Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

J. Winogradzki

Métrique spinorielle

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 26 (1956-1957), exp. nº 11, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1956-1957__26__A10_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire de THEORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 11

MÉTRIQUE SPINORIELLE

(Exposé de Mme WINOGRADZKI, le 26.2.1957)

La définition géométrique du tenseur métrique ne peut évidemment pas être transposée dans la théorie des spineurs ([1]). Mais, dans l'Univers de Minkovski, on peut définir le tenseur métrique (à un coefficient arbitraire près) comme le tenseur du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général. Il existe des spineurs du second rang dont les composantes possèdent la même propriété. On pourra considérer ces spineurs, après normalisation, comme des spineurs métriques, si leur ensemble satisfait à certaines conditions. L'examen de ces conditions est assez complexe parce que le nombre des spineurs à composantes invariantes est élevé (128 dont 32 distincts) et aussi parce qu'il faut tenir compte de l'indétermination de la représentation.

Il faut remarquer que les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général présentent un grand intérêt et en dehors de la théorie de la métrique spinorielle. Ainsi, des formes bilinéaires construites à l'aide de ces spineurs jouent un rôle important en Physique (par exemple dans la théorie de la désintégration radioactive β). La connaissance de ces spineurs permet une classification naturelle des spineurs du premier rang - classification dont l'intérêt est lié à l'existence de particules de spin 1/2 de nature différente. Enfin, et je voudrais insister sur ce point, la connaissance de l'ensemble des spineurs du second rang à composantes invariantes rend le formalisme spinoriel de la Physique plus satisfaisant. D'importantes équations spinorielles ne relient en effet que les valeurs des composantes spinorielles. Contrairement à des équations tensorielles ou semispinorielles, elles ne relient point les variances. (On se rend aisément compte que ce n'est

([1]) Nous appelons "spineurs" les spineurs de Dirac, c'est-à-dire les spineurs à 4^n composantes de l'Univers de Minkovski.

pas simplement une question de notations.) Ces équations contiennent des matrices numériques. On fausse évidemment le formalisme en considérant comme matrice numérique une grandeur à 16 composantes, même si les composantes de cette grandeur sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général. Or, les éléments des matrices numériques qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des particules élémentaires sont les composantes, invariantes, de certains spineurs du second rang. En remplaçant ces matrices par les spineurs correspondants, on obtient un formalisme spinoriel dont les équations relient bien les variances, y compris les parités relatives.

Ce que je voudrais exposer aujourd'hui, c'est la première partie de l'étude de la métrique spinorielle, c'est-à-dire la détermination des spineurs à composantes invariantes. J'ajouterai quelques mots sur le formalisme explicite.

Pour déterminer les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général, deux méthodes pouvaient être envisagées.

1) W. Pauli a établi des relations entre certaines matrices numériques et la matrice de transformation spinorielle [1] . On pourrait chercher à déduire de ces équations l'invariance des composantes de certains spineurs.

2) On peut utiliser la méthode directe : déterminer les spineurs à composantes invariantes en résolvant les équations d'invariance. (Le nombre d'équations d'invariance à résoudre pourra être notablement réduit par une discussion préalable.) Cette méthode présente divers avantages. D'abord, du point de vue épistémologique, elle est beaucoup plus satisfaisante. Elle est aussi plus aisée, car on obtient automatiquement tous les spineurs du second rang à composantes invariantes. Enfin, en utilisant cette méthode, on obtient, en plus, tous les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$.

C'est donc la seconde méthode qui sera adoptée.

Je commencerai par un bref rappel des lois de transformation spinorielle, une classification des variances spinorielles et la définition de notations spinorielles explicites.

I. DÉFINITIONS DES VARIANCES SPINORIELLES. NOTATIONS.

1.- La matrice de transformation spinorielle.

La matrice de transformation spinorielle classique (S) est une matrice à quatre lignes et quatre colonnes définie par les deux conditions suivantes :

1) S satisfait à l'équation

$$\gamma^{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{k}} \, S \, \gamma^{k} \, S^{-1} \tag{1.1}$$

x^i et x'^i sont deux systèmes de référence orthonormaux. γ^i sont des matrices de Dirac, c'est-à-dire quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes telles que

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^{i} \gamma^{k} + \gamma^{k} \gamma^{i} \right) = \delta^{ik} \quad . \tag{1.2}$$

(Les indices latins prendront toujours les valeurs 1 à 4. Les indices prenant les valeurs 1 à 3 seront désignés par des lettres grecques.)

Cette première condition détermine S à un coefficient arbitraire près.

2) S donne une représentation monovalente du groupe de Lorentz infinitésimal.

2.- Trois types de variance.

1) Initialement, un spineur de Dirac du premier rang était défini comme une matrice de colonne de quatre éléments dont la loi de transformation s'écrit

$$\Psi = S \, \Psi' \quad . \tag{2.1}$$

Cette définition a été élargie par la suite [2]. Nous appellerons spineurs du premier rang les matrices de colonne de quatre éléments dont la loi de transformation se déduit de (2.1) par une opération matricielle classique. Cet élargissement de la définition est nécessaire pour que toutes les grandeurs du formalisme spinoriel qui ne sont pas des tenseurs soient des spineurs ou des grandeurs à variances tensorielles et spinorielles.

Les opérations matricielles classiques transforment une matrice non singulière A en l'une des matrices suivantes :

$$A, \; \tilde{A}^{-1}, \; \overset{*}{A}, \; \overset{+}{A}^{-1} \quad , \tag{2.I}$$

(2.II) $\quad A^{-1}, \tilde{A}, \overset{*}{A}{}^{-1}, \overset{+}{A}$.

L'accent circonflexe désignant une quelconque de ces opérations matricielles, on a, pour une opération (2.I),

$$\widehat{XY} = \hat{X}\hat{Y} \tag{2.2}$$

et, pour une opération (2.II),

$$\widehat{XY} = \hat{Y}\hat{X} \ . \tag{2.3}$$

Ainsi, en soumettant l'équation (2.1) à une opération matricielle (2.II), on transforme la matrice de colonne Ψ en matrice de ligne ; les opérations (2.I) par contre transforment bien Ψ en une nouvelle matrice de colonne. Les équations de transformation des spineurs du premier rang s'écrivent donc

$$\Psi = S\Psi' \ , \qquad \Psi = \tilde{S}^{-1}\Psi' \ , \qquad \Psi = \overset{*}{S}\Psi' \ , \qquad \Psi = \overset{+}{S}{}^{-1}\Psi' \tag{2.4}$$

ou, en notation indicielle,

$$\Psi^{k} = S^{k}_{m}\Psi'^{m} \ , \quad \Psi_{k} = (S^{-1})^{m}_{k}\Psi'_{m} \ , \quad \Psi^{\dot{k}} = \overset{*}{S}{}^{k}_{m}\Psi'^{\dot{m}} \ , \tag{2.5}$$

$$\Psi_{\dot{k}} = (\overset{*}{S}{}^{-1})^{m}_{k}\Psi'_{\dot{m}}$$

La forme indicielle des lois de transformation met en évidence l'analogie avec les semispineurs de Van der Waerden [3] .

Pour alléger le langage, nous dirons que deux spineurs dont les indices occupent la même position sont de même "locovariance" et que deux spineurs dont les indices sont tous les deux non pointés ou tous les deux pointés sont de même "plexivariance". Ψ^{k} et Ψ_{k} par exemple sont de même plexivariance, de locovariances différentes.

Pour une rotation (2), la matrice S est déterminée au signe près. La donnée de la locovariance et de la plexivariance détermine donc la loi de transformation d'un spineur du premier rang, pour une rotation, au signe près.

---

(2) Nous appelons "rotations" les transformations du groupe de Lorentz continu ("Rotations propres" dans la terminologie d'E. Cartan [4], "transformations de Lorentz orthochrones propres" dans celle de H.J. Bhabha [5].)

2) Pour une transformation de Lorentz qui n'est pas une rotation, la matrice S peut prendre deux valeurs, déterminées chacune au signe près [4][6]. Pour

$$x^i = - x'^i \quad , \quad x^k = x'^k \quad , \quad x^m = x'^m \quad , \quad x^p = x'^p \qquad (i \neq k \neq n \neq p) \tag{2.6}$$

on a

$$S = \pm R_i \gamma^k \gamma^n \gamma^p \tag{2.7}$$

avec

$$R_i = 1 \qquad \text{ou} \qquad R_i = i \; . \tag{2.8}$$

Dans l'Univers de Minkovski,

$$R_1 = R_2 = R_3 \quad (= R_\alpha) \tag{2.9}$$

R_4 étant indépendant de R_α. Nous dirons que R_α et R_4 déterminent les "flectovariances" spatiales et temporelles des spineurs.

La donnée de la locovariance, de la plexivariance et des deux flectovariances détermine, au signe près, la loi de transformation d'un spineur du premier rang pour tout le groupe de Lorentz.

Nous ne contracterons que des indices de mêmes flectovariances.

Notations.- La valeur de R_α caractérisant un spineur du premier rang sera placée au-dessous de ce spineur, celle de R_4 au-dessus. La généralisation de cette notation à des spineurs de rang quelconque est immédiate. Pour alléger l'écriture, le spineur du second rang $\underset{R_\alpha R_\alpha}{\overset{R_4 R_4}{\chi}}$ sera écrit $\underset{R_\alpha}{\overset{R_4}{\chi}}$.

3.- Parités.

Considérons maintenant un ensemble de spineurs du premier rang.

Pour une rotation, le signe de la matrice S, tout en étant arbitraire, est le même pour tous les spineurs puisque, par définition, toute rotation peut être réalisée par une suite de transformations infinitésimales. Par contre, pour une transformation de Lorentz qui ne peut pas être réalisée par une suite de transformations infinitésimales, les signes de la matrice S figurant dans les lois de transformation de deux spineurs du premier rang sont indépendants, ce qui conduit à la notion de parité. S. Watanabe a montré que les parités spatiale et temporelle sont indépendantes [7]. Deux spineurs du premier rang peuvent donc avoir quatre parités relatives.

Un spineur de rang supérieur à un se transforme, par définition, comme un produit de spineurs de rang un. La loi de transformation d'un spineur de rang supérieur à un dépend donc des parités relatives des indices ("parités internes").

La donnée des locovariances, plexivariances, flectovariances et des parités internes détermine la loi de transformation d'un spineur de rang n, pour tout le groupe de Lorentz, complètement si n est pair et au signe près si n est impair.

<u>Notations</u>.- Quatre spineurs du premier rang de mêmes flectovariances spatiale et temporelle et de parités différentes s'écriront

$$(3.I) \qquad \overset{(+)}{\underset{(+)}{\Psi}} \;, \quad \overset{(-)}{\underset{(+)}{\Psi}} \;, \quad \overset{(+)}{\underset{(-)}{\Psi}} \;, \quad \overset{(-)}{\underset{(-)}{\Psi}} \;.$$

Les signes inférieurs indiquent les parités spatiales, les signes supérieurs les parités temporelles. Les parités sont les mêmes si les signes sont pareils, elles sont opposées si les signes sont différents. Par exemple, les spineurs $\overset{(+)}{\underset{(-)}{\Psi}}$ et $\overset{(-)}{\underset{(-)}{\Psi}}$ sont de mêmes parités spatiales et de parités temporelles opposées. Les parenthèses doivent rappeler que les parités ne sont que relatives : les signes placés au-dessous et au-dessus d'un quelconque des quatre spineurs sont arbitraires, mais ils déterminent tous les autres.

Les parités internes spatiale et temporelle d'un spineur du second rang dont les deux indices sont de mêmes flectovariances seront désignés par des signes, sans parenthèses, placés au-dessous et au-dessus du spineur. Ainsi, par exemple,

$$(3.1) \qquad \overset{(+)}{\underset{(-)}{\Psi}} \; \overset{(-)}{\underset{(-)}{\Psi}} = \overset{-}{\underset{+}{\chi}}$$

D'une manière générale, si tous les indices spinoriels figurant dans une équation sont de mêmes flectovariances, les règles de signes algébriques sont valables. On a

(3.2) $\qquad (+)(+) = (-)(-) = + \quad , \quad (+)(-) = (-)(+) = -$

et, pour la multiplication intérieure,

(3.3) $\qquad + (+) = - (-) = (+) \quad , \quad + (-) = - (+) = (-)$.

II. LES ÉQUATIONS D'INVARIANCE.

4.- Classification des spineurs du second rang.

Considérons d'abord les locovariances et les plexivariances. Il y a en tout, pour un spineur du second rang, 16 variances possibles. Groupons-les en 4 classes :

Spineurs N.- $\quad N^{k}{}_{m} \; , \; N^{\dot{k}}{}_{\dot{m}} \; , \; N_{k}{}^{m} \; , \; N_{\dot{k}}{}^{\dot{m}}$;

Spineurs L.- $\quad L_{km} \; , \; L_{\dot{k}\dot{m}} \; , \; L^{km} \; , \; L^{\dot{k}\dot{m}}$;

Spineurs P.- $\quad P^{\dot{k}}{}_{m} \; , \; P^{k}{}_{\dot{m}} \; , \; P_{\dot{k}}{}^{m} \; , \; P_{k}{}^{\dot{m}}$;

Spineurs M.- $\quad M_{\dot{k}m} \; , \; M_{k\dot{m}} \; , \; M^{\dot{k}m} \; , \; M^{k\dot{m}}$.

On est conduit à cette même classification en adoptant trois points de vue différents :

1) Formellement, chaque classe peut être caractérisée par la nature relative des deux indices spinoriels : les deux indices peuvent être de locovariances différentes et de mêmes plexivariances (N) , de mêmes locovariances et de mêmes plexivariances (L) , de locovariances différentes et de plexivariances différentes (P) , de mêmes locovariances et de plexivariances différentes (M) .

2) Si l'on considère les spineurs du second rang comme des opérateurs agissant sur des spineurs du premier rang (en particulier, comme des spineurs "métriques"), chaque classe peut être caractérisée par la nature du résultat obtenu : les spineurs N ne changent ni la locovariance ni la plexivariance, les spineurs L changent la locovariance, les spineurs P la plexivariance, les spineurs M changent à la fois la locovariance et la plexivariance.

3) Chaque classe peut être caractérisée par une opération matricielle (2.II), opération qui laisse inchangée les variances des spineurs de cette classe : sont de mêmes variances N et N^{-1} , L et $\tilde{L}$, P et $\overset{*}{P}{}^{-1}$,

M et $\overset{+}{M}$.

En appliquant à un spineur du second rang une opération matricielle classique, on obtient un spineur appartenant à la même classe. Inversement, tous les changements de variance dans le cadre d'une classe peuvent être réalisés par ces opérations matricielles. Donc, si l'on connaît tous les spineurs du second rang à composantes invariantes d'une seule variance ([3]), il est aisé d'en déduire tous les spineurs à composantes invariantes appartenant à la même classe. Remarquons qu'en appliquant à un spineur du second rang une opération matricielle classique, on ne modifie ni ses flectovariances, ni -si les deux indices sont de mêmes flectovariances - les parités internes.

Par rapport à la multiplication intérieure, les spineurs N, L, P, M forment un groupe, le groupe de Klein :

	N	L	P	M
N	N	L	P	M
L	L	N	M	P
P	P	M	N	L
M	M	P	L	N

Donc, si l'on connaît les spineurs à composantes invariantes de deux classes autres que N , on en déduit aisément tous les spineurs à composantes invariantes. Mais pour des raisons qui apparaîtront plus loin, l'étude simultanée des quatre classes est préférable.

Nous calculerons directement, c'est-à-dire en résolvant les équations d'invariance, les spineurs à composantes invariantes dont le second indice est covariant non pointé. Ce sont les spineurs à second indice covariant non pointés qui, seuls, seront désignés dorénavant par N, L, P, M.

5.- Formation des équations d'invariance.

Les équations de transformation des spineurs N, L, P, M s'écrivent :

(5.1) $$N = \varepsilon\, SN'S^{-1}$$

(5.2) $$L = \varepsilon\, \tilde{S}^{-1}L'S^{-1}$$

(5.3) $$P = \varepsilon\, \overset{*}{S}P'S^{-1}$$

([3]) Rappelons que nous ne considérons ici que les locovariances et les plexivariances.

(5.4) $$M = \varepsilon \overset{+}{S}^{-1} M' S^{-1}$$

Pour les rotations $\varepsilon = 1$. Pour les retournements $\varepsilon = \pm 1$ si les deux indices du spineur considéré sont de même flectovariance, $\varepsilon = \pm i$ si les deux indices sont de flectovariances différentes ; le signe dépend des parités internes.

Les composantes des spineurs N, L, P, M sont donc invariantes par rapport à la transformation de coordonnées dont la représentation spinorielle est S , si

(5.5) $$NS = \varepsilon SN$$

(5.6) $$LS = \varepsilon \tilde{S}^{-1} L$$

(5.7) $$PS = \varepsilon \overset{*}{S} P$$

(5.8) $$MS = \varepsilon \overset{+}{S}^{-1} M$$

6.- Les quatre matrices numériques associées aux quatre classes de spineurs.

Les équations d'invariance (5.5) à (5.8) ne contiennent en dehors des spineurs invariants eux-mêmes et de coefficients numériques que les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$. La matrice S est un polynome en γ^k, les matrices $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$ sont donc des polynomes en $(\tilde{\gamma}^k)^{-1} = \tilde{\gamma}^k$, $\overset{*}{\gamma}{}^k$, $(\overset{+}{\gamma}{}^k)^{-1} = \overset{+}{\gamma}{}^k$.
Posons

(6.1) $$\gamma^k = I \gamma^k I^{-1}$$

(6.2) $$\tilde{\gamma}^k = B \gamma^k B^{-1}$$

(6.3) $$\overset{*}{\gamma}{}^k = C \gamma^k C^{-1}$$

(6.4) $$\overset{+}{\gamma}{}^k = A \gamma^k A^{-1}$$

Ces équations déterminent les matrices I, B, C, A à un coefficient arbitraire près [1]. La matrice I est proportionnelle à la matrice unité. (La définition de C n'est pas la définition habituelle).

Pour pouvoir résoudre les équations d'invariance simultanément, désignons par Q les spineurs du second rang dont le second indice est covariant non pointé et par D les matrices numériques I, B, C, A . Dans tout ce qui suit, un spineur Q et une matrice D figurant dans une même équation appartiendront, par définition, à une même colonne du tableau suivant :

(6.I)

Q	N	L	P	M
D	I	B	C	A

L'opération matricielle qui laisse inchangée la variance d'un spineur Q (opération caractéristique de la classe à laquelle apprtient Q) transforme la matrice D correspondante en matrice proportionnelle.

III. SPINEURS À COMPOSANTES INVARIANTES PAR RAPPORT AU GROUPE DES RETOURNEMENTS $x^k = \pm x'^k$.

7.- Les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$.

Dans les équations d'invariance (5.5) à (5.8) figurent les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$. Pour le retournement de l'axe x^i, la matrice S est donnée par les équations (2.7) et (2.8). On a donc :

si $R_i = 1$,

$$\left.\begin{array}{ll}
(7.1) & S = \pm \gamma^k \gamma^m \gamma^p = \pm I \gamma^k \gamma^m \gamma^p I^{-1} \\
(7.2) & \tilde{S}^{-1} = \pm \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma}^m \tilde{\gamma}^p = \pm B \gamma^k \gamma^m \gamma^p B^{-1} \\
(7.3) & \overset{*}{S} = \pm \overset{*}{\gamma}{}^k \overset{*}{\gamma}{}^m \overset{*}{\gamma}{}^p = \pm C \gamma^k \gamma^m \gamma^p C^{-1} \\
(7.4) & \overset{+}{S}^{-1} = \pm \overset{+}{\gamma}{}^k \overset{+}{\gamma}{}^m \overset{+}{\gamma}{}^p = \pm A \gamma^k \gamma^m \gamma^p A^{-1}
\end{array}\right\} = \pm D \gamma^k \gamma^m \gamma^p D^{-1}$$

Si $R_i = i$,

$$\left.\begin{array}{ll}
(7.5) & S = \pm i \gamma^k \gamma^m \gamma^p = \pm i I \gamma^k \gamma^m \gamma^p I^{-1} \\
(7.6) & \tilde{S}^{-1} = \mp i \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma}^m \tilde{\gamma}^p = \mp i B \gamma^k \gamma^n \gamma^p B^{-1} \\
(7.7) & \overset{*}{S} = \mp \overset{*}{\gamma}{}^k \overset{*}{\gamma}{}^n \overset{*}{\gamma}{}^p = \mp i C \gamma^k \gamma^m \gamma^p C^{-1} \\
(7.8) & \overset{+}{S}^{-1} = \pm \overset{+}{\gamma}{}^k \overset{+}{\gamma}{}^m \overset{+}{\gamma}{}^p = \pm i A \gamma^k \gamma^m \gamma^p A^{-1}
\end{array}\right\} = \pm \eta i D \gamma^k \gamma^m \gamma^p D^{-1}$$

avec $\eta = 1$ ou $\eta = -1$.

8.- Spineurs à $R_\alpha \neq R'_\alpha$ ou $R_4 \neq R'_4$.

Il n'existe pas de spineurs du second rang à indices de flectovariances différentes dont les composantes soient invariantes par rapport aux retournements.

En effet, si les deux indices de Q sont de flectovariances différentes par rapport au retournement de l'axe x^i , les équations d'invariance (5.5) à (5.8) s'écrivent :

$$(8.1) \qquad Q\cdot\gamma^k\gamma^m\gamma^p = \pm\, i\, D\,\gamma^k\gamma^m\gamma^p\, D^{-1}.Q$$

ou

$$(8.2) \qquad \gamma^k\gamma^m\gamma^p = \pm\, i(Q^{-1}D)\,\gamma^k\gamma^m\gamma^p(Q^{-1}D)^{-1} .$$

En élevant au carré, on obtient $-1 = 1$.

9.- Spineurs $\overset{1}{\underset{1}{Q}}$.

Le calcul de $\overset{1}{\underset{1}{Q}}$ est plus rapide que celui de $\overset{i}{\underset{1}{Q}}$, $\overset{1}{\underset{i}{Q}}$ ou $\overset{i}{\underset{i}{Q}}$ parce qu'il ne fait pas intervenir η .

Pour $\overset{1}{\underset{1}{Q}}$, les équations d'invariance (5.5) à (5.8) s'écrivent :

$$(9.1) \qquad \overset{1}{\underset{1}{Q}}\cdot\gamma^k\gamma^m\gamma^p = \varepsilon_i\, D\,\gamma^k\gamma^m\gamma^p\, D^{-1}.\overset{1}{\underset{1}{Q}}$$

ou

$$(9.2) \qquad D^{-1}\overset{1}{\underset{1}{Q}}.\gamma^k\gamma^m\gamma^p = \varepsilon_i\,\gamma^k\gamma^m\gamma^p.D^{-1}\overset{1}{\underset{1}{Q}}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$, le signe dépendant des deux parités internes.

Quatre cas sont à distinguer.

1) $\underline{\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1+}{\underset{1+}{Q}}}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1 .$$

D'après (9.2) , $D^{-1}\overset{1+}{\underset{1+}{Q}}$ commute avec tous les $\gamma^k\gamma^m\gamma^p$. Donc

$$(9.3) \qquad D^{-1}\overset{1+}{\underset{1+}{Q}} = I \ ,$$

d'où

$$(9.3') \qquad \boxed{\overset{1+}{\underset{1+}{Q}} = D}$$

$$2) \qquad \underline{\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1-}{\underset{1-}{Q}}}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1 \ .$$

D'après (9.2) , $D^{-1}\overset{1-}{\underset{1-}{Q}}$ anticommute avec tous les $\gamma^k\gamma^m\gamma^p$. Donc

$$(9.4) \qquad D^{-1}\overset{1-}{\underset{1-}{Q}} = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \ ,$$

d'où

$$(9.4') \qquad \boxed{\overset{1-}{\underset{1-}{Q}} = D\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4}$$

$$3) \qquad \underline{\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1-}{\underset{1+}{Q}}}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 \ , \qquad \varepsilon_4 = -1 \ .$$

D'après (9.2), $D^{-1}\overset{1-}{\underset{1+}{Q}}$ commute avec tous les $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^4$ et anticommute avec $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Donc

$$(9.5) \qquad D^{-1}\overset{1-}{\underset{1+}{Q}} = \gamma^4 \ ,$$

d'où

$$(9.5') \qquad \boxed{\overset{1-}{\underset{1+}{Q}} = D\gamma^4}$$

4) $\underset{1}{\overset{1}{Q}} = \underset{1-}{\overset{1+}{Q}}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1 , \qquad \varepsilon_4 = 1 .$$

D'après (9.2) , $D^{-1} \underset{1-}{\overset{1+}{Q}}$ anticommute avec tous les $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^4$ et commute avec $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Donc

(9.6) $$D^{-1} \underset{1-}{\overset{1+}{Q}} = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 ,$$

d'où

(9.6') $$\boxed{\underset{1-}{\overset{1+}{Q}} = D \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3}$$

10.- Autres spineurs.

Si $\underset{1}{A}$ et $\underset{i}{A}$ sont deux spineurs du second rang obéissant aux mêmes lois de transformation pour les rotations (c'est-à-dire deux spineurs de même locovariances et de mêmes plexivariances), on a

(10.1) $$\underset{1\pm}{A} \sim \underset{i\pm}{A} \quad \text{ou} \quad \underset{1\pm}{A} \sim \underset{i\mp}{A} ,$$

tilda signifiant que les deux spineurs obéissent aux mêmes lois de transformation pour tout le groupe de Lorentz.

La même relation est satisfaite pour les flectovariances temporelles.

Pour les spineurs Q (spineurs ayant un indice de locovariance et de plexivariance déterminées), deux cas sont à distinguer.

1) Spineurs N et M.

(10.2) $$\underset{1\pm}{Q} \sim \underset{i\pm}{Q}$$

Donc

(10.3) $$\boxed{\underset{1\pm}{\overset{1\pm}{Q}} \sim \underset{1\pm}{\overset{i\pm}{Q}} \sim \underset{i\pm}{\overset{1\pm}{Q}} \sim \underset{i\pm}{\overset{i\pm}{Q}}}$$

2) Spineurs L et F.

(10.4) $\underset{1\pm}{Q} \sim \underset{i\mp}{Q}$

Donc

(10.5) $\boxed{\underset{1\pm}{\overset{1\pm}{Q}} \sim \underset{1\pm}{\overset{i\mp}{Q}} \sim \underset{i\mp}{\overset{1\pm}{Q}} \sim \underset{i\mp}{\overset{i\mp}{Q}}}$

Enfin, les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$ dont le second indice n'est pas covariant non pointé, se déduisent des spineurs Q invariants par une opération matricielle classique. Rappelons que ces opérations ne modifient que les locovariances et les plexivariances des spineurs considérés ; elles laissent inchangées leurs flectovariances et leurs parités internes.

IV. SPINEURS A COMPOSANTES INVARIANTES PAR RAPPORT AU GROUPE DES ROTATIONS

11.- Les matrices S, $\hat{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$.

Toute rotation peut être réalisée par une suite de rotations laissant fixes deux axes orthogonaux. Les composantes d'une grandeur sont donc invariantes par rapport aux rotations, si elles le sont par rapport aux rotations dans un plan de coordonnées quelconque.

Pour une rotation de l'angle θ laissant fixes les axes de coordonnées autre que x^k et x^m,

(11.1) $$S = \cos\frac{\theta}{2} - \gamma^k\gamma^m \sin\frac{\theta}{2} \qquad (K \neq m)$$

Calculons les matrices $\hat{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$ qui figurent dans les équations d'invariance (5.6) à (5.8). En tenant compte du fait que l'angle θ est réel si k et m sont différents de 4 et imaginaire si k ou m est égal à 4, on obtient

(11.2) $$S = \cos\frac{\theta}{2} - \gamma^k\gamma^m \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - I\gamma^k\gamma^m I^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

(11.3) $$\hat{S}^{-1} = \cos\frac{\theta}{2} - \hat{\gamma}^k\hat{\gamma}^m \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - B\gamma^k\gamma^m B^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\left.\begin{matrix}(11.2)\\(11.3)\end{matrix}\right\} = \cos\frac{\theta}{2} - D\gamma^k\gamma^m D^{-1}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(11.4) & \overset{*}{S} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\overset{*}{\gamma}{}^{k}\overset{*}{\gamma}{}^{m}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\, C\gamma^{k}\gamma^{m}C^{-1}\sin\frac{\theta}{2} \\ (11.5) & \overset{+}{S}{}^{-1} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\overset{+}{\gamma}{}^{k}\overset{+}{\gamma}{}^{m}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\, A\gamma^{k}\gamma^{m}A^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\end{array}\right\} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}D\gamma^{k}\gamma^{m}D^{-1}\sin\frac{\theta}{2}$$

avec $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1$, $\varepsilon_{\alpha 4} = \varepsilon_{4\alpha} = -1$.

Ainsi, tandis que l'on a pu déterminer simultanément tous les spineurs Q dont les composantes sont invariantes par rapport aux retournements des axes, on voit qu'ici deux cas sont à distinguer.

12.- Spineurs à indices de même plexivariance.

Les équations d'invariance (5.5) et (5.6) s'écrivent :

$$Q\left(\cos\frac{\theta}{2} - \gamma^{k}\gamma^{m}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2} - D\gamma^{k}\gamma^{m}D^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)Q \tag{12.1}$$

ou

$$D^{-1}Q.\,\gamma^{k}\gamma^{m} = \gamma^{k}\gamma^{m}.\,D^{-1}Q \tag{12.2}$$

Ainsi, $D^{-1}Q$ commute avec tous les $\gamma^{k}\gamma^{m}$. Donc

$$D^{-1}Q = \lambda I + \mu\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{4} \tag{12.3}$$

d'où

$$\boxed{Q = \lambda D + \mu D\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{4}} \tag{12.3'}$$

λ et μ étant des paramètres quelconques.

Les autres spineurs du second rang à indices de même plexivariance dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe des rotations, se déduisent des spineurs N et L invariants par une opération matricielle classique.

13.- Spineurs à indices de plexivariances différentes.

Les équations d'invariance (5.7) et (5.8) s'écrivent :

$$Q\left(\cos\frac{\theta}{2} - \gamma^{k}\gamma^{m}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}D\gamma^{k}\gamma^{m}D^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)Q \tag{13.1}$$

ou

$$D^{-1}Q.\,\gamma^{k}\gamma^{m} = \varepsilon_{km}\gamma^{k}\gamma^{m}.\,D^{-1}Q \quad .$$

Ainsi, $D^{-1}Q$ commute avec tous les $\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}$ et anticommute avec tous les $\gamma^{\alpha}\gamma^{4}$. Donc

(11.3) $$D^{-1}Q = \lambda\gamma^{4} + \mu\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$$

d'où

(13.3') $$\boxed{Q = \lambda D\gamma^{4} + \mu D\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}}$$

λ et μ étant comme précédemment des paramètres quelconques.

Les autres spineurs du second rang à indices de plexivariances différentes dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe des rotations se déduisent des spineurs P et M invariants par une opération matricielle classique.

V. SPINEURS À COMPOSANTES INVARIANTES PAR RAPPORT AU GROUPE DE LORENTZ GÉNÉRAL. FORMALISME SPINORIEL EXPLICITE.

14.- Les matrices numériques fondamentales.

Les composantes d'un spineur sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général, si elles sont invariantes par rapport au sous-groupe des retournements $x^{k} = \pm x'^{k}$ et par rapport au sous-groupe des rotations. Les spineurs Q à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général dont donc données par les équations (12.3') et (13.3'), l'un des deux paramètres λ, μ étant nul. Tous les spineurs Q à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général étant égaux à D, $D\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{4}$, $D\gamma^{4}$, $D\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$, posons :

(14.1) $$D\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{4} = D_{U} ,$$

(14.2) $$D\gamma^{4} = D_{E} ,$$

(14.3) $$D\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = D_{T} .$$

Au lieu de définir les matrices D_U, D_E, D_T à partir des matrices D, on peut les définir directement. Posons en effet

$$D\gamma^{k}D^{-1} = \hat{\gamma}^{k} \quad . \tag{14.4}$$

Les matrices D_U , D_E , D_T sont déterminées, à un coefficient arbitraire près comme les matrices D elles-mêmes, par les équations

$$D_U\gamma^{k}D_U^{-1} = -\hat{\gamma}^{k} \tag{14.5}$$

$$\left.\begin{aligned} D_E\gamma^{\alpha}D_E^{-1} &= -\hat{\gamma}^{\alpha} && (14.6a)\\ D_E\gamma^{4}D_E^{-1} &= \hat{\gamma}^{4} && (14.6b)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} D_T\gamma^{\alpha}D_T^{-1} &= \hat{\gamma}^{\alpha} && (14.7a)\\ D_T\gamma^{4}D_T^{-1} &= -\hat{\gamma}^{4} && (14.7b)\end{aligned}\right\}$$

15.- Spineurs à composantes invariantes.

Ecrivons explicitement tous les spineurs Q à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
{}^{1+}_{1+}N^{k}{}_{m} = {}^{i+}_{1+}N^{k}{}_{m} = {}^{1+}_{i+}N^{k}{}_{m} = {}^{i+}_{i+}N^{k}{}_{m} = I & , & {}^{1-}_{1-}N^{k}{}_{m} = {}^{i-}_{1-}N^{k}{}_{m} = {}^{1-}_{i-}N^{k}{}_{m} = {}^{i-}_{i-}N^{k}{}_{m} = I_U \\
{}^{1+}_{1+}L_{km} = {}^{i-}_{1+}L_{km} = {}^{1+}_{i-}L_{km} = {}^{i-}_{i-}L_{km} = B & , & {}^{1-}_{1-}L_{km} = {}^{i+}_{1-}L_{km} = {}^{1-}_{i+}L_{km} = {}^{i+}_{i+}L_{km} = B_U \\
{}^{1-}_{1+}P^{k}{}_{m} = {}^{i+}_{1+}P^{k}{}_{m} = {}^{1-}_{i-}P^{k}{}_{m} = {}^{i+}_{i-}P^{k}{}_{m} = C_E & , & {}^{1+}_{1-}P^{k}{}_{m} = {}^{i-}_{1-}P^{k}{}_{m} = {}^{1+}_{i+}P^{k}{}_{m} = {}^{i-}_{i+}P^{k}{}_{m} = C_T \\
{}^{1-}_{1+}M_{km} = {}^{i-}_{1+}M_{km} = {}^{1-}_{i+}M_{km} = {}^{i-}_{i+}M_{km} = A_E & , & {}^{1+}_{1-}M_{km} = {}^{i+}_{1-}M_{km} = {}^{1+}_{i-}M_{km} = {}^{i+}_{i-}M_{km} = A_T
\end{array}}$$

(15.1), (15.2), (15.3), (15.4), (15.5), (15.6), (15.7), (15.8) — respectivement gauche et droite de chaque ligne.

Les autres spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général se déduisent des spineurs (15.1) à (15.8) par des opérations matricielles classiques. Tous les spineurs du second rang à composantes invariantes se déduisant les uns des autres par des opérations matricielles sont de mêmes flectovariances et de mêmes parités internes.

Ainsi, à un coefficient arbitraire près, il existe 128 spineurs du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général ; 32 seulement sont distincts. Remarquons qu'il n'existe pas de spineurs du second rang à composantes invariantes de n'importe quelle variance.

16.- Formalisme explicite.

Parmi les raisons qui rendent souhaitables la connaissance des spineurs du second rang à composantes invariantes, figurait la possibilité d'obtenir, en utilisant ces spineurs, un formalisme spinoriel plus satisfaisant que le formalisme habituel.

A titre d'exemple, écrivons explicitement une équation spinorielle très simple, mais contenant une "matrice numérique" classique, telle l'équation

$$B\Psi = \Phi . \tag{16.1}$$

Les éléments de la matrice B sont bien les composantes d'un spineur, les variances étant données par (15.3). Ψ est un spineur du premier rang au sens habituel (c'est-à-dire un spineur contrevariant non pointé).Quatre cas sont à distinguer correspondant aux quatre flectovariances des spineurs du premier rang :

$$\overset{1+}{\underset{1+}{B}}{}_{km}\,\overset{1(+)}{\underset{1(+)}{\Psi}}{}^{m} = \overset{1(+)}{\underset{1(+)}{\Phi}}{}^{k} \tag{16.2}$$

$$\overset{i-}{\underset{1+}{B}}{}_{km}\,\overset{i(+)}{\underset{1(+)}{\Psi}}{}^{m} = \overset{i(-)}{\underset{1(+)}{\Phi}}{}^{k} \tag{16.3}$$

$$\overset{1+}{\underset{i-}{B}}{}_{km}\,\overset{1(+)}{\underset{i(+)}{\Psi}}{}^{m} = \overset{1(+)}{\underset{i(-)}{\Phi}}{}^{k} \tag{16.4}$$

$$\overset{i-}{\underset{i-}{B}}{}_{km}\,\overset{i(+)}{\underset{i(+)}{\Psi}}{}^{m} = \overset{i(-)}{\underset{i(-)}{\Phi}}{}^{k} \tag{16.5}$$

On voit ainsi que les réponses à de nombreuses questions, dont certaines sont classiques, peuvent être déduites des équations (15.1) à (15.8) par simple lecture. Enumérons quelques-unes de ces questions :

Quelles doivent être les parités relatives spatiale et temporelle de deux spineurs du premier rang de même locovariance, de même plexivariance et de mêmes flectovariances pour qu'il existe une forme hermitienne à coefficients constants qui soit invariante par rapport au groupe de Lorentz général ?

(Il faut qu'ils soient de même parité spatiale et de parités temporelles opposées, ou le contraire).

Même question pour les formes bilinéaires.

(Ici la réponse dépend des flectovariances. Si les flectovariances spatiale et temporelle sont différentes - $\overset{i}{\underset{1}{\Psi}}$ ou $\overset{1}{\underset{i}{\Psi}}$ - la réponse est la même que précédemment. Si les flectovariances sont les mêmes - $\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$ ou $\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$ - il faut que les deux parités soient les mêmes ou les deux opposées).

Ψ étant un spineur du premier rang contrevariant non pointé, quelles doivent être ses deux flectovariances pour qu'il soit de mêmes parités spatiale et temporelle que $B\Psi$, $B_U\Psi$; $C_E\Psi$ ou $C_T\Psi$?

$$\left(\overset{1}{\underset{1}{\Psi}} \ , \ \overset{i}{\underset{i}{\Psi}} \ , \ \overset{i}{\underset{1}{\Psi}} \ \text{ou} \ \overset{1}{\underset{i}{\Psi}} \right).$$

Pour des flectovariances convenables, le spineur Ψ est-il de mêmes parités spatiale et temporelle que $I_U\Psi$, $A_E\Psi$ ou $A_T\Psi$?

(Non)

Il serait aisé d'allonger la liste.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. PAULI : Ann. Inst. Henri Poincaré, 6, 1936, p. 109.

[2] R. BRAUER, H. WEYL : Amer. J. Math., 57, 1935, p. 425.

[3] B.L. VAN DER WAERDEN : Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 1929, p. 100.

[4] E. CARTAN : Leçons sur la théorie des spineurs. Paris, H. Hermann, 1938.

[5] H.J. BHABHA : Rev. mod. Physics, 21, 1949, p. 451.

[6] G. RACAH : Nuovo Cimento, 14, 1937, p. 322.

[7] M.S. WATANABE : Phys. Review, 84, 1951, p. 1008.

[8] J. WINOGRADZKI : C.R. Acad. Sc. Paris, 244, 1957.