

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

O. COSTA DE BEAUREGARD

Diffraction par une ouverture plane à contour variable

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. n° 9, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A8_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE PLANE A CONTOUR VARIABLE,

par O. COSTA de BEAUREGARD.

1.- AVERTISSEMENT.

Ce qui suit offre un exemple frappant de "statification" d'un problème de régime variable grâce au langage de la géométrie quadridimensionnelle de Minkowski. L'énoncé, et la solution que nous proposons pour ce problème sont à verser au dossier de la synthèse des formalismes de la relativité restreinte et de la théorie des quanta.

On verra que l'équation intégrale, ou intégré-différentielle du problème est à noyau hyperbolique "normal" ; ceci représente un type de problèmes encore peu étudié par les mathématiciens. Mais le fait est que la nature résout aisément de tels problèmes, comme il ressort de l'exemple même que nous proposons. Laissant ici de côté la question de l'intégration de l'équation fondamentale du problème, c'est à la formulation précise de celui-ci que nous nous attacherons.

2.- DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE D'UNIVERS TRIDIMENSIONNELLE PLANE.

∂_λ^λ désignant l'opérateur d'Alembertien, avec $\lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$ et $x_4 = ix_0 = ict$, nous considérons les solutions scalaires complexes $\psi(x)$ de l'équation de Gordon

$$(1) \quad (\partial_\lambda^\lambda - k^2) \psi(x) = 0,$$

où k désigne la fréquence propre ou scalaire des ondes ψ , liée à la masse propre m des corpuscules qu'elle peut porter par la formule de L. de Broglie

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{h} cm.$$

Nous voulons étudier la diffraction de ces ondes ψ par un écran-plan infiniment mince, pourvu d'une ouverture \mathcal{O} à contour variable \mathcal{C} , qui sera initialement et finalement fermée, d'équations respectives

$$(3) \quad x_1 = 0 \quad \mathcal{C}(x_2, x_3, x_0) = 0.$$

Dans l'espace-temps, nous avons un écran-plan parallèle aux trois axes x_2, x_3, x_0 et percé d'une ouverture \mathcal{O} tridimensionnelle.

Manifestement, les précédentes formules étendent à l'espace minkowskien à 4 dimensions le classique problème de la diffraction euclidienne en régime permanent et monochromatique [1]. Comme d'habitude, nous allons traiter en parallèle les cas de l'écran parfaitement "mou" (m) ou "dur" (d) (suivant la terminologie du problème acoustique).

3.- FORMULES GÉNÉRALES DU PROBLÈME.

Dans la région d'incidence $x_1 \leq 0$, le Ψ total est la somme de trois ondes : l'onde incidente ψ^i , l'onde ψ^r qui serait réfléchiée par l'écran sans ouverture, et l'onde ψ diffractée par l'ouverture. Dans la région d'émergence $x_1 \geq 0$, Ψ se réduit au ψ diffracté. Si x^\uparrow désigne un vecteur x_2, x_3, x_0 parallèle à l'écran, l'on a [1] pour $x_1 \leq 0$

$$(4m) \Psi^m = \psi^{im}(x_1, x^\uparrow) - \psi^{im}(-x_1, x^\uparrow) + \psi^m(-x_1, x^\uparrow)$$

$$(4d) \Psi^d = \psi^{id}(x_1, x^\uparrow) + \psi^{id}(-x_1, x^\uparrow) - \psi^d(-x_1, x^\uparrow),$$

c'est-à-dire :

$$(5) \psi^{r;m,d}(x_1, x^\uparrow) = \mp \psi^{i;m,d}(-x_1, x^\uparrow), \psi^{m,d}(x_1, x^\uparrow) = \pm \psi^{m,d}(-x_1, x^\uparrow);$$

et, pour $x_1 \geq 0$, $\Psi^{m,d} = \psi^{m,d}$. De plus, les conditions aux limites pour $x_1 = 0$ [1] sont $(\partial_1 \equiv \partial/\partial x^1)$

$$(6m) \psi^m = 0 \text{ hors de } \mathcal{O}, \partial_1 \psi^m = \partial_1 \psi^{im} \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(6d) \partial_1 \psi^d = 0 \text{ " } \mathcal{O}, \psi^d = \psi^{id} \text{ " } \mathcal{O}.$$

Suivant toujours le schème classique [1], postulons que le ψ diffracté est (A) partout fini et (B) partout solution de l'équation de Gordon. Il suit de là [5, 9] que, η désignant l'hyperboloïde à deux nappes

$$(7) \eta(k) \equiv k_\lambda k^\lambda + k^2 = 0,$$

dont l'élément de volume $d\eta_\lambda$ et le module $d\eta$ de celui-ci sont définis suivant (1)

$$(8) id\eta_\lambda = [dk_\mu dk_\nu dk_\rho], k_\lambda d\eta = k d\eta_\lambda \quad (k > 0, d\eta > 0),$$

le développement de Fourier de ce ψ est de la forme (1)

$$(9) \psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta} \tilde{\psi}(k) d\eta$$

(1)

Du fait de la nature du problème, nos notations et définitions diffèrent icilégèrement de celles de notre étude [9].

Postulons encore (C) que, dans un problème de prédiction, et tout au moins en ce qui concerne la décomposition spectrale du Ψ diffracté, l'on a essentiellement $k_1 \geq 0$ et que, dans un problème de rétrodictioin, $k_1 \leq 0$. Décomposons alors l'hypersurface η en quatre parties η_{\pm}^{\pm} , l'indice supérieur se référant au signe de k_1 et l'indice inférieur à celui de $k_0 = -i k_4$. Les notations ζ_{\pm}^{\pm} et k_{\pm}^{\pm} s'entendent d'elles-mêmes, et

$$(10) \quad \eta^{\pm} = \eta_{-}^{\pm} + \eta_{+}^{\pm}, \quad \Psi^{\pm} = \Psi_{-}^{\pm} + \Psi_{+}^{\pm}.$$

En faisant jouer la formule (8₂) pour $\lambda = 1$, et posant

$$(11) \quad k \hat{\cdot} x \hat{\cdot} \equiv k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_0 x_0,$$

$$(12) \quad d\eta \equiv dk_2 dk_3 dk_0 \quad \underline{\text{réel positif}},$$

(9) se récrit suivant

$$(13) \quad \Psi^{\pm}(x) = \pm k(2\hat{\eta})^{-3/2} \iiint_{k_1=0} e^{i(k_1 x_1 + k \hat{\cdot} x \hat{\cdot})} \frac{\zeta_{\pm}^{\pm}(k \hat{\cdot})}{k_1^{\pm}} d\eta_1,$$

ou équivalamment

$$(14) \quad \partial_1 \Psi^{\pm}(x) = \pm ik(2\hat{\eta})^{-3/2} \iiint_{k_1=0} e^{i(k_1 x_1 + k \hat{\cdot} x \hat{\cdot})} \zeta^{\pm}(k \hat{\cdot}) d\eta_1.$$

Pour $x_1 = 0$, ces formules se réduisent à

$$(15) \quad \Psi^{\pm}(x \hat{\cdot}) = \pm k(2\hat{\eta})^{-3/2} \iiint_{k_1=0} e^{ik \hat{\cdot} x \hat{\cdot}} \frac{\zeta_{\pm}^{\pm}(k \hat{\cdot})}{k_1^{\pm}} d\eta_1,$$

$$(16) \quad \partial_1 \Psi^{\pm}(x \hat{\cdot}) = \pm ik(2\hat{\eta})^{-3/2} \iiint_{k_1=0} e^{ik \hat{\cdot} x \hat{\cdot}} \zeta^{\pm}(k \hat{\cdot}) d\eta_1;$$

postulons alors (D) que ces deux intégrales de Fourier ont des réciproques, qui devront être validées en norme L_2 . Celles-ci s'écrivent

$$(17) \quad \frac{\zeta_{\pm}^{\pm}(k \hat{\cdot})}{k_1^{\pm}} = \pm \frac{(2\hat{\eta})^{-3/2}}{k} \iiint_{x_1=0} e^{-ik \hat{\cdot} x \hat{\cdot}} \Psi^{\pm}(x \hat{\cdot}) d\sigma_1,$$

$$(18) \quad \zeta^{\pm}(k \hat{\cdot}) = \pm \frac{(2\hat{\eta})^{-3/2}}{ik} \iiint_{x_1=0} e^{-ik \hat{\cdot} x \hat{\cdot}} \partial_1 \Psi^{\pm}(x \hat{\cdot}) d\sigma_1,$$

avec

$$(19) \quad d\sigma_1 \equiv dx_2 dx_3 dx_0 \quad \underline{\text{réel positif}}.$$

Posant

$$(20) \quad D^\pm(x) \equiv \frac{i(2\pi)^{-3}}{k} \iiint_{\eta^\pm} e^{ik^\lambda x_\lambda} d\eta^\pm,$$

et substituant (17) et (18) dans (13), nous obtenons les formules de Rayleigh généralisées

$$(21m) \quad \Psi^\pm(y) = - \iiint_{x_1=0} \Psi^\pm(x^\uparrow) \frac{\partial}{\partial x_1} D^\pm(y-x) d\sigma_1 = \\ = \frac{\partial}{\partial y_1} \iiint_{x_1=0} \Psi^\pm(x^\uparrow) D^\pm(y-x) d\sigma_1,$$

$$(21d) \quad \Psi^\pm(y) = \iiint_{x_1=0} D^\pm(y-x) \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi^\pm(x^\uparrow) d\sigma_1,$$

respectivement adaptées aux cas "mou" et "dur", comme on le voit grâce aux (6).

Introduisant le courant de Gordon

$$(22) \quad j^\lambda(x) = -\frac{i}{2k} \Psi^* [\partial^\lambda] \Psi, \quad [\partial^\lambda] \equiv \frac{\partial^\lambda}{\rightarrow} - \frac{\partial^\lambda}{\leftarrow},$$

le postulat (D) exige que l'on ait

$$(23) \quad \iiint_{x_1=0} j_1^\pm d\sigma_1 = \pm k \iiint_{k_1=0} \frac{\zeta^* \zeta}{k_1} d\eta_1,$$

c'est-à-dire, dans les deux cas "mou" et "dur",

$$(24) \quad \iiint_{\mathcal{U}} j_1^\pm d\sigma_1 = \pm \iiint_{\eta^\pm} \zeta^* \zeta d\eta.$$

4.- L'ÉQUATION INTÉGRALE OU INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DU PROBLÈME, à noyau hyperbolique, s'obtient en faisant $y_1 = 0$ dans les (21), en prenant y^\uparrow dans \mathcal{U} , et en tenant compte des (6) ainsi que de l'équation de Gordon. Il vient ainsi, dans les cas respectivement "dur" et "mou",

$$(25a) \quad \iiint_{\mathcal{U}} G(y^\uparrow - x^\uparrow) \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi^{d^\pm}(x^\uparrow) d\sigma_1 = \Psi^{id},$$

$$(25m) \quad (k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}) \iiint_{\mathcal{U}} \Psi^{m^\pm}(x^\uparrow) G(y^\uparrow - x^\uparrow) d\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi^{im};$$

On a posé

$$(26) \quad G(x \uparrow) \equiv \lim_{x_1=0} D^\pm(x).$$

Ainsi, dans l'ouverture \mathcal{O} , la vibration ψ "tate" le contour \mathcal{C} par ondes à énergies positives et négatives. La complète symétrie des formules entre avenir et passé est typique des problèmes quantiques. La compatibilité de ce caractère avec l'exclusion macroscopique des ondes convergentes ou avancées se démontre aisément, comme nous le rappellerons dans la suite (n° 7,8,11).

Le problème ici considéré s'apparente en somme au problème de Dirichlet pour les équations du type elliptique. La grande différence entre le problème actuel et le problème de Cauchy, que nous avons récemment abordé par une méthode également basée sur les intégrales de Fourier réciproques [9], est qu'il n'y a pas alors d'analogues aux conditions (25), le ψ et sa dérivée normale pouvant être choisis arbitrairement sur la "porteuse des données".

Le second membre imposé des (25) traduit ce qu'il y a de "forcé" dans la vibration $\psi(y \uparrow)$, tandis que l'équation (25) elle-même traduit l'aspect résonant de cette vibration.

Nous remettons à une étude à venir une discussion de l'intégration des équations (25).

5.- CAS PARTICULIER CLASSIQUE DU RÉGIME PERMANENT ET MONOCHROMATIQUE.

Le contour \mathcal{C} et l'onde incidente ψ^i sont alors invariants par une translation parallèle au temps. D'autre part, le ψ^i ne dépendant du temps que par un facteur $e^{i(k_0 - k_{00})x_0}$ où k_{00} désigne une constante positive, une fonction de Dirac $\delta(k_0 - k_{00})$ s'introduit; toutes les précédentes intégrales triples se réduisent aux intégrales doubles bien connues de la théorie classique [1], impliquant les éléments

$$(27) \quad d\eta^i = dk_2 dk_3, \quad d\sigma^i = dx_2 dx_3,$$

ainsi que l'élément d'aire $d\eta^i$ sur la sphère

$$(28) \quad k_\alpha k^\alpha = k_{00}^2 - k^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Dans le cas d'un contour \mathcal{C} lentement variable, deux approximations seront légitimes : on pourra 1°) remplacer c^{-2} par zéro, et 2°) négliger l'étalement des fréquences résultant de la 4e relation d'incertitude. Autrement dit,

l'on pourra se servir des formules de la théorie classique, [1] la dépendance du temps du Ψ diffracté ne s'introduisant que par la variation des limites dans l'équation intégrale, ou intégral-différentielle, du problème.

6.- PRÉDICTION ET RÉTRODICTION. NORMALISATION DE L'ONDE Ψ .

Supposons que, dans l'onde incidente Ψ^i , la composante j_1^i du courant de Gordon soit essentiellement positive ; il suit alors des (4) et (5) que, dans l'onde Ψ^r réfléchi par l'écran sans ouverture, la composante j_1^r du courant de Gordon est essentiellement négative, et qu'on a la relation

$$(29) \quad j_1^i + j_1^r = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0 .$$

Raisonnons dans le cas toujours très instructif où un seul corpuscule est présent. Dans un problème de prédiction, l'onde Ψ^i sera, loin dans le passé et dans la région $x_1 \leq 0$, normée à l'unité ; de même, dans un problème de rétrodiction, l'onde Ψ^r sera, loin dans le futur et dans la région $x_1 \leq 0$, normée à l'unité. Il résulte des (4) et (5) que les deux normalisations sont obtenues à la fois, et il suit des hypothèses faites qu'elles peuvent s'écrire

$$(30) \quad \iiint_{x_1=0} j_1^{i,r} d\sigma_1 = \pm 1 ;$$

remarquons en passant que l'expression $j_1(x\hat{1})$ généralise l'expression fresnellienne $\Psi^* \Psi$ de l'intensité.

Ψ^\pm désignant l'onde diffractée précédemment définie, la probabilité p_+ de prédiction pour qu'un corpuscule initialement présent sur l'onde Ψ^i franchisse, ou p_- de rétrodiction pour qu'un corpuscule finalement présent sur l'onde Ψ^r ait franchi l'ouverture \mathcal{O} de l'écran $x_1 = 0$ est

$$(31) \quad p_\pm = \pm \iiint_{\mathcal{O}} j_1^\pm d\sigma_1 > 0 .$$

En comparant ce flux à celui de $j_1^{i,r}$ à travers \mathcal{O} , l'on définira le rendement de l'ouverture \mathcal{O} .

7.- REMARQUES SUR LA SUPERQUANTIFICATION.

Soit P_{if} la probabilité non superquantifiée d'une transition $i \rightarrow f$, valable indifféremment en prédiction ou en rétrodiction, suivant que l'état initial i ou final f est donné. La probabilité superquantifiée de transition d'un corpuscule est $n_i P_{if} n_f$, où n_i et n_f sont les nombres d'occupation initial de l'état initial et final de l'état final dans l'hypothèse où un corpuscule transite.

Autrement dit, P_{if} est la probabilité de prédiction de la transition $i \rightarrow f$ si l'état initial est initialement occupé une fois et l'état final initialement inoccupé, ou bien la probabilité de rétrodiction de la même transition si l'état final est finalement occupé une fois et l'état initial finalement inoccupé.

Il devient absolument indispensable d'explicitier tout ceci dès qu'interviennent les ondes planes à énergies négatives, avec l'éventualité des créations ou annihilations de paires. Le si, que nous avons souligné, est un élément essentiel de la théorie de Feynman [2], et nous venons de voir qu'il se justifie à partir de la superquantification.

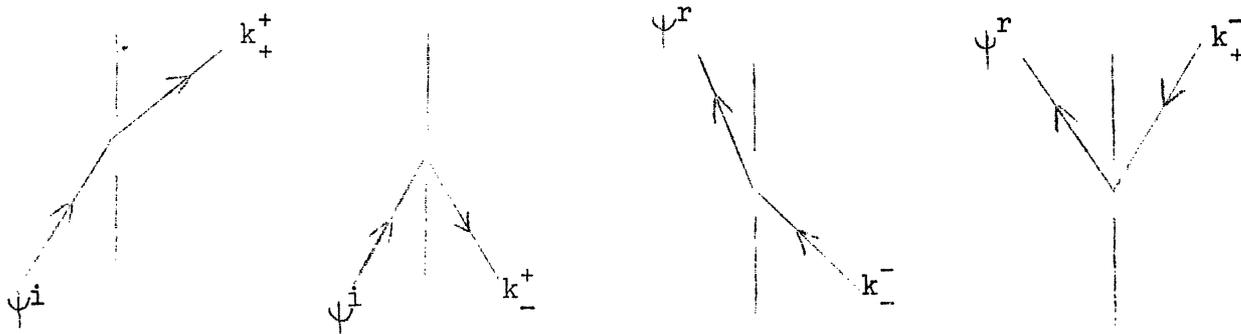
En bref, le trait nouveau et "révolutionnaire" des deux statistiques quantiques est l'intervention symétrique des nombres d'occupation de l'état initial et de l'état final. C'est, on le verra, ici (n° 8 et 10) comme chez Feynman [2], ce trait qui élimine le paradoxe de la "causalité avancée", qui apparaîtrait sans cela en même temps que les énergies négatives. Ceci confirme la connexion intime entre la superquantification et la théorie des énergies négatives, déjà manifeste dans la théorie de "l'océan" et des "lacunes" de Dirac.

8.- RÉPARTITION SPECTRALE DE L'ONDE DIFFRACTÉE : LOCALISATION DU CORPUSCULE DIFFRACTÉ DANS L'ESPACE D'IMPULSION-ÉNERGIE.

Dans notre problème, le "paramètre d'évolution" naturel n'est pas le temps $t = x_0/c$, mais l'abscisse x_1 normale à l'écran. Nous mettrons des guillemets chaque fois que nous prendrons x_1 , et non x_0 , comme paramètre d'évolution.

Il suit, de ce qui précède et de la formule (24), que $\zeta^* + \zeta^+$ est la probabilité de "prédiction" pour que le corpuscule initialement présent sur l'onde ψ^i "sorte" de l'ouverture \mathcal{O} sur l'onde plane k^+ "initialement" inoccupée, et de même que $\zeta^* - \zeta^-$ est la probabilité de rétrodiction pour que le corpuscule finalement présent sur l'onde ψ^r "soit entré" à travers \mathcal{O} sur l'onde plane k^- . Autrement dit, $\zeta^*_+ + \zeta^+_+$ et $\zeta^*_- + \zeta^*_-$ sont les probabilités de prédiction pour que le corpuscule incident sur ψ^i sorte de \mathcal{O} sur une onde plane k^+_+ , ou bien s'annihile dans \mathcal{O} avec un anticorpuscule arrivant sur une onde k^-_+ . De même, $\zeta^*_- - \zeta^-_+$ et $\zeta^*_- - \zeta^-_-$ sont les probabilités de rétrodiction pour que le corpuscule émergeant sur ψ^r soit entré dans \mathcal{O} sur une onde plane k^-_+ , ou bien fasse partie d'une paire créée dans \mathcal{O} dont l'anticorpuscule s'échappe sur une onde k^-_- .

Comme celle de Feynman [2], notre théorie synthétise donc les créations et annihilations de paires avec les diffusions proprement dites. Ceci ne vaut d'ailleurs que pour les fermions, car on sait qu'avec les bosons l'on ne doit retenir qu'un seul signe des énergies, ce qui exclut les créations ou annihilations de paires. Finalement, pour les fermions, nous avons les quatre schémas ci-joints.



De toute façon, l'impulsion-énergie, manquant au bilan de la diffusion généralisée, est absorbée ou fournie par le lourd écran macroscopique et le puissant mécanisme de son diaphragme.

L'opération de diffraction et tachage de l'onde ψ équivaut à une mesure des coordonnées x_2 et x_3 et du temps x_0 du corpuscule franchissant l'abscisse x_1 . Les formules (15), (16), (17), (18) contiennent une théorie homogène des 2e, 3e et 4e relations d'incertitude de Heisenberg, le vecteur $k^\uparrow = (k_2, k_3, k_0)$ étant tel que

$$(32) \quad k_2^2 + k_3^2 - k_0^2 \leq 0 .$$

Pour manifester ces relations de manière opératoire, on peut imaginer un second écran $x_1 = a$, $a > 0$, parallèle au précédent, pourvu lui aussi d'une ouverture variable, a étant grand devant les trois dimensions des deux ouvertures d'espace-temps. Il résulte alors de l'argument de la phase stationnaire de Fresnel, qui est ici la forme minkowskienne du théorème de la vitesse de groupe de L. de Broglie, que le corpuscule ne peut franchir les deux écrans que si le quadrivecteur joignant les deux ouvertures est du genre temps.

9.- DIGRESSION SUR LES FONCTIONS DE GREEN DE L'ESPACE-TEMPS, OU PROPAGATEURS.

La théorie quantique des champs a été amenée à considérer toute une famille de propagateurs $D(y - x)$, qui peuvent tous être formés par combinaison linéaire des quatre suivants :

potentiel retardé D_r et avancé D_a , superpositions à poids égaux des ondes planes à énergies positives D_+ et à énergies négatives D_- [7] .

$D_r(x)$, $D_a(x)$ et leurs combinaisons linéaires sont nulles dans l'ailleurs et, ainsi, sont certainement conformes au postulat d'Einstein concernant la propagation des signaux. Mais, à une exception près sur laquelle nous reviendrons, ces fonctions, 1°) ont une représentation de Fourier non pas en intégrale triple, mais en intégrale quadruple, et 2°) sont solutions de l'équation de Gordon pour tout x , sauf $x = 0$. Ces deux défauts les excluaient a priori de formules du type Rayleigh généralisé (21m) et (21d), car l'on n'aurait pu obtenir avec elles ni une théorie satisfaisante des incertitudes de Heisenberg, ni une "équation intégrale ou intégral-différentielle du problème" du type (25d) ou (25m).

Par contre, $D_+(x)$, $D_-(x)$ et leurs combinaisons linéaires ont une représentation de Fourier en intégrale triple, et sont solutions de l'équation de Gordon pour tout x , y compris $x = 0$. Mais, à une exception près sur laquelle nous reviendrons, elles ne sont pas nulles dans l'ailleurs. Ceci, a priori, soulève une difficulté pour leur emploi dans des formules du type Rayleigh.

Une et une seule des fonctions D appartient à la fois aux deux précédentes familles, jouissant ainsi à la fois des trois propriétés qu'a priori nous recherchons : c'est le propagateur.

$$(33) \quad D(x) \approx D_r(x) - D_a(x) = D_+(x) - D_-(x) ,$$

intervenant dans la résolution du problème de Cauchy [6 , 9] et dans l'écriture des formules de non-commutation du ψ . Les remarques précédentes montrent qu'il était prédestiné à jouer ce rôle éminent. Malheureusement, il ne peut pas être retenu dans le présent problème, car les calculs du n° 3 montrent sans ambiguïté qu'il ne peut pas conduire à l'existence d'intégrales de Fourier réciproques en x_2 , x_3 , x_0 .

Mais, quoique non-nulles dans l'ailleurs, les fonctions $D_+(x)$, $D_-(x)$ et leurs combinaisons linéaires ne peuvent pas "propager" de corpuscules à une "vitesse supérieure à c ". En effet, le courant de Gordon qui leur est associé est identiquement nul dans l'ailleurs, et ceci garantit la propriété énoncée, comme on le voit en imaginant que la source de l'onde ψ est réduite à un instant-point.

Posons, d'une manière générale,

$$(34) \quad \psi = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \psi^* = \rho e^{-i\theta} \quad ,$$

d'où

$$(35) \quad \psi^* d\psi - \psi d\psi^* = 2i \rho^2 d\theta \quad .$$

En nous reportant à la définition (22) du courant de Gordon, nous voyons que

$$(36) \quad j_\lambda = \frac{1}{k} \rho^2 \partial_\lambda \theta \quad .$$

Je dis maintenant que les fonctions

$$(37) \quad D_\pm(x) = \frac{i(2\pi)^{-3}}{k} \iiint_{\eta_\pm} e^{ik_\pm^\lambda x_\lambda} d\eta_\pm$$

sont réelles dans l'ailleurs. Par une raison d'isotropie évidente, nous pouvons raisonner dans le cas particulier où $x_4 = 0$. Mais, alors, dans l'intégrale (37), nous pouvons associer par paires les termes en k_α et $-k_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) ou \vec{k} et $-\vec{k}$, qui interviennent par leurs sommes réelles, $2 \cos \vec{k} \cdot \vec{x}$. Il suit bien de là que $D_\pm(x)$ sont réelles dans l'ailleurs.

En rapprochant les deux résultats précédents, nous voyons que le courant de Gordon des fonctions $D_\pm(x)$ est nul dans l'ailleurs, comme on l'annonçait.

Examinons les cas intéressants des deux importantes fonctions

$$(38) \quad D_1 = D_+ + D_- \quad \text{et} \quad D = D_+ - D_-$$

La première étant partout réelle a un courant de Gordon identiquement nul. La seconde est réelle dans l'ailleurs et imaginaire pure dans le passé et le futur: son courant de Gordon, isotrope, court donc sur l'hypersurface du cône isotrope.

10.- LE PROBLÈME DE LA LOCALISATION SPATIOTEMPORÉLLE DU CORPUSCULE DIFFRACTÉ.

La théorie précédente est notamment satisfaisante à deux égards :

- 1°) elle vient en coïncidence avec la théorie classique dans le cas stationnaire et monochromatique (n° 5),
- 2°) elle conduit à une description claire de la localisation du corpuscule diffracté dans l'espace d'impulsion-énergie (n° 8).

Mais elle n'est pas satisfaisante aux deux égards suivants :

- 1°) Les propagateurs $D^\pm(x)$ qu'elle implique (équation 20) non seulement ne sont pas nuls dans l'ailleurs, mais ont un courant de Gordon qui n'est pas identiquement nul dans l'ailleurs,

2°) Le flux de ce courant de Gordon à travers une demi-hypersurface du genre espace σ , telle que $x_1 \geq 0$, coupant l'écran $x_1 = 0$ avant ou après l'ouverture d'espace-temps \mathcal{O} , n'est pas égal à l'intégrale du $\zeta^* \zeta$ sur le demi-hyperboloïde η^\pm .

Ceci crée pour nous l'obligation de retoucher nos postulats, de telle manière que la probabilité de présence du corpuscule diffracté soit donnée par un $\varphi(x) \neq \psi(x)$ échappant aux deux précédents défauts, mais cependant tel que $\varphi_\pm^\pm(x)$ et $\psi_\pm^\pm(x)$ aient la même représentation de Fourier sur le quart d'hyperboloïde η_\pm^\pm intéressé ; ceci, afin que tous les résultats précédemment acquis soient sauvés.

A la lumière des remarques du n° 9, nous voyons que ce résultat sera atteint si nous élargissons le postulat (C) (n° 3) de la manière suivante : le ψ diffracté restant calculé comme précédemment, et D_\pm étant défini d'après (37), nous substituerons aux formules du type Rayleigh (21m) et (21d) les

$$(39m) \quad \varphi_\pm^\pm(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} \iiint_{\mathcal{O}} \psi_\pm^\pm(x^\wedge) D_\pm(y-x) d\sigma_1,$$

$$(39d) \quad \varphi_\pm^\pm(y) = \iiint_{\mathcal{O}} D_\pm(y-x) \frac{\partial}{\partial x_1} \psi_\pm^\pm(x^\wedge) d\sigma_1.$$

Ce sont ces φ qui devront servir à calculer la probabilité de présence du corpuscule diffracté dans l'espace-temps, dans chacun des quatre cas possibles, correspondant aux deux sens d'entrée dans, et aux deux sens de sortie de l'ouverture \mathcal{O} .

11.- DE L'EXCLUSION MACROSCOPIQUE DES ONDES CONVERGENTES OU AVANCÉES.

Nous avons déjà vu, au n° 8, comment la superquantification écarte le paradoxe de la causalité avancée, qui, sans elle, serait liée aux énergies négatives. Ici, nous voulons brièvement expliquer pourquoi la théorie quantique de la prédiction est formellement identique à la théorie macroscopique des ondes retardées, tandis qu'au contraire la théorie quantique de la rétrodiction n'a pas d'équivalent macroscopique, du fait de l'exclusion macroscopique des ondes avancées.

Le problème est en relation intime avec celui du "théorème H" de la mécanique statistique. Considérons par exemple la formule au moyen de laquelle Poincaré démontre, en prédiction, l'étalement uniforme des petites planètes sur leur trajectoire commune [4]. Cette formule est, de soi, symétrique entre avenir et passé, et, si on l'applique en rétrodiction, l'on trouve que la grosse

planète, existant à l'instant zéro, est née du rassemblement d'un essaim homogène de petites planètes existant dans un lointain passé ! Ainsi, l'irréversibilité se trouve non pas déduite, mais postulée, dans les règles d'application de la formule de Poincaré.

C'est de la même façon que l'intégration macroscopique de l'équation des ondes se fait, par décret, au moyen de la fonction D_r et non au moyen de la fonction D_a .

Mais la mécanique ondulatoire, avec son dualisme onde-corpuscule, permet de rattacher l'un à l'autre ces deux problèmes. Pour le comprendre, imaginons un réseau-plan fonctionnant en régime permanent et monochromatique. A une onde plane incidente correspondent g ondes planes émergentes, en nombre entier fini ; réciproquement, à l'une quelconque de ces ondes planes émergentes correspondent g ondes planes incidentes à partir desquelles elle peut être produite. Si un corpuscule est reçu sur l'une des ondes émergentes, l'on peut affirmer qu'il est arrivé sur l'une des g ondes planes incidentes précédentes, avec des probabilités de rétro-diction aisément calculées.

Nous ne perdrons pas de généralité en supposant que toutes les probabilités non superquantifiées de transition d'onde plane à onde plane sont égales.

Il est intéressant de remarquer que, dans ce problème de régime permanent, nous pouvons considérer les corpuscules comme discernables. En effet, ils sont à répartir dans des cellules d'extension en phase de la forme

$\Delta x_2 \Delta x_3 \Delta x_0 \Delta k_2 \Delta k_3 \Delta k_0$, mais, si l'intervalle de temps δx_0 séparant l'arrivée de deux d'entre eux est grand devant l'inverse de la largeur de raie Δk_0 , ils peuvent 1°) être comptés séparément, et 2°) être placés, sans mutuelle interaction, dans la même cellule $\Delta x_2 \Delta x_3 \Delta k_2 \Delta k_3$. L'on peut donc dire que les conséquences des statistiques quantiques sont ici statistiquement effacées. Comme application de ces remarques, il y a l'expérience de Davisson et Germer où le principe d'exclusion de Pauli n'empêche pas les électrons de se grouper sur les anneaux de diffraction engendrés par le cristal.

Maintenant, nous pouvons toujours supposer que l'expérience porte sur une tranche de temps Δx_0 assez longue pour que le nombre n de corpuscules franchissant le plan $x_1 = 0$ du réseau soit grand devant le nombre des "cases" g . La probabilité de toute répartition des n corpuscules entre les g cases est donnée par la formule des permutations avec répétition, et l'on voit

aisément que la probabilité maxima correspond à la répartition "équitable" de n/g corpuscules par case, tandis que la probabilité minima correspond au rassemblement des n corpuscules dans la même case.

Macroscopiquement, il est banal de réaliser l'expérience où les n corpuscules incidents sont portés par la même onde plane incidente, et où les n corpuscules émergents sont équitablement distribués entre les ondes planes diffusées, conformément à la formule fresnellienne de l'intensité. Mais le processus temporellement symétrique n'est jamais observé.

Notre conclusion sera celle-ci : en termes de mécanique ondulatoire, l'exclusion macroscopique des ondes convergentes ou avancées est une propriété d'ordre non pas ondulatoire, mais corpusculaire. Elle apparaît comme une conséquence du principe de Carnot appliqué aux nombres d'occupation des ondes sous-tendues par le réseau.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOUWKAMP (C.J.) - Reports on Progress in Physics, 17, 1954, p. 35-56.
 - [2] FEYNMAN (R.P?) - Phys. Rev., 76, 1949, p. 749-759 et 769-789.
 - [3] MOSHINSKY (M) - Phys. Rev., 88, 1952, p. 625-631. Rev. Mex. Fis., 1, 1952, p. 151-164 et 3, 1954, p. 236-252. C.R. Acad. Sci. Paris, 238, 1954, p. 2395.
 - [4] POINCARÉ (H) - Calcul des Probabilités, 2e édition, Paris, 1912, Chapitre VII, n° 93.
 - [5] RIESZ (M) - Actes du 10e Congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, p. 123-131.
 - [6] SCHWINGER (J) - Phys. Rev., 74, 1948, p. 1451.
 - [7] VILSCONTI (A) - Thèse, p. 26.
 - [8] COSTA de BEAUREGARD (O) - C.R. Acad. Sci. Paris, 225, 1947, p. 724 ; 227, 1948, p. 1210 ; 240, 1955, p. 160 ; 241, 1955, p. 1921. Coll. Intern. C.N.R.S. 38, Paris, 1950, p. 211-216. Rev. Mex. Fis., 3, 1954, p. 201-216.
 - [9] COSTA de BEAUREGARD (O) - J. Phys. Rad., 16, 1955, p. 770-780.
 - [10] COSTA de BEAUREGARD (O) - C.R. Acad. Sci. Paris, 241, 1955, p. 1721.
-