R. Potier

Sur la double covariance (quantique et relativiste) dans la seconde quantification

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 26 (1956-1957), exp. nº 1, p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1956-1957__26__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 1

SUR LA DOUBLE COVARIANCE (quantique et relativiste) DANS LA SECONDE QUANTIFICATION

(Exposé de R. POTIER, les 6 et 13.11.1956)

INTRODUCTION.

Basées sur le développement d'une analogie formelle avec la Mécanique Analytique classique, les présentations couramment admises de la seconde quantification ont une caractéristique commune : l'extrême imprécision de la définition des êtres mathématiques employés. C'est ainsi qu'à défaut d'un mode de construction concret des vecteurs d'état et des opérateurs impliqués dans cette théorie, on est en droit de douter de leur existence. Cette situation serait sans doute supportée sans scrupules excessifs par de nombreux physiciens, si elle n'avait pas une conséquence fâcheuse : l'absence totale de rigueur à la base fait que les calculs ne donnent que peu de prise à la critique. Par là s'évanouit l'espoir de serrer de près les causes des contradictions internes de la théorie quantique des champs.

A la suite des travaux de M. O. Costa de Beauregard [2], qui, dans le cadre de la Mécanique Ondulatoire non superquantifiée, donnaient explicitement du formalisme quantique une expression covariante relativiste, nous nous sommes proposé [9] d'étendre leurs résultats à la seconde quantification.

Ainsi que nous l'avons montré, une voie simple pour le faire est de tout baser sur une nouvelle notion de covariance, que nous appellerons la covariance quantique, et dont les effets se superposent à ceux de la covariance relativiste. Le groupe de transformations par rapport auquel se définit la covariance quantique n'est pas le groupe de Lorentz, mais le groupe linéaire des changements de base dans l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes non superquantifiées.

L'introduction de la covariance quantique permet de construire de manière précise le vecteur d'état d'un système et les opérateurs intervenant dans les fonctions d'onde superquantifiées. Elle conduit à déterminer la forme de l'équation d'évolution. Le présent article a pour but de tracer dans cet esprit un cadre général pour la théorie quantique des champs. Signalons que, postérieurement à nos notes déjà citées [9] , M. Daniel Kastler [6] et M. Jauch [4] ont publié des travaux effectués dans la même direction.

Mouvement d'une particule :

1.- Aspect cinématique et aspect dynamique.

a) En mécanique classique le rapport existant entre une particule P et l'espace-temps de Minkowski est donné par un instant-point. Cet instant-point est l'extrémité d'un quadrivecteur X dont l'origine est celle des axes de coordonnées. Le groupe définissant la géométrie dans l'espace de Minkowski est le groupe de Lorentz agissant sur les quadrivecteurs tels que X . Le mouvement de P est donné par une famille de quadrivecteurs à un paramètre $X(\tau)$. Tel est l'aspect cinématique classique du problème de la particule matérielle.

L'aspect dynamique apparait quand on tente de déterminer $X(\tau)$, on suppose alors que $X(\tau)$ satisfait à une certaine équation différentielle, dont la forme doit être insensible aux transformations de Lorentz. C'est la Covariance Relativiste.

b) En mécanique ondulatoire, le rapport existant entre une particule P et l'espace-temps de Minkowski est donné par la fonction d'onde de M. Louis de Broglie (ou, s'il y a spin, par un ensemble de fonctions d'ondes). Le vecteur Ψ représentant la particule n'appartient plus à l'espace de Minkowski, mais à l'espace fonctionnel des solutions de l'équation des ondes, qui est un espace de Hilbert (H). Dans (H) , on peut prendre un système infini de fonctions de base ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n, et poser :

$$\psi = \Psi^1 \psi_1 + \Psi^2 \psi_2 + \dots + \Psi^n \psi_n + \dots\dots \tag{1}$$

Ψ^1, Ψ^2, ..., Ψ^n, ... sont les composantes contrevariantes de Ψ .

Quand le système de base ψ_i est changé selon

$$\psi'_i = s_i^k \psi_k \tag{2}$$

(s_i^k matrice bornée ayant une inverse bornée et une seule)

Les composantes se transforment d'après :

(3) $$\Psi^{i} = s^{i}_{k}\,(\Psi^{k})'$$

La géométrie est définie dans (H) par le groupe G des transformations linéaires conservant les produits scalaires et les normes des fonctions.

Sous l'action de causes extérieures la particule P peut effectuer des transitions. Elle n'est pas, alors, représentée par une fonction, mais par une famille de vecteurs $\Psi_{(\tau)}$ (c'est-à-dire une famille à un paramètre de vecteurs de l'espace de Hilbert). τ est un paramètre d'évolution, qui peut être le paramètre d'une famille d'hypersurfaces du genre espace.

On voit que l'aspect cinématique du problème de la particule P est, en mécanique quantique très analogue à ce qu'il est en mécanique classique, à ceci près que les vecteurs $\Psi_{(\tau)}$ appartiennent à (H) , et non plus à l'espace de Minkowski.

Pour passer au point de vue dynamique, on astreindra la famille $\Psi_{(\tau)}$ à satisfaire à une équation d'évolution dont la forme devra être insensible aux changements de base définis par l'équation (2). C'est ce que nous appellerons la covariance quantique.

La Covariance Quantique est compatible avec la Covariance Relativiste. En effet, de la définition (1) il résulte que les composantes Ψ^{i} sont des invariants relativistes, quelle que soit la nature tensorielle (ou spinorielle) de la fonction ψ . De même pour une raison analogue les s^{k}_{i} de la formule (2) sont aussi des invariants relativistes. D'autre part, il a été prouvé ([2],[7]) que la métrique dans l'espace (H) peut être, par un choix convenable du produit scalaire de deux fonctions d'ordre, rendue invariante relativiste. Le vecteur d'état Ψ et son opérateur de transformation s^{k}_{i} étant des invariants relativistes, les opérateurs agissant sur Ψ devront, dans l'équation d'évolution, être combinés de façon à former des invariants relativistes. Il s'ensuit que le groupe G est insensible aux transformations de Lorentz agissant sur les repères de l'espace de Minkowski.

On peut interpréter les changements de base dans (H) comme des changements de représentation. En effet, il est d'usage de choisir une collection de grandeurs (par exemple : énergie, moment angulaire total, moment angulaire en projection) dont chaque ensemble possible de valeurs quantifiées (définies à l'aide des nombres quantiques correspondants) est associé à une certaine fonction d'onde ψ_i .

Les ψ_i forment un système de base dans (H) qui n'est pas toujours complet, mais qu'on peut compléter. Imposer la covariance quantique de la théorie revient à dire que la forme de l'équation d'évolution ne doit pas dépendre de la représentation, (c'est-à-dire de la collection de grandeurs choisie).

2.- Les Vecteurs de l'espace (H)

Si nous posons :

$$g_{k^*h} = \langle \psi_k \mid \psi_h \rangle = \iiint_\sigma v^\lambda (\bar{\psi}_k, \psi_h)\, d\sigma_\lambda \tag{4}$$

$v^\lambda (\bar{\Phi}, \psi)$ étant le quadrivecteur courant de divergence nulle construit sur les fonctions d'onde Φ et ψ. σ étant une hypersurface du genre espace (de l'espace de Minkowski) nous pouvons former, à partir du vecteur Ψ^i de l'espace (H), une autre quantité à un indice :

$$\Psi_{i^*} = \sum_k g_{i^*k}\, \Psi^k \tag{5}$$

On montre que si les fonctions de base ψ_i subissent la transformation (2) les quantités Ψ_{i^*} sont transformées selon :

$$\Psi'_{i^*} = (s_i^k)^* \Psi_{k^*} \tag{6}$$

Nous pouvons appeler Ψ_{i^*} vecteur covariant conjugué. De même, les quantités Ψ^{i^*} dont la loi de transformation serait :

$$\Psi^{i^*} = (s_k^i)^* \left(\Psi^{k^*} \right)' \tag{7}$$

constitueraient un vecteur contrevariant conjugué, et en posant :

$$\Psi_i = g_{k^*i}\, \Psi^{k^*} \tag{8}$$

On formerait un vecteur covariant, dont la loi de transformation :

$$\Psi'_i = s_i^k\, \Psi_k \tag{9}$$

serait analogue au changement de base (2).

Dans des conditions assez étendues, il est possible d'inverser les formules (5) et (8) selon :

(10) $$\Psi^{i} = g^{k^*i}\,\Psi_{k^*}$$

(11) $$\bar{\Psi}^{i^*} = g^{i^*k}\,\bar{\Psi}_{k}$$

(la matrice g^{i^*j} étant l'inverse de g_{i^*j})

Dans le cas où les vecteurs de base sont orthonormaux, on a :

$$g_{i^*j} = g^{i^*j} = \delta_{ij}$$

Il s'ensuit que (5) et (8) deviennent :

(12) $$\bar{\Psi}^{i} = \Psi_{i^*}$$

(13) $$\bar{\Psi}_{i} = \Psi^{i^*}$$

Dans une base orthonormale, il n'y a plus que deux sortes de vecteurs le passage au conjugué équivaut au passage du covariant au contrevariant, ou vice versa.
Le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit :

(14) $$\langle \Psi \mid \bar{\Phi} \rangle = \Psi^{k}\,\Phi_{k} = \Psi_{k^*}\,\bar{\Phi}^{k^*}$$

En coordonnées orthonormales (14) devient :

(15) $$\langle \bar{\Psi} \mid \bar{\Phi} \rangle = (\bar{\Psi}_{k})^{*}\,\bar{\Phi}_{k}$$

En général, le carré scalaire n'est pas défini positif, si bien qu'on ne peut pas toujours normaliser à $+1$; si l'on pose : $\varepsilon_k = \pm 1 \quad g_{i^*j} = \varepsilon_i\,\delta_{ij}$
on peut en déduire :

(16) $$\langle \bar{\Psi} \mid \bar{\Phi} \rangle = \varepsilon_k\,(\bar{\Psi}_{k})^{*}\,\bar{\Phi}_{k}$$

formule applicable aux métriques indéfinies.

3.- Vecteurs normés. Vecteurs non normés.

Sans entrer dans le détail de la discussion des conditions de convergence des formules que nous venons d'écrire, nous pouvons considérer la formule :

$$\langle \Psi \mid \Psi \rangle = \Psi^k \, \Psi_k \tag{17}$$

qui définit le carré de la norme de Ψ. Si la métrique est définie positive, et la base orthonormale, on a :

$$\langle \Psi \mid \Psi \rangle = (\Psi_k)^* \, \Psi_k \tag{18}$$

Si (18) converge, on dit que Ψ appartient à l'espace (H), ou bien qu'il est normé. Pour de tels vecteurs, il est bien connu que toutes les formules que nous avons écrites ont un sens (les séries qu'elles comportent convergent). On peut étendre cette notion de vecteurs normés aux métriques indéfinies. On distingue en effet, parmi les ε_k de la formule (16) ceux qui sont égaux à + 1, correspondant à des indices i, et ceux qui sont égaux à − 1, correspondant à des indices α, et on écrit :

$$\langle \Psi \mid \Psi \rangle = \Psi_i^* \, \Psi_i - \Psi_\alpha^* \, \Psi_\alpha \tag{19}$$

Ψ sera normé si les deux séries $\Psi_i^* \, \Psi_i$ et $\Psi_\alpha^* \, \Psi_\alpha$ convergent séparément. On sait d'ailleurs, que cette condition doit être posée, si l'on veut que le carré de la norme de Ψ soit indépendant de l'ordre dans lequel on écrit les termes de la série qui le définit. Les résultats établis quant à la convergence des séries dans le cas des vecteurs normés de la métrique définie positive s'étendent aux vecteurs normés des métriques indéfinies.

Il peut présenter un certain intérêt de considérer des vecteurs non normés. Soit, en effet l'ensemble infini de composantes : $\psi_i(x_0)$ constitué par les valeurs que prennent les fonctions de base ψ_i en un même point de l'espace. Plaçons nous, pour fixer les idées, dans le cas où $\psi(x)$ est une fonction de l'espace à 3 dimensions et où le produit scalaire de ψ et de φ est donné par :

$$\iiint \psi^* \, \varphi \, dx\, dy\, dz$$

Les $\psi_i(x_0)$ se transforment dans un changement de base par les formules : (1)

(1) Ces formules sont valables presque partout au sens de Lebesgue. Cf. [5]

$$\psi'_i(x_0) = s_i^k \; \psi_k(x_0)$$

qui convergent, ce qui établit leur caractère vectoriel covariant. Cependant, le carré scalaire de $\psi_i(x_0)$ est : $\psi^k(x_0)\ \psi_k(x_0) = \psi^*_k(x_0)\ \psi_k(x_0)$

Le produit scalaire de $\psi'_k(x_0)$ et de $\psi_k(x_1)$ est donné par :

$$\psi'^*_k(x_0)\ \psi_k(x_1) = \delta(x_0 - x_1) \tag{20}$$

Le carré scalaire de $\psi_i(x_0)$ est donc égal à $\delta(0) = \infty$, le vecteur non normé $\psi_i(x_0)$ a cependant, avec tout vecteur normé X^i un produit scalaire fini (presque partout au sens de Lebesgue).

En effet, si $\sum_i (X_i)^2$ est finie, la série : $X_i\ \psi_i(x_0)$ a pour somme une fonction $F(x_0)$ de carré sommable. Donc le produit scalaire de X_i et de $\psi_i(x_0)$ est fini.

Dans le cas général où les fonctions ψ_i ont une variance tensorielle ou spinorielle quelconque, dans l'espace de Minkowski, soient les composantes d'indice α de ces fonctions $(\psi_i(x_0))_\alpha$. Ces composantes ont par rapport aux changements de base de l'espace (H), la variance d'un vecteur covariant non normé. Si $(\psi_i(x_1))_\beta$ est formé de manière similaire à partir d'un indice β et d'un instant-point x_1, le produit scalaire :

$$S_{\alpha\beta}(x_0, x_1) = (\psi^i(x_0))_\alpha\ (\psi_i(x_1))_\beta \tag{21}$$

est indépendant de la base choisie dans (H). C'est une fonction singulière de x_0 et x_1 qui généralise la fonction δ de Dirac. La formule (21) s'applique dans tous les cas (y compris les métriques indéfinies, et quelle que soit la définition du produit scalaire).

4.- <u>Tenseurs de</u> (H).

Une particule P est représentée par un vecteur Ψ_i de (H). Un système de n particules P, de nature identique, sera représenté par un tenseur à n indices $\Psi_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, de (H). Un tel tenseur aura pour loi de transformation dans un changement de base celle d'un produit général de n vecteurs :

$$(X^{(1)}_{i_1})'\,(X^{(2)}_{i_2})' \dots (X^{(n)}_{i_n})' = s_{i_1}^{k_1}\, s_{i_2}^{k_2} \dots s_{i_n}^{k_n}\, X^{(1)}_{k_1} \dots X^{(n)}_{k_n} \tag{22}$$

$$(23) \qquad \Psi'_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = s_{i_1}^{k_1} s_{i_2}^{k_2} \ldots s_{i_n}^{k_n} \Psi_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

Les formules (22) et (23) définissent des tenseurs à n indices covariants. En remplaçant dans (22) certains des vecteurs covariants par des vecteurs contrevariants, ou par des vecteurs conjugués de covariants ou de contrevariants, on définit des tenseurs plus généraux. Par exemple :

$$(24) \qquad X_i : (Y^j)^*(Z_k)^* \curlyvee \Psi_{i\ \ k^*}^{\ j^*}$$

Dans (24) le signe $\curlyvee$ signifie : "se transforme comme". $\Psi_{i\ \ k^*}^{\ j^*}$ comporte un indice covariant i, un indice covariant conjugué k^* et un indice contrevariant conjugué j^*. La contraction d'un couple d'indices est justifiée formellement par l'expression (14) du produit scalaire de deux vecteurs. D'après les deux formes de cette expression, il est manifeste qu'on ne peut contracter qu'un indice covariant avec le même indice en position contrevariante conjuguée, ou un indice covariant conjugué avec le même indice en position contrevariante conjuguée.

Donc $\Psi^{k\ \ m}_{\ k\cdot \ell^*}$ a la variance $\Psi^{\cdot\cdot m}_{\ell^*}$

et $\Psi^{k^*\ j}_{\ \ k\ \ i^*}$ a la variance $\Psi^{j}_{\ \ i^*}$

Encore faut il que la série qui exprime le tenseur contracté soit convergente. Et pour qu'aucune ambiguité ne subsiste, il est nécessaire qu'elle soit <u>absolument convergente</u>.

On peut définir l'opération d'abaissement ou d'élévation d'un indice par les formules :

$$(25) \qquad \Psi_{i\ \ k^*}^{\ j} = g_{h^*i} \Psi^{h^*j}_{\ \ \ \ \ k^*}$$

$$(26) \qquad \Psi^{i}_{\ j^* k} = g^{h^*i} \Psi_{h^* j^* k^*}$$

Nous voyons, d'après (25) et (26) (qui découlent elles mêmes des règles de contraction des tenseurs) que le fait d'abaisser ou d'élever un indice le transforme en indice conjugué. C'est pourquoi un tenseur ayant tous ses indices de même nature (covariants, par exemple) n'a pas de tenseurs contractés (si on élève un des indices il devient contrevariant conjugué).

<u>Le carré de la norme</u> d'un tenseur $\Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ est l'invariant :

(27) $$|\Psi|^2 = \Psi^{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,\Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

Si la base est orthonormale (cas de la métrique définie positive), on a :

(28) $$|\Psi|^2 = \sum \Psi^*_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,\Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

Si la métrique est indéfinie, et les vecteurs de base orthogonaux et normés à ∓ 1 , on a :

(29) $$|\Psi|^2 = \sum \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,\Psi^*_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,\Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

(avec $\varepsilon = \mp 1$).

on peut user du même artifice de calcul que dans le cas des vecteurs et poser :

(30) $$|\Psi|^2 = \sum \Psi^*_\alpha\,\Psi_\alpha - \Psi^*_\beta\,\Psi_\beta$$

α et β étant certains groupes de n indices i.

Ψ sera dit normé si $\Psi^*_\alpha\,\Psi_\alpha$ et $\Psi^*_\beta\,\Psi_\beta$ convergent séparément.

Le <u>produit général</u> de deux tenseurs $\Psi_i{}^{j^*}{}_k$ et $\Phi_{\ell^* m}$ est le tenseur

$$\Lambda_i{}^{j^*}{}_{k\,\ell^*\,m} = \Psi_i{}^{j^*}{}_k\,\Phi_{\ell^*\,m}$$

On peut montrer, par une voie très analogue à celle qu'on suit dans le cas à nombre fini de dimensions, qu'une quantité $\Psi_i{}^{j^*}{}_k$, telle que

$$\sum_{i,j,k} X^i (Y_j)^*\, Z^k\, \Psi_i{}^{j^*}{}_k$$ soit un invariant quantique quels que soient les

vecteurs arbitraires X, Y et Z , est un tenseur. La variance quantique est définie par la place que nous avons assignée aux indices.

5.- Problèmes de convergence.

Pour que la théorie des tenseurs de l'espace (H) , que nous venons d'esquisser, ait un sens, il convient que toutes les séries figurant dans les formules que nous avons écrites convergent.

Le tenseur fondamentale g_{i^*j} constitue une matrice bornée ayant une inverse bornée. En effet, si s_i^k est la matrice qui permet de passer d'une base orthonormale à la base utilisée, on a :

(31) $$g_{i^*j} = s_i^k \, s_j^k$$

La proposition découle immédiatement de ce que g_{i^*j} apparait comme le produit de deux matrices bornées et ayant des inverses bornées.

LEMME : L'action de matrices bornées sur les indices d'un tenseur normé conduit à un autre tenseur normé.

Montrons le sur un tenseur à deux indices :

Posons :

(32) $$\Phi_{ij} = a_i^h \, b_j^h \, \Psi_{kh}$$

si $$v_{ih} = a_i^k \, \Psi_{kh}$$, on a:

(33) $$\sum_i |v_{ih}|^2 \leqslant A^2 \sum_k |\Psi_{kh}|^2 \qquad (A : \text{norme de } a_i^k)$$

Mais v_{ih} (à i constant) peut être considéré comme un vecteur de (H) , de norme M_i . L'inéquation (33) signifie que :

$$M_1^2 + M_2^2 + \dots + M_i^2 + \dots \leqslant A^2 \sum_{k,h} |\Psi_{kh}|^2$$

Cependant, le fait que b_j^h est normé donne :

(34) $$\sum_j |b_j^h \, v_{ih}|^2 \leqslant B^2 M_i^2$$

Il en résulte que :

$$\sum_i \sum_j |a_i^{\,k}\, b_j^{\,h}\, \Psi_{kh}|^2 \leqslant A^2 B^2 \sum_{k,h} |\Psi_{k,h}|^2 \tag{35}$$

(35) démontre notre lemme.
On voit immédiatement que notre raisonnement peut s'étendre à des quantités à un nombre quelconque d'indices.
Le résultat que nous venons d'obtenir assure la convergence de la série de la formule (23). Un changement de base transforme tout tenseur normé de façon que la somme des carrés des modules de ses composantes reste finie.
En outre si on part, par exemple d'un tenseur covariant dont la somme des carrés des modules des composantes est finie, les formules permettant d'obtenir le tenseur contrevariant (formule du type (26)) convergent, et donnent un tenseur dont la somme des carrés des modules des composantes est finie. Il s'ensuit que la norme, au sens de la formule :

$$|\Psi|^2 = \Psi^{i_1, i_2, \ldots, i_n}\, \Psi_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \tag{27}$$

est elle même finie.

THÉORÈME 1.- Le produit général de deux tenseurs normés est normé et la norme du produit est égale au produit des normes des facteurs. En effet, si

$$\Phi_{i,j,k,\ell} = \Psi_{i,j}\, \Lambda_{k,\ell}$$

on a :

$$\sum_{i,j,k,\ell} |\Phi_{i,j,k,\ell}|^2 = \sum_{i,j} |\Psi_{i,j}|^2 \sum_{k,\ell} |\Lambda_{k,\ell}|^2 \tag{36}$$

Les formules de transformation de $\Phi_{i,j,k,\ell}$ dans un changement de base convergent, par conséquent.

THÉORÈME 2.- Si, dans le produit général de deux tenseurs normés on contracte un indice du premier avec un indice du second, le résultat est encore un tenseur normé.
Soient par exemple $a_i^{\,j}$ et $b_{k,h}$ les tenseurs en question :

formons $C_{ih} = a_i^{\,k}\, b_{kh}$

En vertu de l'inégalité de Schwartz ([5], p. 3) on a :

$$|C_{ih}|^2 \leqslant \sum_j |a_i{}^j|^2 \sum_k |b_{kh}|^2$$

d'où il résulte que :

$$(37) \qquad \sum_{i,h} |C_{ih}|^2 \leqslant \sum_{i,j} |a_i{}^j|^2 \sum_{k,h} |b_{kh}|^2$$

La norme du contracté C_{ih} est au plus égale à la norme du produit général de $a_i{}^j$ et b_{kh}.

Le résultat s'étend de lui même au cas d'un nombre quelconque d'indices.

<u>THÉORÈME 3</u>.- L'opération de contraction sur deux indices d'un même tenseur normé ne donne pas toujours un résultat fini.

En effet, soit, par exemple : $a^j{}_k = \delta_{jk} \frac{1}{k}$

La norme $\sum_{j,k} |a^j{}_k|^2 = \sum_k \frac{1}{k^2}$ est finie.

l'expression du contracté $a_j{}^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ est divergente.

Les résultats que nous venons d'établir justifient le calcul tensoriel dans l'espace (H), sous la condition que les tenseurs soient tous normés. Le dernier de nos théorèmes montre que si nous voulons contracter deux indices d'un même tenseur, une étude spéciale est das chaque cas, indispensable. Cependant la contraction est autorisée s'il existe un produit de vecteurs de même variance, dont les composantes majorent, en module, celles du tenseur.

<u>REMARQUE</u>. Dans ce qui précède, nous avons utilisé le mot "norme" tantôt dans le sens de la formule (27), tantôt dans celui de somme des carrés des modules des composantes. Il est bien évident que seule, la première de ces deux normes est invariante dans les changements de base définis par (2). Les deux définitions sont identiques quand la base est orthonormale. En vertu de notre lemme, nous l'avons vu, l'existence de la norme au second sens entraîne celle de la norme au sens de (27). Cette existence est maintenue dans tout changement de base au type (2), donc elle prend un caractère invariant quantique. Comme les raisonnements sont plus simples avec cette seconde définition de la norme, nous l'employons de préférence pour traiter les questions de convergence.

6.- Systèmes de particules de même nature : Tenseurs symétriques ou antisymétriques.

Pour satisfaire au principe d'indicernabilité des particules de même nature, nous représentons un système de n de ces particules P par un tenseur de (H) à n indices covariants $\Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ complètement symétrique en tous ses indices, ou bien complètement antisymétrique. Nous supposons ce tenseur normé, afin d'être certain de la légitimité des opérations où il sera susceptible d'entrer. En outre, la norme de ce tenseur au sens (27) doit jouer un rôle important dans l'interprétation probabiliste de la théorie.
La création d'une particule P fait passer d'un système de n particules à un système de $n+1$ particules, donc d'un tenseur à n indices covariants à un tenseur à $n+1$ indices covariants. Le moyen le plus simple d'effectuer un tel passage d'une manière covariante quantique est de faire le produit général d'un vecteur covariant X_k par $\Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$. Etant donnée une composante $\Phi_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}$ du tenseur à $n+1$ indices, il y a n manières possibles d'y contribuer, ce qui revient à dire que n produits généraux peuvent être envisagés.

Soit : $\quad X_{i_k} \; \Psi_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\; i_{k+1},\ldots,i_{n+1}} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n+1$

Si notre système est représenté par des tenseurs symétriques (cas des bosons) nous avons nécessairement :

(38) $$\Phi_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = b_{n+1} \sum_k X_{i_k} \Psi_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{n+1}}$$

Si nous employons, au contraire, des tenseurs antisymétriques (cas des fermions), nous devons poser :

(39) $$\Phi_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}} = -\, b'_{n+1} \sum_k (-1)^k X_{i_k} \Psi_{i_1,\ldots,i_{k-1}\; i_{k+1},\ldots,i_{n+1}}$$

Les constantes multiplicatives b_{n+1} et $-b'_{n+1}$ sont jusqu'ici arbitraires.
L'annihilation d'une particule P fait passer d'un système de n particules à un système de $n-1$ particules, donc d'un tenseur à n indices covariants à un tenseur à $n-1$ indices covariants. La manière la plus simple d'y parvenir de

façon covariante quantique est de contracter le tenseur avec un vecteur contrevariant , selon

$$(40) \qquad \Phi_{k_2,\ldots,k_n} = a_n \sum_k Y^k \, \Psi_{k,k_2,\ldots,k_n}$$

La constante a_n étant a priori arbitraire.

En raison de la symétrie, ou de l'antisymétrie du tenseur Ψ la formule (40) est absolument générale.

Les formules (38), (39) et (40) peuvent s'écrire, de manière condensée :

$$(41) \qquad \begin{cases} \Phi_{n+1} = X^+ \Psi_n \\ \bar{\Phi}_{n-1} = Y^- \Psi_n \end{cases}$$

X^+ est l'opérateur de création associé au vecteur covariant X_k .

Y^- est l'opérateur d'annihilation associé au vecteur contrevariant Y^k .

Un système de particules P en nombre indéterminé est représenté par une suite infinie de tenseurs à indices covariants :

$$\Psi_0 \, ; \; \Psi_i \, ; \; \Psi_{i_1,i_2,\ldots} ; \ldots \; \Psi_{i_1, i_2,\ldots, i_n}, \text{ etc } \ldots$$

Ce qui constitue le vecteur d'état Ψ du système

Les opérateurs X^+ et Y^- agissant sur tous les tenseurs de la suite, les coefficients a_n et b_n des formules (38), (39) et (40), jusqu'ici indéterminés jouent un rôle essentiel.

<u>Les relations de commutation</u> contribuent à les fixer.

Si on calcule, en effet, les quantités $[Y^- X^+]_{\mp} \Psi$

où + correspond au cas antisymétrique (anticommutateur) et − au cas symétrique (commutateur), on obtient en général, une expression compliquée, faisant intervenir le produit général des vecteurs Y et X .

Si $a_{n+1} \, b_{n+1} = a_n \, b_n = 1$, cette expression se simplifie beaucoup, et on a :

$$(42) \qquad [Y^- X^+]_{\mp} \Psi = (Y^k X_k) \Psi$$

Nous ne diminuons aucunement la généralité en fixant à 1 la valeur supposée commune des $a_n \, b_n$.

(42) condense une partie des relations de commutation couramment admises dans la théorie de la seconde quantification.

Les autres relations s'écrivent :

$$(45)\quad \begin{cases} [X^+ \; Y^+]_{\mp} = 0 \\ [X^- \; Y^-]_{\mp} = 0 \end{cases}$$

Elles sont indépendantes de la condition $a_n \; b_n = 1$.

La condition de conjugaison hermitienne de X^+ et X^- achève de fixer a_n et b_n . On peut définir le produit scalaire de deux vecteurs d'état Ψ et $\bar{\Phi}$ par :

$$(44)\qquad \langle \Psi | \bar{\Phi} \rangle = \sum_{n,(i_1,i_2,\dots,i_n)} \Psi^{i_1,i_2,\dots,i_n} \; \bar{\Phi}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$$

(44) donne naissance à un invariant quantique. Quand $\Psi = \bar{\Phi}$, on obtient le carré de la norme de Ψ :

$$(45)\qquad \langle \Psi | \bar{\Psi} \rangle = \sum_{n,(i_1,i_2,\dots,i_n)} \Psi^{i_1,i_2,\dots;i_n} \; \Psi_{i_1,i_2,\dots,i_n}$$

(La parenthèse $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ signifie qu'on ne compte qu'une fois une même combinaison de ces indices).

La formule (44) doit comporter comme premier terme $\Psi_0^* \; \Phi_0$ et la formule (45) doit comporter $\Psi_0^* \Psi_0$, Ψ_0 et Φ_0 étant deux invariants à la fois quantiques et relativistes (simples nombres complexes) supposés représenter le vide des particules P .

A partir du vecteur X , on forme, à l'aide de ses composantes covariantes l'opérateur X^+ , et à l'aide de ses composantes contrevariantes, l'opérateur X^- Dire que X^+ et X^- sont hermitiens conjugués revient à écrire la formule :

$$(46)\qquad \langle X^+ \Psi | \bar{\Phi} \rangle = \langle \Psi | X^- \bar{\Phi} \rangle$$

La comparaison de (38), (39), (40), (44) et (46), conduit à :

$$\frac{a_n}{b_n} = n$$

ce qui tenant compte de $a_n \; b_n = 1$, donne :

$$(47) \qquad a_n = \sqrt{n} \qquad\qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

L'hypothèse (47) sur les coefficients a_n et b_n correspond à la théorie classique de la seconde quantification. On voit qu'elle ne s'impose pas du strict point de vue de la covariance quantique.

$\frac{a_n}{b_n}$ est liée à l'hermiticité de l'opérateur d'interaction, elle même nécessaire à la conservation de la probabilité totale au cours du temps. C'est une hypothèse plus utile physiquement que $a_n\, b_n = 1$, qui garantissant la simplicité des relations de commutation, assure l'élégance des conditions d'intégrabilité de l'équation d'évolution. On peut donc - sous réserve d'établir autrement ces dernières conditions - tenter d'édifier une infinité de théories de la seconde quantification, basées chacune sur un certain choix arbitraire des a_n . Nous nous bornerons, pour l'instant, aux valeurs a_n et b_n données par (47).

Examinons les questions de norme.

Un raisonnement dérivé de celui que nous avons fait pour démontrer les théorèmes 1 et 2, paragraphe 5, conduit à :

$$(48) \qquad |X^- \Psi|^2 \leqslant |X|^2 \sum_n n\, |\Psi_n|^2$$

et

$$(49) \qquad |X^+ \Psi|^2 \leqslant |X|^2 \sum_n (n+1)\, |\Psi_n|^2$$

Si X est un vecteur normé, et si tous les Ψ_n sont normés, tous les tenseurs obtenus par $X^-\Psi$ et $X^+\Psi$ sont normés. Mais la somme des carrés de leurs normes n'est pas obligatoirement finie dès que $\sum_n |\Psi_n|^2$ l'est ; comme le montrent les inégalités (48) et (49) où interviennent, dans les termes des séries du second membre, des coefficients n et $n+1$. Si au lieu de (47), nous écrivions, par exemple $a_n = 1$ $b_n = \frac{1}{n}$, nous serions certains que $\sum_n |\Psi_n|^2$ finie entraînerait que

$$|X^- \Psi|^2 \quad \text{et} \quad |X^+ \Psi|^2 \quad \text{sont finies.}$$

Autrement dit si Ψ appartenait à l'espace de Fock [3], X^- et X^+ appartiendrait automatiquement à l'espace de Fock. Cependant, les formules (48) et (49) montrent que, dans des cas très étendus, si $|\Psi_n|^2$ décroît assez vite quand $n \to \infty$ (par exemple plus vite que $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 2$), les quantités $|X^- \Psi|^2$ et $|X^+ \Psi|^2$ sont bien finies . Tout se passe alors dans l'espace de Fock.

Le fait que $\sum_n n\, |\Psi_n|^2 < \infty$ signifie que la valeur moyenne du nombre de particules P est finie. On peut donc énoncer le théorème exprimé par (47) et (48) :

Si la valeur moyenne du nombre de particules est finie, et si le vecteur X est normé, l'action des opérateurs de création ou d'annihilation X^+ ou X^- sur le vecteur d'état donne un nouveau vecteur d'état qui appartient encore à l'espace de Fock.

Développement de X^+ et X^- .

On peut développer X^+ et X^- selon :

$$(50) \qquad \begin{cases} X^+ = \sum_k X_k \, \mathcal{B}(k) \\ X^- = \sum_k X^k \, \mathcal{A}(k) \end{cases}$$

Les $\mathcal{B}(k)$ sont des matrices qui font passer des Ψ_n aux Ψ_{n+1} . Les seuls éléments non nuls de ces matrices sont :

$$(51) \quad \mathcal{B}(k)_{k_1,\dots,k_{i-1},k,k_{i+1},\dots,k_{n+1};k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_{n+1}} = b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dans le cas symétrique.

Dans le cas antisymétrique, le second membre de (51) doit être multiplié par $(-1)^{(i+1)}$. Quant aux $\mathcal{A}(k)$, leurs seuls éléments non nuls sont :

$$(52) \qquad \mathcal{A}(k)_{k_1,\dots,k_n;k\ k_1,\dots,k_n} = a_n = \sqrt{n}$$

Et les relations de commutation (42) et (43) se transforment en :

$$(53) \qquad \begin{aligned} [\,\mathcal{A}(k)\,,\ \mathcal{B}(h)\,]_{\mp} &= \delta_{kh} \\ [\,\mathcal{A}(k)\,,\ \mathcal{A}(h)\,]_{\mp} &= 0 \\ [\,\mathcal{B}(k)\,,\ \mathcal{B}(h)\,]_{\mp} &= 0 \end{aligned}$$

7.- Fonctions d'onde superquantifiées.

Pour former les équations d'évolution d'un système de particules, il convient de construire des opérateurs à signification tensorielle quantique qui, appliqués aux Ψ_n donnent de nouveaux tenseurs quantiques. Les équations d'évolution doivent être écrites entre composantes de même indice de tenseurs de même variance. Les seuls tenseurs dont nous disposions, au départ est le vecteur covariant non normé $\psi_i(x)$ formé par les valeurs de l'ensemble des fonctions de base. Il donne l'opérateur de création :

$$\psi^+ = \sum_k \psi_k(x)\, \mathfrak{b}(k) \tag{54}$$

L'opérateur d'annihilation correspondant s'écrit :

$$\psi^- = \sum_k \psi^k(x)\, \mathfrak{a}(k) \tag{55}$$

(54) ne définit pas, en général un invariant relativiste. La variance relativiste de ψ^+, qui a un certain nombre de composantes d'espace temps $(\psi^+)_\alpha$, est celle de la fonction d'onde non superquantifiée ψ. Quand à (55), elle pourrait s'écrire :

$$\psi^- = \sum_{k,h} g^{h^* k}\, (\psi_h(x))^*\, \mathfrak{a}(k) \tag{56}$$

La formule (56) est correcte du point de vue de la variance quantique. Mais, on sait que, dans la grande majorité des cas, $(\psi_h(x))^*$ n'a pas la variance relativiste de $\psi_h(x)$. On réarrange les composantes de $(\psi_h(x))^*$, à l'aide d'une matrice constante convenable, pour obtenir le spineur (ou tenseur) conjugué $\bar{\psi}_h(x)$, qui a la même variance relativiste que $\psi_h(x)$. La signification véritable de la formule (55) n'est pas donnée par (56), mais par :

$$\psi^- = \sum_{k,h} g^{h^* k}\, \bar{\psi}_h(x)\, \mathfrak{a}(k) \; . \tag{57}$$

Les opérateurs ψ^+ et ψ^- ne sont plus toujours comme l'étaient X^+ et X^-, hermitiens conjugués. Pour que l'opérateur d'interaction $\mathcal{H}$ soit quand même hermitien, il faut faire intervenir ψ^+ et ψ^- dans cet opérateur d'une façon particulière.

On peut par exemple, supposer que :

1°) Seule la somme $\psi^+ + \psi^-$ apparaît dans $\mathcal{H}$.
2°) $\mathcal{H}$ étant déduit d'un invariant relativiste $\mathcal{J}$, lui même établi à partir des fonctions d'onde non superquantifiées ψ , la transformation $\psi \to \overline{\psi}$ change $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}^*$.
S'il en est ainsi, on peut appeler "Fonction d'onde superquantifiée" l'opérateur :

$$(58) \qquad (\psi)_{Op} = \psi^+ + \psi^-$$

$(\psi)_{Op}$ a la variance relativiste de ψ . Si les équations d'onde sont autoconjuguées (ce qui signifie que $\overline{\psi}$ satisfait aux mêmes équations d'onde que ψ), $(\psi)_{Op}$ les vérifie.

8.- Particules et antiparticules : Relations de Commutation.

Au paragraphe 1, nous avons introduit l'espace de Hilbert dont les vecteurs représentent les états possibles de la particule P . Si P est libre, on peut séparer sans ambiguité, et de façon invariante relativiste, ses états d'énergie positive de ses états d'énergie négative.

Si P n'admet pas d'antiparticules, les seconds n'ont pas d'interprétation physique, en dehors de l'absorption d'une particule P . On doit donc restreindre (H) aux seules solutions à énergie spécifiquement positive de l'équation d'onde, cela revient à ne considérer comme appartement à (H) que les seules fonctions obtenues par superposition d'ondes planes toutes à énergie positive (Cf. [1]). Si P est liée, le problème est plus complexe, et doit être examiné dans chaque cas particulier. Si, par exemple, P est attirée par un centre fixe O , le système d'axes ayant son origine en O est privilégié, et il en résulte une décomposition en solutions à énergie positive et à énergie négative qui a un caractère intrinsèque.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que (H) a pu être défini, et nous prenons pour $(\psi)_{Op}$ l'expression (58). Nous écrivons désormais ψ au lieu de $(\psi)_{Op}$. Sauf mention contraire, il s'agira de la fonction d'onde superquantifiée.

Formons le commutateur :

$$(59) \qquad [\,(\psi(x))_\alpha \,,\, (\psi(x'))_\beta\,]_\mp = (\psi^k(x))_\alpha\,(\psi_k(x'))_\beta \mp (\psi_k(x))_\alpha\,(\psi^k(x'))_\beta$$

dont la valeur résulte des équations (53), (54), (57) et (58), et où les indices α et β sont des indices tensoriels ou spinoriels relativistes. Appelons $S_{\alpha\beta}(x,x')$ la fonction singulière du second membre, très analogue à celle de la formule (21). $S_{\alpha\beta}(x,x')$ est, comme il résulte de son équation même, un invariant quantique (elle ne dépend pas de la base choisie dans (H) . (59) devient :

(60) $$[\ (\psi(x))_\alpha\ (\psi(x'))_\beta\ ]_{\mp} = S_{\alpha\beta}(x,x')$$

Si, maintenant, une antiparticule P' est associée à P, l'ensemble de n particules P et de n' particules P' est décrit par un tenseur $\Psi_{k_1,\dots,k_n;k'_1,\dots,k'_{n'}}$ où $k_1,k_2,\dots,k_n$ sont des indices covariants de (H) : espace fonctionnel des états d'énergie spécifiquement positive de P, et $k'_1, k'_2,\dots,k'_{n'}$ les indices covariants de (H') : espace fonctionnel des états à énergie spécifiquement positive de P'.

La fonction $\psi^{k'} = \sum g^{h'k'}\Psi_{h'}$ n'appartient pas à (H'), en général, mais au prolongement de (H) (états à énergie négative de P). De même la fonction $\psi^{k} = \sum\limits_h g^{h^*k}\Psi_h$ appartient au prolongement de (H') (états à énergie négative de P). Il s'ensuit logiquement la formation de deux fonctions d'onde superquantifiées :

(61) $$\psi(x) = \psi_k(x)\,\mathcal{B}(k) + \psi^{k'}(x)\,\mathcal{A}(k')$$

et (62) $$\tilde{\psi}(x) = \psi^k(x)\,\mathcal{A}(k) + \psi_{k'}(x)\,\mathcal{B}(k')$$

$\psi(x)$ est un opérateur création de P et annihilation de P' .
$\tilde{\psi}(x)$ est un opérateur annihilation de P et création de P' .
$\psi(x)$ vérifie les équations d'onde de P et $\tilde{\psi}(x)$ celles de P' .
(61) et (62) ne conduisent à aucune difficulté si P (et P') sont des bosons (tenseurs symétriques). En effet, les opérateurs agissant sur les indices k et ceux applicables aux indices k' commutent entre eux.

Si les P et P' sont des fermions, au contraire il faut faire anticommuter les opérateurs appliqués aux k et ceux appliqués aux k' . Nous sommes conduits à modifier les $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}$ dans ce sens, tout en respectant les deux conditions de conjugaison hermitienne et d'anticommutation. A une équivalence près, la seule solution possible s'obtient en multipliant les $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}$ déjà définis par :

$$(-1)^{n'} \quad \text{pour les} \quad \mathcal{B}(k) \, , \, \mathcal{A}(k) \, , \, \mathcal{B}(k')$$

et $$(-1)^{(n'+1)} \quad \text{pour les} \quad \mathcal{A}(k')$$

Les $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}$ figurant dans (61) et (62) seront supposés avoir subi une telle transformation. Que les particules P et P' soient des bosons ou des fermions, on pourra écrire :

$$(63) \qquad [\,(\tilde{\psi}(x))_\alpha \, , \, (\psi(x'))_\beta\,]_{\mp} = (\psi^k(x))_\alpha \, (\psi_k(x'))_\beta \mp (\psi_{k'}(x))_\alpha \, (\psi^{k'}(x'))_\beta$$

ou encore :

$$(64) \qquad [\,(\tilde{\psi}(x))_\alpha \, , \, (\psi(x'))_\beta\,]_{\mp} = S_{\alpha\beta}(x,x')$$

(α et β : indices tensoriels ou spinoriels relativistes)

La fonction singulière $S_{\alpha\beta}(x,x')$ de la formule (64), comme celle de la formule (60) ne dépend pas du choix des bases dans (H) et (H') , ainsi qu'il résulte de son écriture même. Elle est invariante quantique.

$S_{\alpha\beta}(x,x')$ vérifie, en tant que fonction de x , les équations d'onde de P' et comme fonction de x' , celles de P .

Il n'en est pas de même, en général, de la fonction $S_{\alpha\beta}(x,x')$ de la formule (60). Dans (60) $\psi_k(x')$ et $\psi_k(x)$ sont bien solutions des équations d'onde de P . $\psi^k(x')$ et $\psi^k(x)$ satisfont les équations conjuguées. Si les équations de P sont autoconjuguées, $S_{\alpha\beta}(x,x')$ est doublement solution de ces équations. Comme fonction de x et comme fonction de x' . Dans le cas contraire, on ne peut rien affirmer.

9.- Equations d'évolution d'un système.

Au début du paragraphe 7, nous avons posé le principe permettant d'écrire les équations d'évolution d'un système. Rappelons la formule bien connue :

$$(65) \qquad i\,\frac{\delta \Psi}{\delta \tau(x)} = \mathcal{H}(x)\,\Psi$$

qui revient à poser :

(66) $$i(\Psi(\sigma) - \Psi(\sigma_0)) = \iiiint_{\sigma_0}^{\sigma} \mathcal{H}(x')\,\Psi(\sigma')\,d^4x'$$

((x' point de σ') σ' étant une hypersurface du genre espace d'une famille continue incluant σ_0 et σ)

Le vecteur d'état Ψ présente un caractère tensoriel par rapport aux changements de base dans les r espaces hilbertiens (H_1) ---- (H_r) associés aux r sortes de particules P_1 ------ P_r , intervenant dans le système. Une composante de Ψ s'écrit :

$$\Psi_{k_1^{(1)},\ldots,k_{n_1}^{(1)}\,;\,k_1^{(2)},\ldots,k_{n_2}^{(2)};\,\ldots\ldots\ldots\,;\,k_1^{(r)},\ldots,k_{n_r}^{(r)}}$$

Cette composante est associée à un état du système où il y a n_1 particules P_1, n_2 particules P_2,------------, n_r particules P_r . L'ensemble de telles composantes covariantes de Ψ sera désormais désigné par Ψ_{cov} . On pourra passer aux composantes contrevariantes dont l'ensemble sera réprésenté par Ψ^{contr}.

On peut remarquer que Ψ est constitué d'une infinité de tenseurs $\Psi_{n_1;\,n_2;\ldots;n_r}$ ($n_1, n_2, \ldots, n_r$ et r prenant toutes les valeurs entières possibles de 0 à ∞).

Le carré de la <u>norme</u> de Ψ , déduit de (27), s'écrit :

(67) $$|\Psi|^2 = \langle \Psi \mid \Psi \rangle = \sum \Psi^{contr}\,\Psi_{cov}$$

(67) où tous les indices sont contractés, définit un invariant quantique. Il se peut qu'un tenseur $\Psi_{n_1;\,n_2;\ldots;n_r}$ présente un caractère normé par rapport à chaque espace hilbertien (H_1), (H_2),----- (H_r), et ne soit pas normé au sens de (67), qui suppose une sommation sur <u>tous</u> les indices relatifs à <u>toutes</u> les bases. Il se peut aussi que les $\Psi_{n_1;\,n_2;\ldots;n_r}$ soient tous normés au sens de (67), mais que leur ensemble ne le soit pas. Là réside une des principales difficultés de la théorie quantique des champs. Le produit scalaire de deux vecteurs d'état Ψ et Φ s'obtient selon :

(68) $$\langle \Psi \mid \Phi \rangle = \sum \Psi^{contr}\,\Phi_{cov}$$

Il est invariant quantique.

Pour que le carré scalaire de (67) soit indépendant de σ , il faut, on le sait, que $\mathcal{H}$ soit hermitien :

(69) $$\langle \mathcal{H}\Psi \mid \Phi \rangle = \langle \Psi \mid \mathcal{H}\Phi \rangle$$

L'opérateur $\mathcal{H}(x)$ peut être formé à partir des fonctions d'onde superquantifiées définies aux paragraphes 7 et 8 (formules (58), (61) et (62). Une expression arbitraire où figureraient ces fonctions $\psi(x)$, ne convient en général, pas. Le respect de la condition (69) impose des règles assez strictes. Il n'y a pas de difficulté à montrer que :

1°) $\mathcal{H}(x)$ peut être un polynôme, ou une série de polynômes en $\psi(x)$.

2°) $\mathcal{H}(x)$ doit être un invariant relativiste.

3°) Si, dans tous les invariants relativistes constituant $\mathcal{H}(x)$, les ψ sont considérées pour un instant comme des fonctions ordinaires, non superquantifiées, la transformation $\psi \to \bar{\psi}$ doit entraîner le passage à la valeur complexe conjuguée.

4°) Si, dans un monôme de $\mathcal{H}(x)$ figurent les fonctions d'onde superquantifiées ψ de particules P admettant des antiparticules P' , $\mathcal{H}(x)$ doit comporter un autre monôme, déduit du premier par substitution des $\tilde{\psi}$ aux ψ , et vice versa, et par inversion complète de l'ordre des facteurs. La covariance quantique des équations d'évolution symbolisées par (65) est assurée comme indiqué au début du paragraphe 7, du fait même du caractère tensoriel quantique de $\mathcal{H}(x)$.

Si l'on suppose que $\mathcal{H}(x)$ ne dépend que de x (et non pas de l'hypersurface σ) la condition d'intégrabilité de (65) s'écrit :

(70) $$\mathcal{H}(x)\,\mathcal{H}(x') = \mathcal{H}(x')\,\mathcal{H}(x) \qquad \text{pour } x \neq x'$$
$$\text{et } x - x' \text{ du genre espace.}$$

Elle garantit que le vecteur d'état $\Psi(\sigma)$ ne dépend que de la valeur initiale $\Psi(\sigma_0)$ et de σ , et reste insensible à toute modification de la famille des hypersurfaces intermédiaires σ' (voir, par exemple, [11]).

Nous allons voir comment réaliser (70).

10.- Spin et statistique .

Les fonctions d'onde superquantifiées de deux particules complètement distinctes commutent entre elles, puisqu'elles opèrent sur des indices relatifs à deux espaces de Hilbert indépendants l'un de l'autre.

Les relations de commutation (60) et (64) nous conduisent à poser que :

a) le nombre des opérateurs ψ associés aux fermions et intervenant dans tout monôme de $\mathcal{H}(x)$ est pair.

b) Les fonctions $S_{\alpha\beta}(x,x')$ sont nulles pour $x \neq x'$, dès que $x-x'$ est du genre espace.

Moyennant a) et b) , (70) est vérifiée.

Nous allons montrer que la condition b) nous fait associer les tenseurs quantiques symétriques aux particules de spin entier, et les tenseurs quantiques antisymétriques aux particules de spin 1/2 entier.

Ainsi, la condition d'intégrabilité (70) impose la liaison bien connue du spin et de la statistique.

Dans le cas des particules libres n'ayant pas d'antiparticules, nous nous bornerons aux équations d'onde autoconjuguées (ψ et $\overline{\psi}$ satisfont aux même équations). En fait, on en considère jamais d'autres.

Considérons le second membre de (59) :

$$(71) \qquad S_{\alpha\beta}(x,x') = (\psi^k(x))_\alpha \; (\psi_k(x'))_\beta + \varepsilon\,(\psi_k(x))_\alpha \; (\psi^k(x'))_\beta$$

où ε est +1 si Ψ est antisymétrique, et -1 si Ψ est symétrique (par rapport aux indices relatifs à la particule P considérée).

Les indices k sont, ici, relatifs à l'espace de Hilbert des états à énergie positive de P' . Si nous voulons donner à $S_{\alpha\beta}(x,x')$ une signification invariante dans l'espace de Hilbert de tous les états (à énergie de signe quelconque) de P , il convient de transformer la deuxième partie de la somme du second membre de (71).

Nous avons :

$$(72) \qquad (\psi_k(x))_\alpha \; (\psi^k(x'))_\beta = g^{h^*k} \, (\psi_k(x))_\alpha \, (\overline{\psi}_h(x'))_\beta$$

Mais les indices h et k peuvent être transformés en indices d'états à énergie négative h' et k' , en posant :

$$\psi_k(x) = \overline{\psi}_{k'}(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\psi}_h(x') = \psi_{h'}(x')$$

On peut d'autre part, établir le :

LEMME. Si $v(\psi, \varphi)$ est le quadrivecteur - courant associé à deux états d'une même particule P, on a :

(73) $$v(\bar{\psi}, \bar{\varphi}) = \varepsilon' \left\{ v(\psi, \varphi) \right\}^*$$

avec $\varepsilon' = +1$ si P est de spin 1/2 entier,

et $\varepsilon' = -1$ si P est de spin entier.

(73) qui peut être vérifiée sur les formules donnant les quadrivecteurs-courants des particules usuelles, se démontre facilement à partir des expressions les plus générales que nous avons données des quadrivecteurs-courants des particules de spin quelconque [8].

De (73) il résulte que : $g_{h^*k} = \varepsilon' (g_{h'^*k'})^*$; d'où

$$g_{h^*k} = \varepsilon' g_{k'^*h'} \qquad (\text{ car } (g_{k^*h})^* = g_{h^*k})$$

et par inversion :

(74) $$g^{h^*k} = \varepsilon' g^{k'^*h'}$$

(72) et (74) donnent :

(75) $$(\psi_k(x))_\alpha (\psi^k(x'))_\beta = \varepsilon' g^{k'^*h'} (\bar{\psi}_{k'}(x))_\alpha (\psi_{h'}(x'))_\beta$$

Dans (75), l'indice h' parcourt toutes les valeurs associées à tous les vecteurs de base de l'espace de Hilbert des états à énergie négative de P.

(75) et (71) donnent :

(76) $$S_{\alpha\beta}(x,x') = (\psi^k(x))_\alpha (\psi_k(x'))_\beta + \varepsilon\varepsilon' (\psi^{h'}(x))_\alpha (\psi_{h'}(x'))_\beta$$

Pour que $S_{\alpha\beta}(x,x')$ soit un invariant de l'espace de Hilbert total des solutions des équations d'onde de P, il faut évidemment que $\varepsilon\varepsilon' = +1$. Appelant ℓ l'indice courant du vecteur de base de cet espace, $S_{\alpha\beta}(x,x')$ devient alors :

(77) $$S_{\alpha\beta}(x,x') = (\psi^\ell(x))_\alpha (\psi_\ell(x'))_\beta$$

$\varepsilon\varepsilon' = +1$ entraîne que les Ψ symétriques représentent les systèmes de particules de spin entier, et les Ψ antisymétriques les particules de spin demi-entier. Nous avons imposé (77) d'une manière relativement arbitraire. Montrons qu'elle conduit à $S_{\alpha\beta}(x,x') = 0$ pour $x \neq x'$, c'est-à-dire au résultat cherché. Alors $\varepsilon\varepsilon' = +1$ se justifiera complètement.

Si on écrit : $\psi = c^k \psi_k$,

on trouve aisément que : $c^h = g^{k^*h} \langle \psi_k | \psi \rangle$
d'où

(78) $$\psi(x) = g^{k^*h} \langle \psi_k | \psi \rangle \psi_h(x)$$

La formule (78) équivaut à :

(79) $$\psi(x) = \iiint_{\sigma'} g^{k^*h} v^\lambda (\bar{\psi}_k(x'), \psi(x')) \psi_h(x)\, d\sigma'_\lambda$$

Si nous posons :

$$v^\lambda(\psi, \varphi) = \sum_{\alpha,\beta} A^\lambda_{\alpha\beta} (\psi)_\alpha (\varphi)_\beta$$

(79) devient (80)

(80) $$(\psi(x))_\gamma = \iiint_{\sigma'} A^\lambda_{\alpha\beta} (\psi^h(x'))_\alpha (\psi(x'))_\beta (\psi_h(x))_\gamma d\sigma'_\lambda$$

Dans ce qui précède immédiatement les indices k et h représentent tous les vecteurs de base de l'espace fonctionnel des états de P (à énergie positive et négative).(77) et (80) donnent :

(81) $$(\psi(x))_\gamma = \iiint_{\sigma'} A^\lambda_{\alpha\beta} S_{\alpha\gamma}(x',x) (\psi(x'))_\beta\, d\sigma'_\lambda$$

Si nous posons :

(82) $$S^\lambda_{\gamma\beta}(x,x') = \sum_\alpha A^\lambda_{\alpha\beta} S_{\alpha\gamma}(x',x)$$

(83) $$(\psi(x))_\gamma = \iiint_{\sigma'} S^\lambda_{\gamma\beta}(x,x') (\psi(x'))_\beta\, d\sigma'_\lambda$$

Au point où nous en sommes de notre exposé, nous devons faire une hypothèse supplémentaire : la fonction $\psi(x)$ peut être prise arbitrairement sur une hypersurface du genre espace σ . C'est le cas en théorie de Dirac. C'est le cas pour le quadripotentiel électromagnétique si l'on admet les ondes scalaires et longitudinales (d'une manière générale, ce sont les conditions auxiliaires tendant à séparer les états de spin qui peuvent s'opposer à la donnée arbitraire de ψ sur σ .

Ainsi en est il dans les théories habituelles du méson. Rien ne dit cependant qu'il ne vaut pas mieux admettre le mélange des états de spin.) Si x est sur l'hypersurface σ' :

$$(\psi(x))_\gamma = \iiint_{\sigma'} S^\lambda_{\gamma\beta}(x,x') \; (\psi(x'))_\beta \, d\sigma'_\lambda$$

oblige $S^\lambda_{\gamma\beta}(x,x')$ à être nulle pour tout $x \neq x'$. (x et x' sont sur σ', donc $x - x'$ du genre espace).

En effet $\psi(x)$ ne peut pas dépendre des valeurs $\psi(x')$ pour $x \neq x'$. D'après (82), les $S_{\alpha\gamma}(x,x')$ dont donc nulles pour $x \neq x'$ et $x - x'$ du genre espace. La propriété b) est donc réalisée.

On voit que si nous n'avions pas écrit $\varepsilon\varepsilon' = +1$, il n'y aurait eu aucune liaison simple entre les $S_{\alpha\beta}$ et les $S^\lambda_{\alpha\beta}$.

En général, $S_{\alpha\beta}(x,x')$ n'aurait pas été nulle pour $x - x'$ du genre espace, et, par conséquent la condition d'intégrabilité (70) n'aurait pas eu de raison d'être satisfaite.

La liaison spin-statistique est donc bien démontrée.

La condition a) se trouve automatiquement réalisée, une fois la liaison spin-statistique acquise, du fait du caractère invariant relativiste de $\mathcal{H}(x)$. La définition (82) permet d'écrire les relations de commutation (60) sous la forme :

(84) $$\left[\sum_\alpha A^\lambda_{\alpha\beta} \, (\bar{\psi}(x))_\alpha \; ; \; (\psi(x'))_\gamma \right]_{\mp} = S^\lambda_{\gamma\beta}(x,x')$$

Par intégration sur une hypersurface σ du genre espace, x étant supposé sur σ dont le point courant est x', on obtient une relation analogue à celle établie par Schwinger pour l'électron [10] :

(85) $$\iiint_\sigma \left[\sum_\alpha A^\lambda_{\alpha\beta} \, (\bar{\psi}(x))_\alpha \; , \; (\psi(x'))_\gamma \right]_{\mp} d\sigma'_\lambda = \delta_{\beta\gamma}$$

La démonstration que nous avons donnée dans ce paragraphe s'applique, sans grande modification, au cas des particules dotées d'antiparticules. (84) et (85) deviennent, alors :

(86) $$\left[\sum_\alpha A^\lambda_{\alpha\beta} \, (\tilde{\psi}(x))_\alpha \; , \; (\psi(x'))_\gamma \right]_{\mp} = S^\lambda_{\gamma\beta}(x,x')$$

(87) $$\iiint_\sigma \left[\sum_\alpha A^\lambda_{\alpha\beta} \, (\tilde{\psi}(x))_\alpha \; , \; (\psi(x'))_\gamma \right]_{\mp} = \delta_{\beta\gamma}$$

11.- Opérateurs associés aux grandeurs ; représentations de Schrödinger.

L'opérateur associé à toute grandeur additive de la mécanique ondulatoire correspond à une transformation infinitésimale appliquée à la fonction d'onde de De Broglie de la particule P .

Par exemple, le moment orbital en projection sur un axe Δ correspond à la dérivation par rapport à θ , angle de rotation autour de Δ . La quantité de mouvement en projection sur l'axe Ox correspond à la dérivation par rapport à x , etc .... a étant une grandeur additive, et A l'opérateur associé, on peut considérer que A est un opérateur linéaire de l'espace de Hilbert (H) des fonctions d'onde de P .

Un changement de base infinitésimal dans (H) peut être ainsi associé à A . S'il s'agit, pour fixer les idées, du moment orbital en projection sur Δ , la rotation infinitésimale des axes autour de Δ fait passer des coordonnées x,y,z, aux coordonnées x',y',z' .

Une fonction F(x,y,z) , exprimée à l'aide de nouvelles variables verra sa forme changer. Elle deviendra $\Phi(x',y',z')$.

Il pourra se superposer la modification de F due à une éventuelle variance relativiste et qui donne le spin. Nous avons donc fait subir à toute fonction de (H) (donc à toute fonction de base de (H)) une transformation infinitésimale A induite par la rotation infinitésimale considérée. Le point de vue auquel nous nous plaçons maintenant diffère de celui du paragraphe 1. Nous considérions alors toute fonction d'onde ψ définissant un état de la particule P en tant que donnée physique, indépendante en quelque sorte du système de coordonnées. Ses composantes dépendaient, bien entendu, du repère, et aussi son expression analytique. Mais nous avions intérêt à lui conférer une signification intrinsèque, afin de séparer clairement la covariance quantique de la covariance relativiste.

Dans le présent paragraphe, nous envisageons une définition purement analytique de ψ à l'aide de x,y,z,t. Après toute transformation de Lorentz, nous oublions que les coordonnées sont devenues x',y',z',t' . Nous ne prenons en considération que le changement de forme de ψ et nous le traduisons par une transformation linéaire dans (H) .

A définit une transformation infinitésimale sur les vecteurs de (H) :

$$\delta X_k = a_k^h X_h \, du \tag{88}$$

du étant l'élément infinitésimal d'un certain paramètre (par exemple , angle de la rotation infinitésimale).

Les éléments de matrice de (88) s'écrivent :

$$a_k^h = g^{\ell^* h} \langle \Psi_\ell | A \Psi_k \rangle \tag{89}$$

Un tenseur covariant $\Psi_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ se transforme comme le produit de vecteurs $X_{k_1}^{(1)} \ldots X_{k_n}^{(n)}$.

De (88), il découle que :

$$\delta (X_{k_1}^{(1)} X_{k_2}^{(2)} \ldots X_{k_n}^{(n)}) = du \sum_{i,h} a_{k_i}^h X_{k_1}^{(1)} \ldots X_{k_{(i-1)}}^{(i-1)} X_h^{(i)} X_{k_{(i+1)}}^{(i+1)} \ldots X_{k_n}^{(n)}$$

d'où

$$\delta \Psi_{k_1 \ldots k_n} = du \sum_{i,h} a_{k_i}^h \Psi_{k_1 \ldots k_{i-1} h k_{i+1} \ldots k_n} \tag{90}$$

La formule (90) définit, dans l'espace de Fock du vecteur d'état Ψ, l'opérateur superquantifié : $\mathfrak{A}$ qui correspond à A. On vérifie aisément que (90) transforme tout tenseur symétrique en un tenseur symétrique et tout tenseur antisymétrique en un tenseur antisymétrique.

Supposons que a_k^h est diagonalisé, et que n particules P occupent des états $k_1, k_2 \ldots k_n$, correspondant aux valeurs propres $a_1, a_2 \ldots a_n$. La formule (90) montre que $\Psi_{k_1 \ldots k_n}$ étant la seule composante de Ψ supposée non nulle, Ψ est alors un vecteur propre de $\mathfrak{A}$. La valeur propre correspondante est $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

<u>EXEMPLE</u> : opérateur "nombre de particules".

Soit $g^i_{\ j} = g^{h^* i} g_{h^* j}$

L'opérateur $\mathfrak{N}$ superquantifié correspondant à $g^i_{\ j}$ agit sur le tenseur $\Psi_{k_1,\ldots,k_n}$ à n indices d'après :

$$(\mathfrak{N} \Psi)_{k_1,\ldots,k_n} = \sum_{i,h} g^h_{\ k_i} \Psi_{k_1,\ldots,k_{i-1},h,k_{i+1},\ldots,k_n}$$

Mais

$$g^{h^*i}\, g_{h^*j} = \delta_{ij} \qquad (g^{h^*i} \text{ inverse de } g_{k^*j})$$

Donc :

(91) $$(\mathcal{N}\Psi)_{k_1,\dots,k_n} = n\,\Psi_{k_1,\dots,k_n}$$

(91) montre qu'il n'existe aucune ambiguité dans la définition de l'opérateur "nombre de particules", ce qui n'est pas le cas avec le procédé formel couramment admis.

Opérateur énergie du champ libre ; représentation de Schrödinger.

Si l'équation d'onde d'une particule libre P peut se mettre sous la forme :

(92) $$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = K\psi$$

K est l'opérateur associé à l'énergie.

Pour superquantifier K , on pose suivant (89) :

(93) $$K_i^{\ j} = g^{\ell^* j} \langle \psi_\ell \mid K\psi_i \rangle$$

Les formules :

(94) $$\Phi_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \sum_{h,k} K_{i_h}^{k}\, \Psi_{i_1,\dots,i_{h-1},k,i_{h+1},\dots,i_n}$$

définissent un opérateur $\mathcal{H}_0$ (tel que $\Phi = \mathcal{H}_0\Psi$)

Il ressort de (94) que, si toutes les particules du champ sont dans des états d'énergie bien définis, l'énergie totale du champ est égale à la somme des énergies des particules qui le composent. Il n'y a pas d'énergie du point zéro.

Nous avons adopté, jusqu'ici la représentation d'interaction : une fonction d'onde satisfaisant à (92) y était considérée comme un vecteur constant de l'espace de Hilbert (H) . Nous pouvons nous placer à un point de vue différent ψ étant étudiée comme fonction des trois variables d'espace, le temps faisant office de paramètre.

Les fonctions de base ψ_i , vérifiant (92), se développent selon :

(95) $$\psi_i(t) = c_i^{\ k}(t)\,\psi_k(t_0)$$

(95) exprime le passage de la base des $\psi_i(t)$ à celle des $\psi_i(t_0)$. Le vecteur d'état de la représentation d'interaction, Ψ devient alors celui de la représentation de Schrödinger : Φ

On a :

$$\mathcal{C}\,\Phi = \Psi \tag{96}$$

$\mathcal{C}$ étant le symbole de la transformation induite par (95) dans tous les champs tensoriels contribuant à la constitution de Φ.

Si nous rappelons :

$$i\,\frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{H}\,\Psi \qquad \left(\text{avec } \mathcal{H} = \iiint \mathcal{H}(x)\,dx^3\right) \tag{97}$$

Nous aboutissons à :

$$i\,\frac{d\Phi}{dt} = -\,i\,\mathcal{C}^{-1}\frac{d\mathcal{C}}{dt}\,\Phi + \mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{H}\,\mathcal{C}\,\Phi \tag{98}$$

L'opérateur K de (92) définissant la transformation infinitésimale que subit ψ quand t augmente infiniment peu, et $-i\,\mathcal{C}^{-1}\frac{d\mathcal{C}}{dt}$ (de (98)), ayant la signification correspondante dans l'espace des Φ, on montre, immédiatement que :

$$-\,i\,\mathcal{C}^{-1}\,\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \mathcal{H}_0 \tag{99}$$

De même, $\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{H}\,\mathcal{C}$ n'est autre, en vertu du caractère tensoriel de (98) que l'opérateur $\mathcal{H}$ écrit dans le système de base $\psi_k(t_0)$, soit $\mathcal{H}'$. Finalement, on obtient la formule classique :

$$i\,\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{H}_0\,\Phi + \mathcal{H}'\,\Phi \tag{100}$$

12.- Conclusion.

Dans ce qui précède, nous pensons avoir établi qu'il est possible grâce à la notion de covariance quantique, de développer de manière entièrement rationnelle la théorie de la seconde quantification. Nous avons donné aux vecteurs d'état et aux opérateurs des définitions mathématiques concrètes. Tout raisonnement analogique basé sur des propriétés formelles tirées de la mécanique analytique a été exclu. Nous avons édifié une théorie sans aucun Lagrangien. Le cas des métriques indéfinies a été automatiquement inclus dans notre développement.

En outre, nous avons démontré le caractère explicitement covariant relativiste de toutes nos équations. Il semble donc que la conciliation de la relativité restreinte et des quanta ne pose plus de problème. Plus encore, la covariance quantique apparaît comme une extension du Principe de Relativité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] de BROGLIE (L.) : Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, Paris, 1949.

[2] COSTA de BEAUREGARD (O.) : C.R. Acad. Sc. Paris, 239, 1954, p. 1357 ; J. Phys. Rad., 16, 1955, p. 770.

[3] FOCK (V.) : Z. Phys., 75, 1932, p.622.

[4] JAUCH : Helvetica physica Acta, 1956.

[5] JULIA (G.) : Introduction mathématique aux théories quantiques, Paris 1938.

[6] KASTLER (D.) : C.R. Acad. Sc. Paris, 242, 1956, p. 2445 ; 242, 1956, p. 1132 ; 242, 1956, p. 2808.

[7] POTIER (R.) : C.R. Acad. Sc. Paris, 240, 1955, p. 281 ; J. Phys. Rad., 16, 1955, p. 688.

[8] POTIER (R.) : C.R. Acad. Sc. Paris, 222, 1946, p. 855-857 et p. 769-789.

[9] POTIER (R.) : C.R. Acad. Sc. Paris, 242, 1956, p. 470-473, p. 878-881, p. 1694-1696 et p. 1961-1964.

[10] SCHWINGER (J.) : Phys. Rev., 74, 1948, p. 1439-1461.

[11] UMEZAWA (H.) : Quantum field Theory, Amsterdam, 1956.