Séminaire L. de Broglie. Théories physiques

A. VISCONTI

Renormalisation et états de masses des particules

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. nº 10, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1955/1956
-:-:-:-

7 février 1956

Exposé n° 10

RENORMALISATION ET ETATS DE MASSES DES PARTICULES

par A. VISCONTI.

(H. UMEZAWA and A. VISCONTI : Renormalisation and Mass-levels, Nuclear Phys., 1, 1956 p. 20)

Il est un problème que l'on peut raisonnablement se poser pour toutes les théories quantiques ayant des application, c'est le suivant : "Est-ce que l'opérateur de masse $P_\mu P_\mu$ (P_μ vecteur impulsion-énergie) a-t-il une seule valeur propre ou bien en a-t-il plusieurs ?"

On ne sait évidemment pas résoudre ce problème ni pour l'électromagnétisme ni pour aucune autre théorie mésique, mais on a un modèle, assez grossier d'ailleurs, celui de Lee, où on sait le résoudre.

Nous allons diviser cet exposé en 3 parties :

1.- Electromagnétisme quantique à un seul état de masse de l'électron.

2.- Extension au cas où plusieurs états de masse existent.

3.- Application au modèle de Lee (T.D LEE, Phys. Rev., 95, 1954, p. 1329 ; G. KALLEN and W. PAULI, Det. Kgl. Danske., Festkrift til Niels BOHR, 1955, N° 7).

1.- Electromagnétisme quantique à 1 seul état de masse de l'électron.

- Quantités non renormalisées indiquées par ^ : $\hat{\psi}$, $\hat{A}$, $\hat{e}$, $\hat{m}$
- Quantités renormalisées : ψ, A , e , m .

La renormalisation consiste en 3 changements d'échelles :

1) changement d'échelle de la fonction d'ordre du fermion :

(1) $$\psi(x) = Z_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\psi}(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) = Z_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\bar{\psi}}(x) \quad : \ Z_2 \text{ supposé réel}$$

permet de passer de la fonction d'onde de l'électron "nu" à l'électron avec son nuage de photons.

2) changement d'échelle de la fonction d'onde du photon :

(2) $$A(x) = Z_3^{-\frac{1}{2}} \ \hat{A}(x) \qquad : Z_3 \text{ réel}$$

permet de passer du photon nu au photon avec son nuage de paires d'électrons.

3) changement d'échelle intéressant la charge par l'intermédiaire du diagramme sommet corrigé :

$$\Gamma(z\ ,\ x\ ,\ x') = Z_1^{-1} \ \hat{\Gamma}(z\ ,\ x\ ,\ x')$$

c'est-à-dire

$$e \ \bar{\Psi}(x)\ A(z)\ \Psi(x') = Z_1^{-1}\ e\ \hat{\bar{\Psi}}(x)\ \hat{A}(z)\ \Psi(x')$$

d'où

(3) $$e = Z_1^{-1}\ Z_2\ Z_3^{\frac{1}{2}}\ \hat{e} \ .$$

Le lagrangien non renormalisé est invariant de jauge :

$$\hat{\Psi} \longrightarrow \hat{\Psi}' = e^{-ie\hat{\Lambda}}\ \hat{\Psi} \qquad , \qquad \hat{A} \longrightarrow \hat{A}' = A + \frac{\partial\hat{\Lambda}}{\partial x_\mu}$$

et il doit en être de même pour celui renormalisé :

$$\Psi' = e^{-i\ Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} e\ \hat{\Lambda}}\ \Psi \qquad ; \qquad A' = A + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{ Z_3^{-\frac{1}{2}} \hat{\Lambda} \right\}$$

d'où

$$\Lambda = Z_3^{-\frac{1}{2}}\ \hat{\Lambda} \qquad ; \qquad Z_1\ Z_2^{-1} = 1$$

d'où

(4) $$Z_1 = Z_2$$

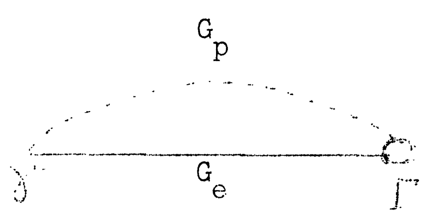
Enfin, Z_2 et Z_3 représentant de probabilités, il faut que :

(5) $$0 \leqslant Z_1\ ,\ Z_3 < 1 \ .$$

Comment se présente la renormalisation de masse ? Le propagateur d'un électron a pour forme dans l'espace des moments :

(6) $$G^{-1}(p) = -i\ Z_2^{-1}(i\gamma p + m + \mathcal{M}(-\ i\gamma p) \equiv i\ Z_2^{-1}(-\ i\gamma p - m - \mathcal{M}(-\ i\gamma p))$$

m : masse mécanique, $\mathcal{M}(-\ i\gamma p)$ noyau opérateur de masse représenté par le diagramme



soit m' la masse expérimentale :

(7a) $\mathfrak{M}(-i\gamma p) = Z_2\,[A + B(i\gamma p + m') + (i\gamma p + m')\sum_c (i\gamma p)]$

ou changeant $-i\gamma p$ en x :

(7b) $\mathfrak{M}(x) = Z_2\,[A + B(-x + m') + C(-x + m')\sum_c (-x)]$

le facteur Z_2 provient du sommet gauche non renormalisé, $\sum_c$ quantité finie. On a :

(8)
a) $Z_2 A \equiv \delta m = \mathfrak{M}(m')$

b) $Z_2 B = -\left.\dfrac{\partial \mathfrak{M}(x)}{\partial x}\right|_{x = +m'}$ on remplace $-i\gamma p$ par x .

avec :

$$m' = m + \delta m = m + \mathfrak{M}(m')$$

donc <u>masse expérimentale</u> m' racine de l'équation :

(9) $$x - m - \mathfrak{M}(x) = 0 \quad .$$

Le propagateur s'écrit :

$$G^{-1}(p) = i\,Z_2^{-1}(-i\gamma p - m - \delta m - Z_2\,B(i\gamma p + m') - (i\gamma p + m')\sum_c (i\gamma p)) =$$

$$= -i\,Z_2^{-1}(i\gamma p + m')(1 + Z_2\,B + Z_2\sum_c (i\gamma p))$$

Déterminons Z_2 de telle sorte que :

(10) $$1 + Z_2\,B = Z_2$$

$G^{-1}(p)$ ne contient plus d'infini et s'écrit :

(11) $$G^{-1}(p) = -i(i\gamma p + m')(1 + \sum_c (i\gamma p))$$

10 et 8b donnent :

(12) $$Z_2 = 1 - \left.\frac{\partial \mathfrak{M}(x)}{\partial x}\right|_{x = +m'} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{x - m - \mathfrak{M}(x)\right\}_{x = +m'} \quad .$$

2.- <u>Etude d'une théorie à plusieurs états de masse</u>.

On considère une théorie à plusieurs états de masse où :

(13) $$P_\mu^2\,(m_j^2) = (\vec{P}^2 - P_0^2)\,|\,m_j^2 > = m_j^2\,|\,m_j^2 >$$

P_μ vecteur impulsion-énergie, le spectre de P_μ^2 est supposé être la réunion de deux spectres : un discret :

$$m_1 < m_2 < \dots m_N \leqslant C$$

un spectre continu.

Le propagateur dans l'espace des impulsions

$$G(p) = \frac{-i}{-i\gamma p - m - \mathfrak{M}(-i\gamma p)} \tag{14}$$

correspond à la fonction du nombre $x (x \to -i\gamma p)$:

$$\frac{-i}{x - m - \mathfrak{M}(x)} . \tag{15}$$

Les racines de :

$$x - m - \mathfrak{M}(x) = 0 \tag{16}$$

qui sont en même temps valeurs propres appartenant au spectre discret de P_μ^2 définissent les états de masse de la théorie. Nous supposons que $m_1 \dots m_N$ sont ces racines et qu'elles sont toutes simples.

D'autre part :

$$\frac{1}{x-m-\mathfrak{M}(x)} = \frac{1}{a(x)} \prod_1^N \frac{1}{x-mj} = \frac{1}{a(x)} \sum_1^N \frac{bj}{x-mj} \tag{17}$$

$a(x)$ ne s'annule par aucun des mj . Une identification du produit $\prod_1^N \frac{1}{x-mj}$ avec $\sum_1^N \frac{bj}{x-mj}$ donne :

$$bj = \prod_{\rho=1}^N \frac{1}{mj-m} = \frac{a(mj)}{\frac{\partial}{\partial x}\left\{x-m-\mathfrak{M}(x)\right\}_{x=mj}} = Z_j\, a(mj) \tag{18}$$

Posant d'autre part :

$$a(x) = xa_1(x^2) - a_2(x^2) \tag{19}$$

$a_1(x^2)$ fonction impaire

$a_2(x^2)$ fonction paire

on a finalement :

$$\frac{1}{x-m-\mathfrak{M}(x)} = \frac{x\, a_1(x^2) + a_2(x^2)}{x^2 \varepsilon_1^2 - a_2^2} \sum bj \frac{x + mj}{x^2 - m^2 j} \tag{20}$$

revenant à $x = -i\gamma p$:

$$(21) \qquad \frac{1}{-i\gamma p - m - \mathcal{M}(-i p)} = \frac{-i\gamma p\, a_1(p^2) + a_2(-p^2)}{p^2 a_1^2(-p^2) + a_2^2(-p^2)} \sum b j \times \frac{-i\gamma p + m j}{+p^2 + m^2 j}$$

Revenant à l'espace x , il vient :

$$(22) \quad G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_L \frac{e^{ipx}}{-i\gamma p - m - \mathcal{M}(-i\gamma p)}\, d^4 p =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_L e^{ipx} \frac{i\gamma p\, a_1 - a_2}{p^2 a_1^2 + a_2^2} \sum bj \frac{i\gamma p - mj}{p^2 + m^2 j}\, d^4 p \;.$$

Quel que soit le contour d'intégration, nous devons le compléter par le demi-cercle de l'infini, par des coupures de façon à ce que le premier facteur soit holomorphe et enfin par des circonférences autour des points $p\,0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 j}$ avec $\pm$ suivant que $x_0 = -ix_4 \gtrless 0$. Ces dernières intégrations peuvent se faire suivant l'axe réel si on y ajoute le facteur $\delta_+(p^2 + mj)$ à chacune de ces intégrales.

On a alors :

$$(23) \quad G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} \frac{i\gamma p\, a_1 - a_2}{p^2 a_1^2 + a_2^2} \sum bj \frac{i\gamma p - mj}{p^2 + m^2 j} \delta_+(p^2 + m^2 j)\, d^4 p$$

$$+ \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_c \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; d^4 p$$

le chemin $\mathcal{C}$ représentant la réunion de tous les chemins qui ne sont pas inclus dans la première intégrale.

La première intégrale de 23 , compte tenue de δ_+ s'écrit :

$$(24) \qquad \frac{-i}{(2\pi)^4} \sum bj \int e^{ipx} \frac{i\gamma p\, a_1(m^2 j) - a_2(m^2 j)}{-m^2 j\, a_1(m^2 j) + a_2^2(m^2 j)} \frac{i\gamma p - mj}{p^2 + m^2 j} \delta_+(p^2 + m^2 j)\, d^4 p$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \sum bj \int e^{ipx} \frac{1}{mj\, a_1(mj) - a_2(m^2 j)} \frac{i\gamma p - mj}{p^2 + m^2 j} \delta_+(p^2 + m^2 j)\, d^4 p$$

$$= + \sum \frac{bj}{a(m^2 j)} S_F(mj \; ; \; x) \;.$$

ou bien :

$$(25) \qquad G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ipx}}{-i\gamma p - m - \mathfrak{M}(-i\,p)} \, d^4p \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \sum Zj \int e^{ipx} \, \frac{a(mj)}{a(i\gamma p)} \, \frac{1}{i\gamma p + mj} \, d^4p = \sum Zj \, \frac{a(mj)}{a(m^2j)} \, S_c(x\,,\,mj) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; d^4p$$

Nous allons écrire la contribution du pôle mj sous une autre forme en considérant le système de vecteurs propres : p de P_μ :

$$P_\mu \,|\, p \rangle = p_\mu \,|\, p \rangle$$

pour $x_0 - x'_0 > 0$ on a par définition :

$$(26) \qquad G(x - x') = \langle 0 \,|\, \Psi(x) \; \bar{\Psi}(x') \,|\, 0 \rangle = \sum_p \langle 0 \,|\, \Psi(x) \,|\, p \rangle\langle p \,|\, \bar{\Psi}(x') \,|\, 0 \rangle$$
$$= \sum_p \langle 0 \,|\, \Psi(0) \,|\, p \rangle\langle p \,|\, \bar{\Psi}(0) \,|\, 0 \rangle \; e^{ip(x-x')}$$

puisque l'équation d'onde de $\Psi(x)$: $\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} = i\,[P_\mu\,,\Psi(x)]$ a pour solution

$$(27) \qquad \Psi(x) = e^{iP_\mu x_\mu} \; \Psi(0) \; e^{-iP_\mu x'_\mu} \quad .$$

La contribution des impulsions $\mathcal{P}^{(j)}$ telles que :

$$(28) \qquad \mathcal{P}^{(j)}_\mu \; \mathcal{P}^{(j)}_\mu = - m^2 j$$

est donc :

$$(29) \qquad \sum_{(j)} \langle 0 \,|\, \Psi(0) \,|\, \mathcal{P}^{(j)} \rangle\langle \mathcal{P}^{(j)} \,|\, \bar{\Psi}(0) \,|\, 0 \rangle \quad e^{i\,\mathcal{P}^{(j)}(x-x')}$$

que nous écrirons sous la forme :

$$(30) \qquad \sum e^{i\,\mathcal{P}^{(j)}(x-x')} \; (i\,\gamma\,\mathcal{P}^{(j)} + mj) \;\; \lambda(m^2 j) \quad .$$

D'après (25) la contribution du pôle mj est :

$$Zj \, \frac{a(mj)}{a(m^2 j)} \; S_F(x - x'\,,\,mj)$$

pour $x_0 - x'_0 >$, cette expression s'écrit :

$$(31) \qquad \frac{1}{(2\pi)^3} \sum \frac{bj}{a(m^2 j)} \int e^{i[\mathcal{P}(x-x') - \mathcal{P}_0^{(j)}(x_0 - x_0')]} \frac{(i\gamma\mathcal{P}^{(j)} + mj)}{\mathcal{P}_0^{(j)}} d^3 \mathcal{P}_0^{(j)}$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\mathcal{P}j} \frac{bj}{a(m^2 j)} \frac{(i\gamma\mathcal{P}^{(j)} + mj)}{\mathcal{P}_0^{(j)}} e^{i\mathcal{P}^{(j)}(x-x')}$$

par suite :

$$(32) \qquad \frac{1}{V} \frac{bj}{a(m^2 j)\,\mathcal{P}_0^{(j)}} = \lambda(mj)$$

Or il est facile de voir que $\lambda(mj) > 0$, par suite :

1) $a(m^2 j)$ doit être imaginaire pur, si $a(x) = \mathcal{R}a(x) + i\,\mathcal{J}a(x)$, la formule de Hilbert donne

$$(33) \qquad P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}a(\xi)}{\xi - m^2 j}\, d\xi = 0 \;.$$

2) bj d'après (16) change de signe chaque fois que j varie d'une unité ; par suite $a(x)$ doit changer de signe chaque fois que x passe pour une des valeurs m_1 , m_2 ... m_N . Il doit donc avoir des zéros ou des singularités dans chaque intervalle m_1 , m_2 ; ... Mais si m_1 , m_2 , ... sont les seules racines du propagateur pour $x \leq C$, il s'ensuit que $a(x)$ doit avoir des singularités dans ces domaines. Si de plus $a(x)$ est holomorphe dans ce domaine, il y a là une contradiction évidente : l'hamiltonien cesse d'être hermitien et par suite la matrice S cesse d'être unitaire. En effet, prenons la trace de (34) :

$$\lambda(m^2 j) = \frac{1}{4mj} \operatorname{tr} \langle 0 \,|\, \Psi_\alpha(0) \,|\, \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} \,|\, \bar{\Psi}_\beta(0) \,|\, 0 \rangle$$

et par suite :

$$bj \sim \frac{1}{4mj} \operatorname{tr} \langle 0 \,|\, \Psi_\alpha(0) \,|\, \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} \,|\, \Psi_\beta(0) \,|\, 0 \rangle$$

avec un facteur de proportionalité positif. Chaque fois donc qu'on rencontre un bj négatif $\bar{\Psi}$ n'est pas le conjugué de Ψ

Remarque : Calculons : $\lambda(m^2 j)$, on a :

(34) $$\langle 0 \mid \Psi_\alpha(0) \mid \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} \mid \Psi_\beta(0) \mid 0 \rangle = (i\gamma \mathcal{P}^{(j)} + mj)_{\alpha\beta}\, \lambda(m^2 j)$$

pas de sommations sur $\mathcal{P}^{(j)}$. Multiplions à droite et gauche respectivement par :

$$i(\gamma\rho)_{\mu\alpha}\, \mathcal{P}^{(j)}_\rho \qquad \text{et} \qquad -i(\gamma_\sigma)_{\beta\nu}\, \mathcal{P}^{(j)}_\sigma$$

il vient :

$$0 \leqslant (\gamma\rho)_{\mu\alpha}\, \mathcal{P}^{(j)}_\rho \langle 0 \mid \Psi_\alpha(0) \mid \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} \mid \Psi^\dagger_\beta(0) \mid 0 \rangle (\gamma_4)_{\beta\rho} (\gamma_\sigma)_{\rho\nu}\, \mathcal{P}^{(j)}_\sigma$$

expression positive puisque produit de matrices adjointes. Effectuons les produits et prenant les traces ; il vient :

$$\lambda(m^2 j) > 0 \quad .$$

3.- Modèle de Lee.

3 types de particules : Ψ_V , Ψ_N , φ pour les particules θ :

(35a) $$\mathcal{L}_0 = m_V \bar{\Psi}_V \Psi_V + m_N \bar{\Psi}_N \Psi_N + \tfrac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu \varphi)^2 + \mu^2 \varphi \right\}$$

(35b) $$\mathcal{L}_1 = g(\bar{\Psi}_V \Psi_N \varphi^+ + \bar{\Psi}_N \Psi_V \varphi^-)$$

le premier terme de $\mathcal{L}_1$ correspond à :

(36a) $$N + \theta \longrightarrow V$$

le deuxième à :

(36b) $$V \longrightarrow N + \theta$$

la seule réaction possible est donc la transmutation de V en N et θ .

Le calcul des corrections radiatives par les propagateurs $G^{(0)}_V(p)$, $G^{(0)}_N$, $G^{(0)}_\varphi$ se font commodèment en schéma d'interaction.
Les équations d'ondes sont :

$$i \frac{\partial \Psi_V}{\partial t} = m_V \Psi_V \quad , \quad i \frac{\partial \Psi_N}{\partial t} = m_N \Psi_N \quad ; \ (\Box - \mu^2)\, \varphi = 0$$

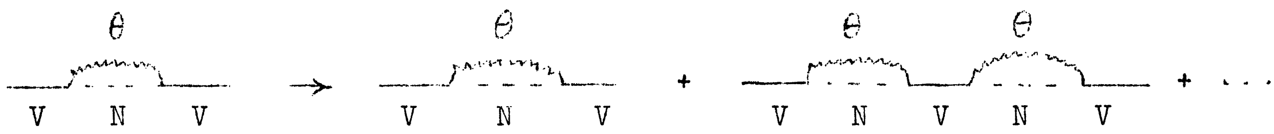
les propagateurs non corrigés peuvent s'écrire en représentation p :

(37) $$G^{(0)}(p_0) = \frac{1}{p_0 - m_V + i\varepsilon} \quad ; \ G^{(0)}_N(p_0) = \frac{1}{p_0 - m_N + i\varepsilon} \quad ; \ G^{(0)}(p) = -\frac{1}{p_\mu^2 + \mu^2}$$

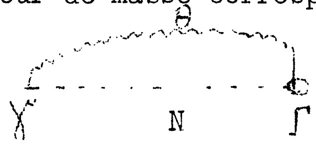
m_V , m_N , μ sont les masses expérimentales.

$G_N^{(0)}$ et $G_\theta^{(0)}$ n'ont pas de corrections radiatives, car ni N ni θ ne peuvent se désintégrer.

La correction radiative à apporter au propagateur $G_V^{(0)}$ est donné par l'itération du diagramme.



Le noyau de l'opérateur de masse correspond au diagramme :



les propagateurs G_N et G_θ sont corrigés, d'autre part $\Gamma = \gamma$ puisque comme on l'a dit N et θ ne peuvent rien émettre.

On a :

$$\mathfrak{M}(x) = G_N(x)\, G_\theta\,(x)$$

dont le transformé de Fourier est :

$$\mathfrak{M}(p_0) = -\,g^2 \int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{\omega(\omega - p_0 + m_N)} \tag{38}$$

où :

g est mis pour $g/2\pi$

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}\ .$$

$\mathfrak{M}(p_0)$ est infini .

Considérons le propagateur $G_V(p_0)$ en schéma de Heisenberg :

$$G_V^{-1}(p_0) = p_0 - m_V - \mathfrak{M}(p_0) \tag{39}$$

Nous désignons maintenant par m_V la masse mécanique $= m'_V - \delta m'_V$ de sorte que en vertu de (8a) :

$$G_V^{-1}(p_0) = [p_0 - m'_V + \delta m'_V - \mathfrak{M}(p_0)] = [p_0 - m'_V + \mathfrak{M}(m'_V) - \mathfrak{M}(p_0)] \tag{40}$$

$$= (p_0 - m'_V)\ \left(1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{\omega(\omega - p_0 + m_N)(\omega - m'_V + m_N)}\right)$$

Cherchons la condition pour que $G_V^{-1}(p_0)$ définisse une deuxième masse m''_V : $G_V^{-1}(m''_V) = 0$ c'est-à-dire :

$$(41) \qquad 1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m'_V + m_N)(\omega - m''_V + m_N)} = 0$$

Remplaçons en 40, le nombre 1 tiré de (41), il vient :

$$(42) \qquad G_V^{-1}(p_0) = g^2(p_0 - m'_V)(p_0 - m''_V) \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m'_V + m_N)(\omega - m''_V + m_N)(\omega - p_0 + m_N)}$$

$$= (p_0 - m'_V)(p_0 - m''_V)\; a(p_0)$$

et nous rencontrons la première intégrale finie. Mais g^2 d'après (41) est infini, nous aurons besoin donc d'une deuxième renormalisation celle de la constante de couplage :

$$(43) \qquad g_C^2 = Z\, g^2 \qquad \begin{cases} g_C'^2 = Z'\, g^2 \\ g''_C = Z''\, g^2 \end{cases}$$

avec :

$$(44a) \qquad Z'^{-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ x - m_V - \mathcal{M}(x)\right\}_{x = m'_V} = 1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m'_V + m_N)^2}$$

$$(44b) \qquad Z''^{-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ x - m_V - \mathcal{M}(x)\right\}_{x = m''_V} = 1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m''_V + m_N)^2}$$

ou :

$$(45a) \qquad Z' = 1 - g_C'^2 \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m'_V + m_N)^2} \qquad \frac{1}{g_C'^2} = \frac{1}{g^2} + \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m'_V + m_N)^2}$$

$$(45b) \qquad Z'' = 1 - g''^2_C \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m''_V + m_N)^2} \qquad \frac{1}{g''^2_C} = \frac{1}{g^2} + \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m''_V + m_N)^2}$$

Introduisons g'_C dans la condition de compatibilité (41) et exprimons Z' et Z'' à l'aide des formules précédentes, cette condition de compatibilité s'exprime entre termes finis et devient :

(46a) $$1 - g_C'^2 (m_V' - m_V'') \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2 (\omega - m_V'' + m_N)} = 0$$

(46b) $$1 - g_C''^2 (m_V'' - m_V') \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N) (\omega - m_V'' + m_N)^2} = 0$$

Une des conditions de renormalisation sera l'existence de g_C satisfaisant aux équations 46 .

Discussion. Toutes les complications qui apparaissent dans ce modèle proviennent de l'apparition de la deuxième masse m_V'' .

Supposons que $m_V'' < m_V'$ ($< \mu + m_N$ pour que la particule V soit stable), l'équation 46a admet alors une solution en $g_C'^2$ positive :

(47) $$g_C'^2 = \frac{1}{m_V' - m_V''} \quad \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2 (\omega - m_V'' + m_N)}}$$

mais (46b) admet une solution $g_C''^2$ négative : il est donc impossible que les deux constantes de couplage sont à la fois réelles

1) L'hamiltonien n'est plus un opérateur hermitien, la matrice S n'est plus unitaire.

2) Z' et Z" , qui doivent être compris entre 0 et 1 , sont tous deux infinis.

3) Supposons que nous ayons une coupure des impulsions à K : les contradictions (1) et (2) demeurent, mais on peut y échapper pour certaines valeurs de g_C' . En effet, pour m_V' donné, la plus petite valeur que peut prendre $g_C'^2$ correspond à $m_V'' = \pm \infty$ et elle s'écrit :

$$g = \lim_{m_V'' = \infty} \frac{1}{\frac{m_V'}{m_V''} - 1} \quad \frac{1}{\displaystyle\int_0^K \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2 (\frac{\omega}{m_V''} - 1 + \frac{m_N}{m_V''})}}$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\int_0^K \frac{k^2\, dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2}}$$

si donc dans une théorie à facteur de forme $g_C < g_{cr.}$, les équations (46a et b) ne peuvent être satisfaites, il n'y a donc qu'un seul état de masse m'_V et Z' qui lui correspond est > 0 ainsi que g'_C et g. Bien que le modèle de Lee soit trop simple pour servir de fil directeur valable à l'étude des infinis en électromagnétisme et théories mésiques, le fait que nous avons rencontré une valeur de la constante de couplage au-dessous de laquelle la théorie est exempte de contradictions vaut peut être la peine d'être noté.