Posons maintenant $\mathcal{E}_A(\zeta+\omega_{0A}) = \sigma_A(\zeta)$ $(\omega_0 = \frac{E0}{\hbar}$, E_0 énergie de l'état initial Φ_0).

(8) $$-\sigma_A(\zeta) = (\zeta+\omega_{0A})^{-1}\,(\lambda_A - \frac{1}{\hbar}\sum_B H_{A|B}\sigma_B(\zeta))$$

Soit $\sigma(\zeta) = \sum_A g_A^0 \sigma_A(\zeta)$ le vecteur d'état défini par les $\sigma_A(\zeta)$.

(8) nous donne :

(9) $$-\sigma(\zeta) = (\zeta+\omega_0 - \bar{H}_0)^{-1}\left\{\sum_A g_A^0\,(\lambda_A - \sum_B \bar{H}_{A|B}\sigma_B(\zeta))\right\}$$

$$= (\zeta+\omega_0 - \bar{H}_0)^{-1}\left\{\Phi_0 - \bar{H}\sigma(\zeta)\right\} \quad , \text{ avec}$$

$$\hbar\bar{H}_0 = H_0 \quad , \quad \hbar\bar{H} = H\,.$$

(9) peut aussi s'écrire :

$$-\sigma(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\Phi_0 - (\zeta+\omega_0 - \bar{H}_0)^{-1}H\sigma(\zeta)$$

soit, en posant $-\zeta\sigma(\zeta) = \alpha(\zeta)$:

(10) $$\alpha(\zeta) = \Phi_0 + (\zeta+\omega_0 - \bar{H}_0)^{-1}\bar{H}\alpha(\zeta)$$

(10) est une équation définissant un processus de diffusion. Le vecteur d'état (fonction d'onde) $\alpha(\zeta)$ est fonction d'un paramètre complexe $\zeta = \xi + i\eta$. L'inverse $(\zeta+\omega_0 - \bar{H}_0)^{-1}$ existe toujours pour $\mathrm{Im}(\zeta) \neq 0$, H_0 étant hermitien. En tenant compte de nos définitions :

(11) $\mathcal{E}_A(\zeta+\omega_{0A}) = \sigma_A(\zeta)$, $-\zeta\sigma(\zeta) = \alpha(\zeta)$, (5) nous donne :

$$\tilde{b}_A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{E}_A(\zeta+\omega_{0A})e^{-i(\zeta+\omega_{0A})t}\,d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{-i(\zeta+\omega_{0A})t}\alpha_A(\zeta)$$

Soit encore, en tenant compte de la définition des $b_A(t)$, et pour $t > 0$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{-i(\zeta+\omega_0-\bar{H}_0)t}\alpha(\zeta) \tag{12}$$

Il est facile de voir que (12) vérifie pour $t \to +0$ la condition initiale $\Phi(+0) = \Phi_0$.

En effet, elle s'écrit aussi :

$$e^{i\omega_{0A}t}\langle\Phi(t)|A\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{-i\zeta t}\langle\alpha(\zeta)|A\rangle$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{-i\zeta}\langle\alpha(\varepsilon\zeta)|A\rangle$$

avec $\varepsilon = \frac{1}{t}$ et $\Gamma' = \xi + i\eta_0 t$, $-\infty \leqslant \xi \leqslant \infty$

Nous pouvons intégrer sur $\Gamma = \xi + i\eta_0$, d'après les propriétés des $\mathcal{E}_A(\xi)$, ce qui donne :

$$e^{i\omega_{0A}t}\langle\Phi(t)|A\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{-i\zeta}\langle\alpha(\varepsilon\zeta)|A) \tag{13}$$

Or, (10) donne pour $|\zeta| \to \infty$, $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$: $\alpha(\zeta) \to \Phi_0$; (13) permet donc d'écrire pour $t \to +0$ ($\varepsilon \to +\infty$) :

$$\lim_{t\to+0} e^{i\omega_{0A}t}\langle\Phi(t)|A\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\,e^{-i\zeta}\langle\Phi_0|A\rangle = \langle\Phi_0|A\rangle$$

(13), qui est générale, nous permettra d'ailleurs de chercher $\langle\Phi(t)|A\rangle$ pour $t \to +\infty$, lorsque cette limite aura un sens. Nous verrons par la suite que, avec certaines hypothèses de convergence, nous pouvons retrouver les résultats de Lippmann et Schwinger [2], Heitler-Ma [3], Arnous-Ziennau [4], Arnous-Bleuler [5], Arnous-Heitler [6], et justifier ainsi leur réussite selon la nature du problème (théorie des collisions en mécanique ondulatoire non relativiste, pour Lippmann-Schwinger, électro-dynamique quantique pour Arnous-Heitler).

Ces hypothèses seraient d'ailleurs inutiles si l'on pouvait discuter directement l'équation (10).

2.- Le formalisme de Schwinger-Lippmann.

Supposons maintenant que $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \alpha(\varepsilon\zeta)$ existe lorsque $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$, et soit β cette limite :

(14) $$\lim_{\varepsilon \to +0} \alpha(\varepsilon\zeta) = \beta$$

L'équation (10) nous donne, par application formelle du théorème des limites :

(15) $$\beta = \Phi_0 - 2\pi i \delta_+ (\omega_0 - \bar{H}_0)\, \bar{H}\beta \quad , \text{ avec}$$

(16) $$\lim_{\varepsilon \to +0} (\varepsilon\zeta + \omega_0 - \bar{H}_0)^{-1} = - 2\pi i \delta_+ (\omega_0 - \bar{H}_0)$$

(15) est l'équation intégrale de Lippmann-Schwinger [2], [7], qui se réduit d'ailleurs dans les cas simples de la théorie des collisions à l'équation intégrale de Born.

D'autre part, (13) donne pour $t \to +\infty$ ($\varepsilon \to +0$) :

$$|\langle \Phi(t) | A \rangle|^2_{t \to +\infty} = \Big| - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} e^{-i\zeta} \langle \alpha(\varepsilon\zeta) | A \rangle \Big|^2_{\varepsilon \to +0} = |\langle \beta | A \rangle|^2$$

(La contribution de l'intégrale pour des grandes valeurs de $|\zeta|$ est petite à cause de la présence du facteur ζ^{-1} sous le signe $\int_{\Gamma}$)

En tenant compte de (15), nous avons ($A \neq 0$)

$$\langle \beta | A \rangle = - 2\pi i \delta_+ (\omega_{0A}) \langle \bar{H}\beta | A \rangle$$

et en prenant $|\delta_+ (\omega_{0A})|^2 = 2\pi t\, \delta(\omega_{0A})$

nous trouvons ($A \neq 0$) :

(17) $$\frac{d}{dt} |\langle \Phi(t) | A \rangle|^2_{t \to +\infty} = 2\pi \delta(\omega_0 - \omega_A) |\langle \bar{H}\beta | A \rangle|^2$$

C'est bien le résultat de Schwinger et Lippmann. Nous pouvons donc conclure que ce formalisme n'est valable que tant que la solution de l'équation correcte (10) vérifie (14).

Ceci dépend évidemment de la nature du problème (c'est-à-dire des propriétés analytiques de H et H_0). Nous pouvons d'ailleurs remplacer (14) par d'autres conditions de convergence, plus larges.

Nous retrouverons ainsi les résultats de [4], [5], [3], regroupés d'ailleurs et perfectionnés dans le travail d'Arnous-Heitler [6], et qui permettent de rendre compte de l'épaisseur des raies spectrales et des phénomènes d'"affaiblissement".

3.- Les formalismes du type Arnous-Heitler.

L'équation (10) nous donne, par multiplication à gauche par $(\zeta+\omega_0-\bar{H}_0)^{-1}$:

$$(18) \qquad (\zeta+\omega_0-\bar{H}_0-\bar{H})\alpha(\zeta)=\zeta\Phi_0$$

(équation de Schrödinger non homogène ; le vecteur d'état est fonction du paramètre complexe ζ. La non homogénéité de cette équation traduit le fait que nous avons affaire à un problème essentiellement non stationnaire). Comme l'inverse $(\zeta-\bar{H}_0-\bar{H})^{-1}$ existe toujours pour $\mathrm{Im}(\zeta)\neq 0$, nous tirons de (18), en posant $L(\zeta)=(\zeta-\bar{H}_0-\bar{H})^{-1}$, et en tenant compte de (12) :

$$(19) \qquad \Phi(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\zeta\, e^{-i(\zeta+\omega_0-\bar{H}_0)t}\, L(\zeta+\omega_0)\Phi_0$$

Décomposons maintenant L en parties diagonale et non diagonale (dans la représentation où H_0 est diagonale) :

$$(20) \qquad L(\zeta)=L_d(\zeta)+L_{nd}(\zeta)$$

Supposons que la partie diagonale $L_d(\zeta)$ possède un inverse L_d^{-1} (cette hypothèse sera par la suite sans importance). Posons alors par définition :

$$(21) \qquad L_d^{-1}\,L_{nd}\,L_d^{-1}=R(\zeta)$$

Par sa définition même, $R(\zeta)$ ne possède pas d'éléments diagonaux :

$$R=R_{nd}$$

(20) peut donc s'écrire :

$$L = L_d + L_d R L_d \tag{22}$$

(décomposition symétrique de Bleuler [6] . En posant :

(23) $\quad L_d R(\zeta) = (\zeta - \bar{H}_0)^{-1} \bar{R}(\zeta) L_d \qquad ((\zeta - \bar{H}_0)^{-1}$ existe toujours pour $\mathrm{Im}(\zeta) \neq 0)$, (22) peut s'écrire aussi :

$$L = L_d + (\zeta - \bar{H}_0)^{-1} \bar{R}(\zeta) L_d \qquad ([5], [6]) \tag{24}$$

Il est facile d'établir une équation intégrale vérifiée par $\bar{R}$: multiplions (24) à gauche par $(\zeta - \bar{H}_0 - \bar{H})$, à droite par L_d^{-1} :

$$L_d^{-1} = \zeta - \bar{H}_0 - \bar{H} + \bar{R}(\zeta) - \bar{H}(\zeta - \bar{H}_0)^{-1} \bar{R}(\zeta) \tag{25}$$

En égalant dans (25) les parties diagonales et les parties non diagonales nous tirons :

$$L_d^{-1} = \zeta - \bar{H}_0 + \tfrac{1}{2} i \Gamma(\zeta) \tag{26}$$

avec

$$\frac{1}{2i} \Gamma(\zeta) = [\bar{H} + \bar{H}(\zeta - \bar{H}_0)^{-1} \bar{R}(\zeta)]_d \quad \text{et}$$

$$\bar{R}(\zeta) = [\bar{H} + \bar{H}(\zeta - \bar{H}_0)^{-1} \bar{R}(\zeta)]_{nd} \tag{27}$$

(27) est une équation du type de Heitler ; l'opérateur non diagonal $\bar{R}$ est fonction du paramètre complexe ζ .

L_d étant défini par son inverse (formule (26)) nous n'avons pas à nous préoccuper de l'existence de L_d^{-1} qui nous a permis d'écrire (20). Naturellement, il faudra prendre soin de vérifier que L_d ne possède pas de pôles sur le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ privé de l'axe réel (propriétés des $\mathcal{E}_A(\zeta)$!) . D'après la formule (26) il suffit de vérifier que la partie hermitienne de $\Gamma(\zeta)$ est définie positive. Ceci a été démontré par Arnous-Ziemmau [5] dans le cas particulier où $\zeta = i\varepsilon$ avec $\varepsilon \to +0$. Il suffit de reprendre leur démonstration pour ζ quelconque $\neq 0$:

Posons donc : (28) $\Delta(\zeta) = \bar{H} + \bar{H}(\zeta - \bar{H}_0)^{-1}\,\bar{R}(\zeta)$

(26) et (27) nous donnent :

(29) $$\Gamma(\zeta) = 2i\,[\Delta(\zeta)]_d$$

(30) $$\bar{R}(\zeta) = [\Delta(\zeta)]_{nd}$$

Il en résulte :

$$2R_e\Gamma(\zeta) = 2i\,[\Delta(\zeta) - \Delta^+(\zeta)]_d$$

(R_eA : partie hermitienne de A) et, d'après (28) :

$$R_e\Gamma(\zeta) = i\,[\bar{H}\,(\zeta - \bar{H}_0)^{-1}\,\bar{R}(\zeta) - \bar{R}^+(\zeta)\,(\zeta^* - \bar{H}_0)^{-1}\,\bar{H}\,]_d$$

Or, $$-\,i\bar{R}^+(\zeta)\,(\zeta^* - \bar{H}_0)^{-1}\Delta(\zeta) + i\Delta^+(\zeta)\,(\zeta - \bar{H}_0)^{-1}\,\bar{R}(\zeta) = \dots$$

$$\dots = -\,i\bar{R}^+(\zeta)\,(\zeta^* - \bar{H}_0)^{-1}\,\bar{H} + i\bar{H}\,(\zeta - \bar{H}_0)^{-1}\bar{R}(\zeta)$$

donc : $$R_e\Gamma(\zeta) = i\,[\Delta^+(\zeta)\,(\zeta - H_0)^{-1}\bar{R}(\zeta) - \bar{R}^+(\zeta)\,(\zeta^* - \bar{H}_0)^{-1}\Delta(\zeta)]_d$$

et comme les parties diagonales de Δ (Δ^+) donnent zéro, il vient :

$$R_e\Gamma(\zeta) = i\,[R^+(\zeta)\,[(\zeta - \bar{H}_0)^{-1} - (\zeta^* - \bar{H}_0)^{-1}]R(\zeta)]_d$$

soit

(31) $$R_e\Gamma(\zeta) = \left\{ R^+(\zeta)\,\frac{2\eta}{(\xi - \bar{H}_0)^2 + \eta^2}\,R(\zeta)\right\}_d \quad ,$$

avec $\zeta = \xi + i\eta$.

Si donc $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ $(\eta > 0)$, $\dfrac{2\eta}{(\xi - \bar{H}_0)^2 + \eta^2}$ est défini positif,

ce qui prouve que $R_e\Gamma(\zeta)$ l'est aussi.

4.- Les formalismes du type Arnous-Heitler (suite) :

Pour retrouver maintenant les résultats d'Arnous-Heitler [6] , il suffit (la condition est d'ailleurs nécessaire) de supposer que $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \bar{R}(\varepsilon\zeta + E)$ avec E réel et $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ existe quel que soit E :

(32) $$\lim_{\varepsilon \to +0} \bar{R}(\varepsilon\zeta + E) = U(E)$$

Nous trouvons alors, à partir de (27), par passage à la limite et en posant $\lim_{\varepsilon \to +0} (\varepsilon \zeta + E - \bar{H}_0)^{-1} = -2\pi i \delta_+(E - \bar{H}_0)$, l'équation suivante pour U(E) :

(33) $$U(E) = [\bar{H} - 2\pi i \bar{H} \delta_+(E - \bar{H}_0) U(E)]_{nd}$$

c'est l'équation de Heitler.

Nous aurons de même les définitions suivantes :

(34) $$\frac{1}{2i} \Gamma(E) = [\bar{H} - 2\pi i \bar{H} \delta_+ (E - H_0) U(E)]_d$$

(35) $$N(E) = \lim_{\varepsilon \to +0} L_d(\varepsilon \zeta + E) = \left\{ E - \bar{H}_0 + \frac{1}{2}i \Gamma(E) \right\}^{-1}$$

D'autre part, nous tirons de (19) et (24) :

(36) $$\Phi(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\zeta \, e^{-i(\zeta + \omega_0 - \bar{H}_0)t} \Big\{ L_d(\zeta + \omega_0) + (\zeta + \omega_0 - H_0)^{-1} \bar{R}(\zeta + \omega_0) \ldots\ldots L_d(\zeta + \omega_0) \Big\} \bar{\Phi}_0$$

(formule indépendante de (32)), soit encore ($A \neq 0$) :

(37) $$\langle \Phi(t) | A \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta + \omega_{0A}} e^{-i(\zeta + \omega_{0A})t} \langle \bar{R}(\zeta + \omega_0) L_d(\zeta + \omega_0) \bar{\Phi}_0 | A \rangle$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} e^{-i\zeta t} \langle \bar{R}(\zeta + \omega_A) L_d(\zeta + \omega_A) \bar{\Phi}_0 | A \rangle$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} e^{-i\zeta} \langle \bar{R}(\varepsilon\zeta + \omega_A) L_d(\varepsilon\zeta + \omega_A) \bar{\Phi}_0 | A \rangle$$

$(\varepsilon = \frac{1}{t})$

Il résulte donc, si l'on tient compte de (32) que pour $t \to +\infty$ $(\varepsilon \to +0)$:

$$\langle \Phi(t) | A \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} e^{-i\zeta} \langle U(\omega_A) N(\omega_A) \bar{\Phi}_0 | A \rangle$$
$$= \langle U(\omega_A) N(\omega_A) \bar{\Phi}_0 | A \rangle$$

ce qui nous donne, en définitive :

$$(38) \qquad \langle \Phi(t)|A\rangle_{t\to+\infty} = \frac{U_{A|0}(\omega_A)}{\omega_A-\omega_0+\frac{1}{2}i\Gamma_{0|0}(\omega_A)}$$

C'est le résultat d'Arnous-Ziennau [5], [6].

Nous pouvons remarquer que (32) suffit pour arriver au résultat (38). [Dans [5] et [6], les auteurs utilisent constamment la formule

$$(t\to+\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-itx}\, \delta_+(x)\, F(x) = F(0)$$, vraie <u>probablement</u> si $F(x)$ est régulière.]

Dans [6], les auteurs considèrent aussi la décomposition symétrique (22) où intervient l'opérateur $R(\zeta)$

Nous pouvons retrouver leur résultat en supposant (à la place de (32)) que :

$$(39) \qquad \lim_{\varepsilon\to+0} R(\varepsilon\zeta+E) = U^S(E)$$

existe pour $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ et E réel.

(37) nous aurait donné alors ($A \neq 0$) :

$$\langle \Phi(t)|A\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varepsilon\, d\zeta}{\varepsilon\zeta+\frac{1}{2}\Gamma_{A|A}(\varepsilon\zeta+\omega_A)}\, e^{-i\zeta}\, \frac{R_{A|0}(\varepsilon\zeta+\omega_A)}{\omega_A-\omega_0+\varepsilon\zeta+\frac{1}{2}\Gamma_{0|0}(\varepsilon\zeta+\omega_A)}$$

$(\varepsilon = \frac{1}{t})$, ce qui donne pour $t\to+\infty$ $(\varepsilon\to+0)$

$$\langle \Phi(t)|A\rangle_{t\to+\infty} = 0 \quad , \quad \text{sauf si } A = F \text{ tel}$$

que $\Gamma_{F|F}(\omega_F) = 0$ (état fondamental), et alors

$$(40) \qquad \langle \Phi(t)|A\rangle_{t\to+\infty} = \frac{U^{(S)}_{F|0}(\omega_F)}{\omega_F-\omega_0+\frac{1}{2}i\Gamma_{0|0}(\omega_F)}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHWINGER, J. -Phys. Rev., 73, 1948, p. 416.

[2] SCHWINGER, J. et LIPPMANN, B. - Phys. Rev., 79, 1950, p. 469.

[3] HEITLER, W. et MA, S.T. -Proc. Roy. Ir. Acad., 52, 1949, p. 109.

[4] ARNOUS, E. et ZIENAU, S.-Helv. Phys. Acta, 24, 1951, p. 279.

[5] ARNOUS, E. et BLEULER, K.-Helv. Phys. Acta, 25, 1952, p. 581.

[6] ARNOUS, E. et HEITLER, W.-Proc. Roy. Soc. 220, 1953, p. 290.

[7] ARNOUS, E. - Helv. Phys. Acta, 25, 1952, p. 631.