Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

D. Bohm
G. Lochak
J. P. Vigier

Interprétation de l'équation de Dirac comme approximation linéaire de l'équation d'une onde se propageant dans un fluide tourbillonnaire en agitation chaotique du type éther de Dirac

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1955/1956
-:-:-:-

10 janvier 1956

Exposé n° 8

INTERPRÉTATION DE L'ÉQUATION DE DIRAC COMME APPROXIMATION LINÉAIRE DE L'ÉQUATION D'UNE ONDE SE PROPAGEANT DANS UN FLUIDE TOURBILLONNAIRE EN AGITATION CHAOTIQUE DU TYPE ÉTHER DE DIRAC,

par D. BOHM, G. LOCHAK, J.P. VIGIER.

PREMIÈRE PARTIE

1.- INTRODUCTION

Une interprétation causale de la mécanique de l'électron a été proposée qui était basée sur l'hypothèse que l'électron comportait un aspect particulaire qui suivait une trajectoire continue et déterminée, $\xi(t)$, accompagné d'un champ physique réel $\psi(\vec{x}, t)$[1]

Pour obtenir tous les résultats de l'interprétation habituelle, il suffisait de supposer :

1) que ψ satisfait à une des équations d'onde linéaires habituelles.
2) que l'aspect corpusculaire suit une des lignes de courant associée à cette équation d'onde
3) qu'un ensemble de tels aspects corpusculaires est nécessairement distribué avec la densité $P = C^{te} |\psi|^2$

Dans un travail antérieur, deux d'entre nous[2] ont montré que si on adoptait la représentation hydrodynamique de l'équation d'onde, et que l'on considère l'aspect corpusculaire comme une singularité dans ce champ il suffit d'admettre que le fluide quantique est doté d'agitation chaotique pour démontrer l'hypothèse (3).

Nous nous proposons ici de développer ce modèle et de montrer que les équations d'onde elles-mêmes sont une conséquence de l'hypothèse précédente pourvu que l'on admette un postulat supplémentaire relatif à la structure et à la nature

---

[1] Il s'agit de l'onde physique réelle v sans singularité introduite par Mr de BROGLIE.

[2] D. BOHM et J.P. VIGIER, Phys. Rev., 96, n° 1 (1954) p. 208.

de l'énergie qui se propage dans le champ quantique.

Partons de l'idée que le vide est comparable à un fluide relativiste continu doté d'une agitation chaotique perpétuelle.

Par "agitation chaotique" nous entendons que la densité et le courant du fluide fluctuent de façon très complexe dans l'espace et dans le temps autour d'un état de repos.

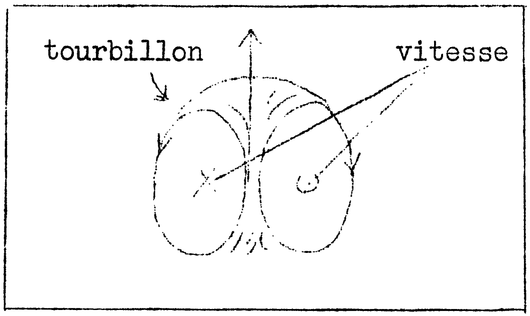
Plus précisément, si l'on considère un maximum relatif de la densité, on en trouvera un autre à une distance que nous supposerons petite devant 10^{-13} cm ; de sorte que la densité sera en moyenne constante sur un pavé d'espace de cette dimension, cette valeur moyenne restant elle-même constante dans le temps. Nous admettrons de plus que la somme géométrique des vecteurs vitesse en les points d'un tel pavé d'espace est nulle et que l'orientation du vecteur vitesse en chaque point remplit le cône de lumière au cours du temps.

Ceci posé, nous admettrons, en outre, que ces mouvements sont en général tourbillonnaires et qu'il existe à l'intérieur de ce fluide des structures tourbillonnaires de très petites dimensions.

On sait en théorie classique des tourbillons que de telles structures existent effectivement.

Tout le monde connait les classiques anneaux de tourbillon. On peut également citer l'exemple suivant :

Considérons un tore dont les sections méridiennes sont des lignes de tourbillon. La quantité de fluide enfermée dans cette surface se conserve au cours du temps en vertu du théorème d'Helmoltz. Le fluide tourne autour de l'axe du tore et son moment de tourbillon est dirigé suivant cet axe et se conserve au cours du mouvement.



De telles structures ne peuvent être stables que si elles sont très petites devant les dimensions des fluctuations car il faut que ces dernières les emportent sans les briser.

Nous admettrons qu'il existe un nombre très grand de tels tourbillons sur chacun des pavés précédemment envisagés.

En raison de l'agitation chaotique du vide, on peut alors supposer que leur répartition est uniforme en moyenne dans l'espace et dans le temps, que la somme géométrique des moments des tourbillons répartis dans un pavé d'espace de 10^{-13}cm est nulle, et que l'orientation de chaque tourbillon varie de façon chaotique au cours du temps.

Si l'on veut, on peut grossièrement comparer ces tourbillons à des micelles colloïdales dotées de moment cinétique, uniformément réparties dans un liquide et entrainées par l'agitation moléculaire. Si on suppose que chaque élément d'espace, si petit soit-il, (jusqu'à 10^{-13}cm) contient un grand nombre de petits tourbillons, le fluide apparaîtra comme étant doté d'une densité de moment angulaire interne.

2.- Théorie relativiste des corps en rotation décrite en termes de spineurs.

Nous commencerons par décrire le comportement d'un de ces tourbillons en le supposant suffisamment stable pour le considérer comme un solide en rotation.

En mécanique classique, le lagrangien d'un corps en rotation (en absence de champ) s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} I^{ij} \omega_i \omega_j$$

où : - I^{ij} est le tenseur d'inertie

- ω_i le vecteur vitesse de rotation, dual d'un tenseur de second rang.

En relativité, nous introduirons un tenseur $\omega_{\alpha\beta}$ antisymétrique représentant la vitesse de rotation d'espace du solide et son accélération (vitesse de rotation de temps).

L'invariance du lagrangien imposera alors un tenseur d'inertie du 4e rang $I^{\alpha\beta\gamma\delta}$ qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, symétrique par rapport aux couples $(\alpha\beta)$ et $(\gamma\delta)$ et antisymétrique séparément sur α, β et γ, δ.

Le lagrangien que nous adopterons sera donc

$$\boxed{L = \frac{1}{4} I^{\overset{\vee}{\alpha\beta}\,\overset{\vee}{\gamma\delta}} \omega_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \omega_{\underset{\vee}{\gamma\delta}}} \quad (3)$$

Posons alors $K^{\overset{\vee}{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} I^{\overset{\vee}{\alpha\beta}\,\overset{\vee}{\gamma\delta}} \omega_{\underset{\vee}{\gamma\delta}}$

---

(3) On notera, par exemple,
$A^{\overset{\vee}{\alpha\beta}}$: tenseur antisymétrique
$B^{\underline{\alpha\beta}}$: tenseur symétrique

$K^{\alpha\beta}$ est le tenseur moment cinétique du solide et nous utiliserons par la suite, le lagrangien sous la forme :

$$\boxed{L = \frac{1}{2} K^{\overset{\vee}{\alpha\beta}} \omega_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}}$$

Nous supposerons de plus que le tenseur $K^{\overset{\vee}{\alpha\beta}}$ est calculé par rapport au centre de gravité du système, c'est-à-dire au point qui est centre de masse dans le référentiel de Lorentz où les composantes d'espace de l'impulsion <u>totale</u> s'annulent. On sait alors (th. de Möller, Annales IHP, 1949) que les composantes de temps de $K^{\alpha\beta}$ s'annulent dans ce système.

$K^{\alpha\beta}$ est alors le moment cinétique propre du système au sens de Möller et est un cas particulier du tenseur $S^{\alpha\beta}$ de Weyssenhoff.

Pour exprimer la vitesse de rotation $\omega_{\alpha\beta}$, nous n'utiliserons pas les angles d'Euler. En effet, nous aurons ultérieurement à décrire un champ continu de corps en rotation. Or, les angles d'Euler peuvent ne pas varier continuement lors d'une variation continue de l'état de rotation ; ce qui importe peu pour un corps isolé et n'empêche pas la théorie classique du gyroscope de pouvoir être écrite en terme d'angles d'Euler. Par contre, ces angles ne peuvent décrire valablement un champ de corps en rotation. Nous prendrons pour cela les paramètres de Cayley-Klein qui ne présentent pas cet inconvénient, ou ce qui est équivalent, les spineurs.[4]

On trouvera en <u>annexe</u> une théorie des paramètres relativistes de Cayley-Klein que nous avons écrite pour permettre les calculs qui suivent.

Calculons l'expression de $\omega_{\alpha\beta}$ en termes de spineurs :

D'après l'expression : $\ell = 1 + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\delta\chi}\,.\,\vec{\alpha} - \frac{i}{2}\,\overrightarrow{\delta\theta}\,.\,\vec{\sigma}$ de la transformation infinitésimale de Lorentz, on voit qu'une variation du spineur s'écrira :

$$\delta\Psi = \left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\delta\chi}\,\vec{\alpha} - \frac{i}{2}\,\overrightarrow{\delta\theta}\,\vec{\sigma}\right)\Psi$$

d'où $$\delta\Psi^{*} = \Psi^{*}\left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\delta\chi}\,.\,\vec{\alpha} + \frac{i}{2}\,\overrightarrow{\delta\theta}\,.\,\vec{\sigma}\right)$$

---

[4] BOHM, TIOMNO, SETILLER, Nuovo Cim. (Suppl.), n° 1 , 1955.
H. WEYL : Theory of groups and Quantum theory (1928) p. 180
SMIRNOV : Cours de mathématiques supérieures, t. III 1 (en langue russe).
MURNAGHAN : The Theory of group representations, p. 318

Ecrivons alors les combinaisons :

$$i(\delta\Psi^* \beta\sigma_j \Psi - \Psi^* \beta\sigma_j \delta\Psi)$$

et $$(\delta\Psi^* \beta\alpha_j \Psi - \Psi^* \beta\alpha_j \delta\Psi) .$$

On voit que :

$$\beta\sigma_j = i\,\alpha_k \alpha_\ell\,\alpha_4 = \Gamma_{k\ell} \qquad (\text{avec } \delta_{jk\ell} = +1)$$

$$\beta\alpha_j = \alpha_4\,\alpha_j = i\,\Gamma_{j4}$$

où $\Gamma_{k\ell}$ et Γ_{j4} définissent le tenseur antisymétrique de rang 2 associé au spineur.

Si nous divisons les deux expressions par l'intervalle de temps propre et si nous désignons par un point la dérivée $\frac{\delta}{\delta\tau}$, nous poserons :

(1) $$\boxed{\omega_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = i\,(\dot{\Psi}^* \Gamma_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \Psi - \Psi^* \Gamma_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \dot{\Psi})}$$

Le calcul explicite est sans difficulté et donne les expressions :

(1') $$\omega_{ij} = -\dot{\theta}_k \Omega_1 - \dot{\gamma}_k \Omega_2 \qquad (\delta_{ijk} = +1)$$

$$\omega_{4j} = \dot{\theta}_j \Omega_2 - \dot{\gamma}_j \Omega_1$$

où : $\dot{\theta}$ est la vitesse de rotation et

$$\dot{\gamma}_j = \frac{d}{d\tau}\left(\text{Arg th } \frac{v_j}{c}\right) = \frac{\dot{v}_j/c}{1 - v_j^2/c^2}$$

$\Omega_1 = \cos A$ et $\Omega_2 = \sin A$ sont l'invariant et le pseudo-invariant liés au spineur. Si on suppose $A = \pi$, on a :

$\omega_{ij} = \dot{\theta}_k$
$\omega_{4j} = \dot{\gamma}_j$

$(\delta_{ijk} = 1)$

Alors, à l'approximation non relativiste, ω_{4j} devient négligeable devant ω_{ij} .

Les composantes d'espace de $K^{\alpha\beta}$ tendront vers le moment cinétique classique et notre lagrangien tendra vers le lagrangien classique du corps solide en rotation. Si $A \neq \pi$ il restera devant le lagrangien, le facteur $-\cos A$.

Ayant l'expression de $\omega_{\alpha\beta}$, nous pouvons écrire le lagrangien en termes de spineurs :

(2) $$\boxed{L = \frac{1}{2} K^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\dot{\Psi}^{*} K^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi - \Psi^{*} K^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \dot{\Psi}]}$$

Calculons maintenant les quantités conjuguées canoniques des composantes Ψ_n du spineur, soit :

$$\pi_n^{*} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}_n}$$

$$\pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}_n^{*}}$$

Nous poserons :

$$\pi^{*} = (\pi_1^{*} \ \pi_2^{*} \ \pi_3^{*} \ \pi_4^{*}) = -\frac{i}{2} \Psi^{*} K^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} K^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi$$

On a alors :

$$\pi^{*} \Psi = \pi_1^{*} \Psi_1 + \pi_2^{*} \Psi_2 + \pi_3^{*} \Psi_3 + \pi_4^{*} \Psi_4 = -\frac{i}{2} \Psi^{*} K^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi$$

$$= -\frac{i}{2} K^{\alpha\beta} \Psi^{*} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi = -\frac{i}{2} K^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}$$

$$\Psi^{*} \pi = \Psi_1^{*} \pi_1 + \Psi_2^{*} \pi_2 + \Psi_3^{*} \pi_3 + \Psi_4^{*} \pi_4 = \frac{i}{2} \Psi^{*} K^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi$$

$$= \frac{i}{2} K^{\alpha\beta} \Psi^{*} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi = \frac{i}{2} K^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}$$

Or $K^{\alpha\beta}$ et $m_{\alpha\beta}$ sont des tenseurs, donc $\pi^{*}\Psi$ et $\Psi^{*}\pi$ sont des invariants et on voit que π^{*} et π sont des <u>spineurs</u> qui se transforment respectivement comme $\Psi^{*}\beta$ et $\beta\Psi$.

Le lagrangien s'écrira donc :

(4) $$\boxed{L = \dot{\Psi}^{*} \pi + \pi^{*} \dot{\Psi}}$$

Du mode de transformation de π^{*} et de π , on déduit immédiatement que les quantités

(5) $$M_{ij} = \Psi^* \alpha_i \alpha_j \pi - \pi^* \alpha_i \alpha_j \Psi$$

(6) $$M_{k4} = \Psi^* \alpha_k \pi + \pi^* \alpha_k \Psi$$

sont les composantes d'un tenseur de second rang $M_{\alpha\beta}$

En explicitant π et π^*, il vient :

$$M_{ij} = \frac{i}{2} \Psi^* K^{\alpha\beta}(\alpha_i \alpha_j \Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta} \alpha_i \alpha_j) \Psi$$

$$= i \Psi^* \underset{\ell > k}{K^{k\ell}} (\alpha_i \alpha_j . i\alpha_k \alpha_\ell \alpha_4 + i\alpha_k \alpha_\ell \alpha_4 \alpha_i \alpha_j) \Psi$$

$$+ i \Psi^* K^{k4} (\alpha_i \alpha_j . i\alpha_k \alpha_4 + i \alpha_k \alpha_4 \alpha_i \alpha_j) \Psi$$

et les relations entre les α donnent :

$$\tfrac{1}{2} M_{ij} = \Omega_1 K^{ij} - \Omega_2 K^{k4} = \Omega_1 K_{ij} + \Omega_2 K_{k4} \qquad (\delta_{ijk} = +1)$$

De même, on a :

$$M_{k4} = \frac{i}{2} \Psi^* K^{\alpha\beta}(\alpha_k \Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta} \alpha_k)$$

$$= i \Psi^* \underset{j > i}{K^{ij}} (\alpha_k . i\alpha_i \alpha_j \alpha_4 - i\alpha_i \alpha_j \alpha_4 \alpha_k) \Psi$$

$$+ i \Psi^* K^{\ell 4} (\alpha_k . i \alpha_\ell \alpha_4 - i \alpha_\ell \alpha_4 \alpha_k) \Psi$$

ce qui entraine, après un calcul simple :

$$\tfrac{1}{2} M_{k4} = \Omega_1 K_{k4} - \Omega_2 K_{ij} \qquad (\delta_{ijk} = +1)$$

On peut donc écrire, sous forme tensorielle :

(7) $$\boxed{\tfrac{1}{2} M_{\alpha\beta} = \Omega_1 K_{\alpha\beta} - \Omega_2 \tfrac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma\delta} K^{\gamma\delta}}$$

Considérons alors le système lié au corps défini par $\theta_i = \gamma_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Dans ce système, on aura :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\frac{A}{2} \\ 0 \\ -i\sin\frac{A}{2} \end{pmatrix} \qquad \Psi^* = (0 \;\; \cos\tfrac{A}{2} \;\; 0 \;\; i\sin\tfrac{A}{2})$$

$$K^{14} = K^{24} = K^{34} = 0 \qquad \text{(d'après les hypothèses de départ)}$$

$$K^{23} = T_1 \quad ; \quad K^{31} = T_2 \quad ; \quad K^{12} = T_3$$

seront des invariants, projections du moment cinétique propre sur les axes principaux du corps.

Compte tenu des relations (5) et (6) et de $\Omega_1 = \cos A$ et $\Omega_2 = \sin A$, la relation (7) s'écrira alors dans le système propre :

$$(7bis)\quad \left[\begin{array}{l}
M_{23} = i(\pi_1^* - \pi_1)\cos\frac{A}{2} + (\pi_3^* + \pi_3)\sin\frac{A}{2} = 2\,T_1 \cos A \\
M_{31} = -(\pi_1^* + \pi_1)\cos\frac{A}{2} + i(\pi_3^* - \pi_3)\sin\frac{A}{2} = 2\,T_2 \cos A \\
M_{12} = -i(\pi_2^* - \pi_2)\cos\frac{A}{2} - (\pi_4^* + \pi_4)\sin\frac{A}{2} = 2\,T_3 \cos A \\
M_{14} = (\pi_3^* - \pi_3)\cos\frac{A}{2} - i(\pi_1^* - \pi_1)\sin\frac{A}{2} = -2\,T_1 \sin A \\
M_{24} = i(\pi_3^* + \pi_3)\cos\frac{A}{2} - (\pi_1^* - \pi_1)\sin\frac{A}{2} = -2\,T_2 \sin A \\
M_{34} = -(\pi_4^* - \pi_4)\cos\frac{A}{2} + i(\pi_2^* + \pi_2)\sin\frac{A}{2} = -2\,T_3 \sin A
\end{array}\right.$$

Ces expressions ne sont pas covariantes. Pour obtenir une forme covariante, nous exprimerons le premier membre à l'aide des invariants liés aux spineurs π et Ψ.

Nous en avons quatre :

$$\pi^* \Psi \ , \quad \pi^* \gamma_5 \Psi \ , \quad \pi^* \tilde{\Psi} \ , \quad \pi^* \gamma_5 \tilde{\Psi} \ ,$$

où l'on a $\gamma_5 = i\,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ et :

$$\tilde{\Psi} = i\,\alpha_2 \alpha_4 \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \\ \Psi_3^* \\ \Psi_4^* \end{pmatrix} \qquad \text{(= "conjugué de charge")}$$

On trouve aisément six expressions invariantes qui sont identiques à (7bis) dans le système propre.

$$
(8) \quad \left[\begin{array}{l}
\Pi^* \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^* \Pi = 2\, T_1 \sin A \\
i(\tilde{\Psi}^* \gamma_5 \Pi - \Pi^* \gamma_5 \tilde{\Psi}) = 2\, T_1 \cos A \\
i(\Pi^* \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}^* \Pi) = 2\, T_2 \sin A \\
\Pi^* \gamma_5 \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^* \gamma_5 \Pi = 2\, T_2 \cos A \\
\Pi^* \gamma_5 \Psi + \Psi^* \gamma_5 \Pi = 2\, T_3 \sin A \\
i(\Psi^* \Pi - \Pi^* \Psi) = 2\, T_3 \cos A
\end{array}\right.
$$

On a de plus les deux relations :

$$
(9) \quad \left[\begin{array}{l}
\Pi^* \Psi + \Psi^* \Pi = 0 \\
\Pi^* \gamma_5 \Psi - \Psi^* \gamma_5 \Pi = 0
\end{array}\right.
$$

qui lient entre eux les paramètres de Cayley-Klein.

3.- Le modèle de tourbillons de l'éther.

Nous devons maintenant nous souvenir que nous avons à décrire non un solide mains un tourbillon, c'est-à-dire une masse fluide en rotation.

Dans ce cas, une fois atteint l'état d'équilibre, il n'y a pas précession du spin autour de l'axe de rotation.

Nous supposerons donc, que dans le système propre, le moment cinétique est aligné sur un des axes principaux du corps, ce qui s'écrira :

$$T_1 = T_2 = 0 \quad ,$$

et on posera $T_3 = k$.

Le calcul montre alors immédiatement que l'on doit avoir

$$\Pi^* = ik\, \Psi^+ = iK\, \Psi^* \beta$$
$$\Pi = -ik\, \beta\, \Psi$$

Le tenseur $M_{\alpha\beta}$ que nous avons introduit s'écrira alors :

$$M_{\alpha\beta} = 2\, \Psi^* \Gamma_{\alpha\beta} \Psi = 2\, m_{\alpha\beta}$$

où $m_{\alpha\beta}$ est le tenseur de second rang lié au spineur.

La relation (7) s'écrira alors :

$$(7_1) \qquad m_{\alpha\beta} = \Omega_1\, K_{\alpha\beta} - \Omega_2\, \tfrac{1}{2}\, \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}\, K^{\gamma\delta}$$

mais une des formules de Pauli-Kofinck s'écrit

$$(7_2) \qquad m_{\alpha\beta} = \Omega_1 \tfrac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}(u^\gamma s^\delta - u^\delta s^\gamma) - \Omega_2(u_\alpha s_\beta - u_\beta s_\alpha)$$

où l'on a (car Ψ est normé) :

$$u_\mu = \Psi^* \alpha_\mu \Psi \qquad s_\mu = \Psi^* \sigma_\mu \Psi$$

et $\quad u_\mu u^\mu = 1 \quad ; \quad s_\mu s^\mu = -1$

Les seconds membres de (7_1) et (7_2) doivent être égaux quel que soit l'angle A .

Or $K^{\alpha\beta}$, u^γ et s^δ ne dépendent pas de A . On a donc :

$$(10) \qquad \boxed{K_{\alpha\beta} = k\, \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}\, u^\gamma s^\delta = k\, \overline{u_\alpha s_\beta - u_\beta s_\alpha}}$$

C'est le résultat qui est déjà connu en théorie de Dirac[5].

Compte tenu des expression de π et π^* , le lagrangien s'écrira :

$$(11) \qquad \boxed{L = ik\,(\Psi^+ \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^+ \Psi)}$$

Mais on a aussi = $L = \frac{1}{2} K^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}$ ce qui s'écrira aussi ($\omega^0_{\alpha\beta}$ désignant les valeurs de $\omega_{\alpha\beta}$ dans le système propre) :

$$L = k\, \omega^0_{12}$$

La relation (1') donne alors :

$$\omega^0_{12} = -\Omega_1 \dot{\theta}^0_3 - \Omega_2 \dot{\chi}^0_3$$

Si nous supposons que l'énergie de translation du corps est négligeable devant l'énergie de rotation, le lagrangien s'écrira (en posant $\chi = k\,\theta^0_3$) :

$$(12) \qquad \boxed{L = -\chi\,\Omega_1}$$

En ajoutant (11) et (12), le lagrangien prendra la forme :

$$(13) \qquad \boxed{L = i\,\frac{k}{2}\,(\Psi^+ \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^+ \Psi) - \chi\,\Omega_1}$$

On reconnait sa grande analogie formelle avec le lagrangien de Dirac.

---

[5] Cf HALBWACHS, LOCHAK, VIGIER, C.R. Acad. Sc., 241 , (1955) p. 276.