Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

D. Bohm
F. Halbwachs
G. Lochak
J. P. Vigier

Interprétation de l'équation de Dirac comme approximation linéaire de l'équation d'une onde se propageant dans un fluide tourbillonnaire en agitation chaotique du type éther de Dirac

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. nº 15, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1955/1956
-:-:-:-

20 mars 1956

Exposé n° 15

INTERPRÉTATION DE L'ÉQUATION DE DIRAC COMME APPROXIMATION LINÉAIRE DE L'ÉQUATION D'UNE ONDE SE PROPAGEANT DANS UN FLUIDE TOURBILLONNAIRE EN AGITATION CHAOTIQUE DU TYPE ÉTHER DE DIRAC,

par D. BOHM, F. HALBWACHS, G. LOCHAK, J.P. VIGIER.

DEUXIÈME PARTIE

1.- INTRODUCTION :

Dans un exposé précédent, fait au même Séminaire, (exposé n° 8, 10 janvier 1956) nous avons proposé un lagrangien, exprimé en termes de spineurs, permettant de décrire le comportement d'un corps relativiste en rotation.

Nous reprenons ici cette question, et montrons qu'un fluide parfait sans pressions (schéma matière pure) dont les molécules seraient de telles "toupies", obéit aux équations de Mathisson.

2.- Corps relativiste en rotation :

Nous prendrons comme lagrangien de départ

$$L = \frac{1}{2} K^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \omega_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$$

ainsi que nous l'avons déjà proposé.

On a : | $\omega_{\alpha\beta}$: tenseur des vitesses de rotation.
| $K_{\alpha\beta}$: moment cinétique.

Exprimons cela en termes de spineurs.

On sait que si l'on définit une transformation infinitésimale de Lorentz par :

$$\delta x_\alpha = \delta_{\alpha\beta} x^\beta \qquad (\delta_{\alpha\beta} = - \delta_{\beta\alpha})$$

la transformation sur un spineur s'écrira :

$$\delta \Psi = \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi \qquad \text{avec} \quad \alpha \neq \beta$$

$$\delta\psi^+ = -\psi^+ \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta \quad (1)$$

Si nous divisons les deux membres par l'intervalle de temps propre $\delta\tau$, et en désignant par un point la dérivation par rapport au temps propre, nous aurons

$$\dot{\psi} = \frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi$$

$$\dot{\psi}^+ = -\psi^+\frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi \qquad \left(\omega_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\delta\tau}\right)$$

Introduisons alors le tenseur :

$$A_{[\mu\nu]} = i\,(\psi^+\gamma_\mu\gamma_\nu\dot{\psi} - \dot{\psi}^+\gamma_\mu\gamma_\nu\psi)$$ où on pose explicitement $\mu \neq \nu$

Il vient, en explicitant $\dot{\psi}$ et $\dot{\psi}^+$:

$$A_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\psi^+(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu\gamma_\nu)\psi$$

Tous les termes de cette somme, où l'on a $\mu = \nu$ ou $\alpha = \beta$, sont nuls, de même, ceux où $\mu \neq \alpha$ et $\nu = \beta$.

On a donc :

$$A_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi^+(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu)\psi$$
$$+ \frac{i}{4}\sum{}'\omega_{\alpha\beta}\psi^+(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu\gamma_\nu)\psi$$

en posant explicitement $\mu \neq \nu \neq \alpha \neq \beta$.

Soit encore :

$$A_{\mu\nu} = -i\,(\psi^+\psi\,\omega_{\mu\nu} + i\psi^+\gamma_5\psi\ \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta})$$

$$\boxed{A_{\mu\nu} = -i\,(\psi^+\psi\,\omega_{\mu\nu} + i\psi^+\gamma_5\psi\,\overline{\omega_{\mu\nu}})}$$

où l'on a

$$\overline{\omega_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$$

avec $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \pm 1$ suivant la parité de la permutation $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$.

---

(1) Nous prendrons les variables d'univers x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$

Les γ sont les matrices de von Neumann.

On a de même :

$$\overline{A_{\mu\nu}} = -i\,(\psi^+\psi\,\overline{\omega_{\mu\nu}} - i\,\psi^+\gamma_5\psi\,\omega_{\mu\nu})\ ,\ \text{d'où :}$$

(1) $$\boxed{\omega_{\mu\nu} = i\,\frac{\psi^+\psi\,A_{\mu\nu} - i\psi^+\gamma_5\psi\,\overline{A_{\mu\nu}}}{(\psi^+\psi)^2 + (i\,\psi^+\gamma_5\psi)^2}}$$

Nous supposerons que le spineur ψ est normé, nous aurons alors (voir dans l'Exposé 8, l'annexe de la première partie).

(2) $$\psi = \exp(-i\,\gamma_5\,\tfrac{A}{2})\prod_1^3 \exp(-i\sigma_i\,\tfrac{\theta_i}{2})\prod_1^3 \exp(\alpha_j\,\tfrac{\varphi_j}{2})\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

d'où $$\psi^+\psi = i\cos A$$

$$\psi^+\gamma_5\psi = \sin A$$

et $$(\psi^+\psi)^2 + (i\,\psi^+\gamma_5\psi)^2 = -1$$

Le lagrangien s'écrira donc :

$$L = \frac{1}{2}K^{\alpha\beta}\,[\psi^+\psi(\psi^+\gamma_\alpha\gamma_\beta\dot\psi - \dot\psi^+\gamma_\alpha\gamma_\beta\psi) +$$
$$- i\psi^+\gamma_5\psi.\ \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(\psi^+\gamma^\gamma\gamma^\delta\,\dot\psi - \dot\psi^+\gamma^\gamma\gamma^\delta\,\psi\,)]$$

Or, on sait que : $\frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\gamma\gamma^\delta = \gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\beta$, d'où il vient :

(3) $$L = \frac{1}{2}K^{\alpha\beta}[\,\psi^+(\psi^+\psi - \psi^+\gamma_5\psi\,\gamma_5)\gamma_\alpha\gamma_\beta\,\dot\psi +$$
$$- \dot\psi^+\gamma_\alpha\gamma_\beta\,(\psi^+\psi - \psi^+\gamma_5\psi\,\gamma_5)\,\psi\,]$$

Les spineurs conjugués canoniques de ψ et ψ^+ seront :

$$\Pi^+ = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi}\quad \text{et}\quad \Pi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi^+}$$

Compte tenu du fait que :

$$\psi^+\psi - \psi^+\gamma_5\psi\,\gamma_5 = i\cos A - \sin A\,\gamma_5 = i\exp(i\,\gamma_5\,A)$$

on trouve :

(4) $$\boxed{\begin{array}{c}\Pi^+ = \frac{i}{2}\,\psi^+K_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\ \exp(i\,\gamma_5\,A)\\ \hline \Pi = -\frac{i}{2}\,K_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\ \exp(i\ {}_5\,A)\,\psi\end{array}}$$

Considérons alors le tenseur :

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\Pi^{+}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi - \Psi^{+}\gamma_\mu\gamma_\nu\Pi\right]$$

On peut l'écrire, en explicitant Π :

$$M_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\Psi^{+}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu)\exp(i\gamma_5 A)\Psi \,.\, K^{\alpha\beta}$$

Le calcul donne alors :

$$M_{\mu\nu} = -i\left[\Psi^{+}\exp(i\gamma_5 A)\Psi K_{\mu\nu} + i\Psi^{+}\gamma_5\exp(i\gamma_5 A)\Psi \overline{K_{\mu\nu}}\right]$$

Compte tenu de l'expression du spineur donnée en (2) et des relations de commutation entre matrices, on a :

$$\Psi^{+}\exp(i\gamma_5 A)\Psi = (\Psi^{+}\Psi)_{A=0} = i$$

$$\Psi^{+}\gamma_5\exp(i\gamma_5 A)\Psi = (\Psi^{+}\gamma_5\Psi)_{A=0} = 0$$

On a donc :

$$(5)\qquad \boxed{M_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\Pi^{+}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi - \Psi^{+}\gamma_\mu\gamma_\nu\Pi\right]}$$

Nous ferons maintenant deux hypothèses :

1) Supposons que $K_{\mu\nu}$ représente le moment cinétique propre du corps, c'est-à-dire le moment pris par rapport au centre de gravité au sens de Möller[2].

Le système propre sera défini ici par $\varphi_j = 0$ (voir l'expression (2) du spineur) et nous supposerons donc que :

$\varphi_j = 0$ entraîne $K_{i4} = 0$.

2) Dans le système propre, les composantes d'espace K^{0}_{ij} du moment cinétique forment un vecteur spatial. Nous pouvons orienter les axes d'espace du système propre de telle sorte que l'axe des z coïncide avec le moment cinétique. Ce système, lié au corps sera donc tel que :

$$\theta_i = \varphi_j = 0$$

---

[2] Le centre de gravité est le point qui est centre de masse dans le système propre du corps, c'est-à-dire dans le système où les composantes d'espace de l'impulsion totale s'annulent. (MÖLLER : Annales de l'Institut Henri Poincaré, 11, 1949). Dans ce système les composantes de temps du moment cinétique propre sont nulles.

$$K^0_{i4} = K^0_{23} = K^0_{31} = 0$$

$$K^0_{12} = k$$

et
$$\psi^0 = \exp(-i\,\gamma_5\,\frac{A}{2})\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Le système ainsi défini est différent de celui choisi en mécanique classique, où l'on prend comme axes les axes de l'ellipsoïde d'inertie. On verra que c'est notre système qui simplifie les calculs en termes de spineurs, et c'est celui qui est implicitement choisi en théorie de Dirac[3].

Nous aurons dans ce système (compte tenu de (4)) :

$$\pi_0 = -\,i\,K_0^{12}\exp(i\,\gamma_5\,A)\;\gamma_1\,\gamma_2\exp(-i\,\gamma_5\,\frac{A}{2})\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$\pi_0 = -\,k\exp(i\,\gamma_5\,A)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\exp(-i\,\gamma_5\,\frac{A}{2})$$

$$= +\,k\exp(i\,\gamma_5\,A)\,.\,\exp(-i\,\gamma_5\,\frac{A}{2})\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\pi_0 = k\exp(i\,\gamma_5\,A)\,\psi_0$$

et donc, de façon invariante

$$(6)\qquad \boxed{\pi = k\exp(i\,\gamma_5\,A)\,\psi}$$

et de même

$$\boxed{\pi^+ = -\,k\,\psi^+\exp(i\,\gamma_5\,A)}$$

Si nous introduisons dans (5) les expressions (6), il vient

$$K_{[\mu\nu]} = -\,k\,\psi^+\exp(i\,\gamma_5\,A)\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\psi$$

---

[3] On voit qu'il s'agit ici d'une adaptation du formalisme mathématique, et non d'une hypothèse physique. Nous n'avons ce faisant nullement restreint la généralité du problème, contrairement à ce que nous affirmons dans notre premier séminaire.

Soit encore :

$$K_{[\mu\nu]} = -k(\cos A . \psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \psi + i \sin A \, \psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \psi)$$

$$= i\,k(\psi^+\psi \,.\, \psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \psi - i\,\psi^+ \gamma_5 \psi \;\; \overline{\psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \psi}\;)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}} \; \overline{(\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\psi \,.\, \psi^+\gamma_\nu\psi - \psi^+\gamma_5\gamma_\nu\psi \; \psi^+\gamma_\mu\psi)}$$

d'après une formule de Kofinck[(4)]

On pose alors :

$$\sigma_\mu = \psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \psi \qquad\qquad u_\mu = \frac{\psi^+ \gamma_\mu \psi}{\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}}$$

d'où :

(7) $$\boxed{K_{\mu\nu} = k(\overline{\sigma_\mu u_\nu - \sigma_\nu u_\mu})}$$

De l'expression (2) du spineur, on déduit aisément que u_μ est le vecteur vitesse unitaire de la particule.

Quant au lagrangien, il s'écrira maintenant :

$$L = \pi^+ \dot{\psi} + \dot{\psi}^+ \pi = -k(\psi^+ \exp(i\gamma_5 A)\dot{\psi} - \dot{\psi}^+ \exp(i\gamma_5 A)\psi)$$

soit encore :

(8) $$\boxed{L = i\,k\,[\psi^+\psi(\psi^+\dot{\psi} - \dot{\psi}^+\psi) - \psi^+\gamma_5\psi(\psi^+\gamma_5\dot{\psi} - \dot{\psi}^+\gamma_5\psi)]}$$

On en tire alors les équations du mouvement d'un corps relativiste en rotation :

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0$$

$$\boxed{(\psi^+\psi - \psi^+\gamma_5\psi \,.\, \gamma_5)\dot{\psi} + (\psi^+\dot{\psi} - \psi^+\gamma_5\dot{\psi} \,.\, \gamma_5)\psi = 0}$$

Mais l'étude de ces équations n'est pas l'objet du présent travail.

3.- Equations d'un champ continu de corps en rotation (fluide à spin).

Remarquons d'abord que dans l'expression (8) du lagrangien, il nous manque deux facteurs :

---

(4) Cf : O. COSTA de BEAUREGARD : Thèse (1943)
G. PETIAU : J. Math. pures et app., 112, (1947)

– Le facteur $\dfrac{1}{(\psi^+\psi)^2 + (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}$ provenant de l'expression de $\omega_{\mu\nu}$.

– Le facteur $\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}$ qui se trouve implicitement dans l'expression du moment cinétique.

Ces deux facteurs, égaux à l'unité n'interviennent pas pour un corps isolé.

De même, nous devons ajouter au lagrangien le terme $\underline{m}$ [5], qui est l'énergie au repos du corps. Ce terme constant n'intervient pas, lui non plus, dans l'équation du corps isolé, mais joue un rôle dans celle d'un fluide.

Nous écrirons donc le lagrangien (8) sous la forme équivalente :

$$(9)\quad L = \frac{-ik}{\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}}\left[\psi^+\psi(\psi^+\dot{\psi} - \dot{\psi}^+\psi) - \psi^+\gamma_5\psi(\psi^+\gamma_5\dot{\psi} - \dot{\psi}^+\gamma_5\psi)\right] + m\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}$$

Nous voulons décrire un fluide dont les molécules sont de tels corps en rotation, ayant tous même masse $\underline{m}$ et même spin $\underline{k}$, et sans intéraction entre elles. Ce sera un fluide généralisant le schéma "matière pure"[6].

Pour écrire le lagrangien de notre fluide, il nous suffira de multiplier le lagrangien (9) par une densité invariante D. La forme du lagrangien montre alors, qu'il est équivalent de multiplier le spineur ψ par $\sqrt{D}$. Le fluide est donc décrit par le lagrangien (9) où l'on prend le spineur non normé.

La dérivation par rapport au temps propre sera maintenant la dérivation lagrangienne le long de la ligne de courant. Nous écrirons :

$$\dot{\psi} = u^\mu \partial_\mu \psi$$

où u_μ est le quadrivecteur vitesse unitaire, soit :

$$(10)\qquad u_\mu = \frac{\psi^+\gamma_\mu\psi}{\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}}$$

---

(5) Nous prenons la vitesse de la lumière égale à l'unité.

(6) On sait que le tenseur d'énergie d'un tel fluide s'écrit $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$. C'est un fluide parfait sans pressions.
Cf. A. LICHNEROWICZ : Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, Masson, 1954.

Introduisant (10) dans (9), on obtient le lagrangien du fluide :

(11)
$$\boxed{L = \frac{ik\, \psi^+ \gamma_\mu \psi}{(\psi^+\psi)^2 + (i\psi^+\gamma_5\psi)^2} [\psi^+\psi . \psi^+ [\partial_\mu] \psi - \psi^+\gamma_5\psi . \psi^+\gamma_5 [\partial_\mu] \psi] + + m \sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}}$$

Le lagrangien est visiblement invariant de jauge et nous lui appliquerons les résultats généraux de la théorie classique des champs(7) en nous abstenant d'écrire les équations du mouvement sous forme spinorielle.

Nous écrirons d'abord l'expression du courant :

$$j_\mu = \frac{i}{2k} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \psi - \psi^+ \frac{\partial L}{\partial \psi^+_\mu}\right]$$

Un calcul simple donne :

$$j_\mu = \psi^+ \gamma_\mu \psi$$

comme il se devait, d'après (10).

On sait alors qu'en vertu des équations de champ :

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \qquad ,$$

on a la conservation du courant soit :

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

ce qui s'écrit encore :

(12)
$$\boxed{\partial_\mu (D u^\mu) = \dot{D} = 0}$$

L'homogénéité du lagrangien entraîne aussi, après un calcul un peu plus long :

$$\psi^+\left(\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi^+_\mu} - \frac{\partial L}{\partial \psi^+}\right) + \left(\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} - \frac{\partial L}{\partial \psi}\right)\psi = -2L = 0$$

Le lagrangien est donc nul au cours du mouvement.

Ecrivons maintenant le tenseur d'énergie-impulsion.

On a :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_\mu + \psi^+_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi^+_\nu} - L\, g_{\mu\nu}$$

Ici, on a $L = 0$, et un calcul simple nous donnera :

(7) PAULI, Review of Modern Physics, 13, (1941) p. 203.

$$T_{\mu\nu} = \frac{ik\ \psi^+\gamma_\nu\psi}{(\psi^+\psi)^2 + (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}[\psi^+\psi.\ \psi^+[\partial_\mu]\psi - \psi^+\gamma_5\psi\ \psi^+\gamma_5[\partial_\mu]\psi]$$

On voit que cette densité tensorielle est le produit de deux facteurs :

(13) $$\boxed{T_{\mu\nu} = k_\mu u_\nu}$$

soit le vecteur vitesse unitaire :

$$u_\nu = \frac{\psi^+\gamma_\nu\psi}{\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}} ,$$

et la densité vectorielle d'impulsion énergie :

(14) $$\boxed{k_\mu = \frac{-ik}{\sqrt{-(\psi^+\psi)^2 - (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}}[\psi^+\psi.\ \psi^+[\partial_\mu]\psi - \psi^+\gamma_5\psi\ \psi^+\gamma_5[\partial_\mu]\psi]}$$

k_μ est non colinéaire à u_μ et $T_{\mu\nu}$ a exactement la forme proposée par Weyssenhoff[8].

Nous reviendrons à la fin sur le vecteur k_μ .

La partie antisymétrique de $T_{\mu\nu}$ nous sera fournie par la relation de Belinfante-Rosenfeld[9]

$$T_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = \frac{i}{2}\partial^\lambda[\frac{\partial L}{\partial\psi_\lambda}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi - \psi^+\gamma_\mu\gamma_\nu\frac{\partial L}{\partial\psi^+_\lambda}]$$

Il vient :

$$T_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = -k\partial^\lambda[\frac{\psi^+\gamma_\lambda\psi}{(\psi^+\psi)^2 + (i\psi^+\gamma_5\psi)^2}[\psi^+\psi.\ \psi^+\gamma_\mu\gamma_\nu\psi - i\psi^+\gamma_5\psi.\ \overline{\psi^+\gamma_\mu\gamma_\nu\psi}\ ]]$$

$$T_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = k\ \partial^\lambda[u_\lambda(\overline{\sigma_\mu u_\nu - \sigma_\nu u_\mu})]$$

(15) $$\boxed{T_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = \partial^\lambda(u_\lambda K_{[\mu\nu]})}$$

$K_{\mu\nu}$ étant densitaire, $\partial^\lambda[u_\lambda K_{\mu\nu}]$ est simplement la dérivée de $K_{\mu\nu}$ le long de la ligne de courant, on a donc :

(16) $$T_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = k_\mu u_\nu - k_\nu u_\mu = \dot{K}_{\mu\nu}$$

---

(8) WEYSSENHOFF : Acta Physica Polonica, 9, 1947 .

(9) Cf. PAULI, Loc. Cité.

Mais, en vertu des équations du mouvement, on a aussi :

$$(17) \qquad \partial^{\nu} T_{\mu\nu} = \partial^{\nu}(k_{\mu} u_{\nu}) = \dot{k}_{\mu} = 0$$

L'équation (16) peut alors s'écrire :

$$(18) \qquad \boxed{\partial^{\lambda}[u_{\lambda}(x_{\mu} k_{\nu} - x_{\nu} k_{\mu})] + \partial^{\lambda}[u_{\lambda} K_{\mu\nu}] = 0}$$

Il découle donc des équations du mouvement que le moment cinétique total (orbital + spin) se conserve, ce que Weyssenhoff avait postulé pour en déduire (15).

Si alors nous contractons (16) par u_{ν} en tenant compte de $u_{\mu} u^{\mu} = -1$, il vient :

$$(19) \qquad k_{\mu} = - k_{\lambda} u^{\lambda} . u_{\mu} - \dot{K}_{\mu\nu} \; u^{\nu}$$

Mais, compte tenu de (14) , le lagrangien (11) peut s'écrire

$$L = k_{\lambda} \; u^{\lambda} + m \; D$$

où $D = \sqrt{-(\psi^{+}\psi)^{2} - (i\psi^{+} \gamma_{5} \psi)^{2}}$ est la densité invariante du fluide introduite au début.

Le lagrangien étant nul au cours du mouvement, nous avons

$$(20) \qquad \boxed{- k_{\lambda} u^{\lambda} = mD = \mu_0} \quad ,$$

densité de masse propre, ce qu'avait postulé Weyssenhoff.

D'après (12), nous avons de plus :

$$(21) \qquad \boxed{\dot{\mu}_0 = m \, \partial^{\mu}(u_{\mu} D) = 0}$$

c'est-à-dire la conservation de la densité de masse propre du fluide.

D'autre part,

$$K_{\mu\nu} u^{\nu} = 0$$

Cette relation exprime simplement de façon invariante que $K_{i4} = 0$ dans le système propre(10).

(10)Elle se vérifie de façon évidente en tenant compte du fait que

$$K_{\mu\nu} = k \; \overline{\sigma_{\mu} u_{\nu} - \sigma_{\nu} u_{\mu}}$$

On en déduit que :

$$-\dot{K}_{\mu\nu} u^{\nu} = K_{\mu\nu} \dot{u}^{\nu}$$

Compte tenu de (20), on écrira (19) :

$$\boxed{k_{\mu} = \mu_0 u_{\mu} + K_{\mu\nu} \dot{u}^{\nu}} \tag{22}$$

C'est la décomposition de Weyssenhoff.

Si nous introduisons (22) dans (16), nous avons :

$$\boxed{\dot{K}_{\mu\nu} = K_{\mu\lambda} \dot{u}^{\lambda} u_{\nu} - K_{\nu\lambda} \dot{u}^{\lambda} u_{\mu}} \tag{23}$$

Si nous introduisons (22) dans (17), nous avons :

$$\dot{\mu}_0 u_{\mu} + \mu_0 \dot{u} + \dot{K}_{\mu\nu} \dot{u}^{\nu} + K_{\mu\nu} \dot{u}^{\nu} = 0$$

Mais, d'après (21), $\dot{\mu}_0 = 0$, et d'après (23), $\dot{K}_{\mu\nu} \dot{u}^{\nu} = 0$.[11]

On a donc :

$$\boxed{\mu_0 \dot{u}_{\mu} + K_{\mu\nu} \ddot{u}^{\nu} = 0} \tag{24}$$

Les équations (23) et (24) sont les équations de Mathisson[12].

4.- Il est intéressant de confronter ces résultats avec l'expression de grandeurs dynamiques caractérisant la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac[13]. Celle-ci, d'après la conception qui inspire le présent travail, représente en effet des ondes de faible amplitude se propageant dans l'éther considéré comme un fluide de toupies. Si on représente ces ondes elles-mêmes par un fluide fictif, on peut mettre facilement en évidence une analogie étroite entre les lois dynamiques du fluide réel support des ondes et le fluide fictif représentant ces ondes.

Partons du Lagrangien de Dirac en termes de spineurs

$$L = -\frac{i\hbar}{2}(\psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\mu} \psi - 2 K \psi^{+} \psi)$$

---

[11] car $u_{\mu} u^{\mu} = -1$ et $K_{\mu\nu} = -K_{\nu\mu}$

[12] MATHISSON, Acta Physica Polonica, 6, 1937.
WEYSSENHOFF, loc. cit.
Louis de BROGLIE, Th. des Part. de spin 1/2.
MÖLLER, Loc Cit.

[13] Exposé n° 6 de ce Séminaire, présenté le 20 décembre 1955, par J.P. VIGIER, d'après la note de MM. HALBWACHS, LOCHAK et VIGIER, C.R. Acad. Sc. Paris, 241, 1955; p. 692.

On en tire les équations d'onde : $\partial_\mu \gamma_\mu \psi + K \psi = 0$ et $\partial_\mu \psi^+ \gamma_\mu - K \psi^+ = 0$ qui donnent

$$L = 0$$

Le courant est donné par

$$J_\mu = i \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \psi - \psi^+ \frac{\partial L}{\partial \psi^+_\mu} \right) ,$$

soit

$$\boxed{J_\mu = \hbar \, \psi^+ \gamma_\mu \psi}$$

et le tenseur canonique d'énergie impulsion, par

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_\mu + \psi^+_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi^+_\nu} - \delta_{\mu\nu} L = \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu} \psi_\mu + \psi^+_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi^+_\nu}$$

soit

$$\boxed{T_{\mu\nu} = - \frac{i\hbar}{2} \psi^+ [\partial_\mu] \gamma_\nu \psi} \qquad \text{avec} \quad \partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$$

On écrit alors le courant $J_\mu = \rho u_\mu$ en introduisant la vitesse unitaire u_μ du fluide $(u_\mu u_\mu = -1)$ et sa densité ρ :

$$J_\mu J_\mu = - \rho^2 = \hbar^2 \psi^+ \gamma_\mu \psi \cdot \psi^+ \gamma_\mu \psi$$

$$\boxed{\rho = \hbar \sqrt{- \psi^+ \gamma_\mu \psi \cdot \psi^+ \gamma_\mu \psi}}$$

On sait que

$$\psi^+ \gamma_\mu \psi . \psi^+ \gamma_\mu \psi = (\psi^+ \psi)^2 + (i \psi^+ \gamma_5 \psi)^2$$

D'où la densité

$$\rho = \hbar \sqrt{-(\psi^+ \psi)^2 - (i \psi^+ \gamma_5 \psi)^2}$$

On a alors naturellement

$$u_\mu = \frac{\psi^+ \gamma_\mu \psi}{\sqrt{-(\psi^+ \psi)^2 - (i \psi^+ \gamma_5 \psi)^2}}$$

et de même $\partial_\mu (\rho u_\mu) = \dot{\rho} = 0$ le long d'une ligne de courant.

Ce sont les <u>mêmes</u> expressions que celles que nous avons trouvées pour le fluide des toupies (équations (10) et (12)).

Nous effectuons alors une décomposition du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ (qui n'est pas symétrique) de façon à faire apparaître, conformément aux idées de Möller et Weyssenhoff, une impulsion k_μ non colinéaire à la vitesse. Il faut introduire un tenseur $\Theta_{\mu\nu}$ des tensions internes que nous soumettrons à la condition $\Theta_{\mu\nu} \; u_{\nu} = 0$, ce qui signifie que toutes ces composantes sont dans l'espace propre, en accord avec les conceptions habituelles de l'hydrodynamique :

$$T_{\mu\nu} = k_{\mu} \; u_{\nu} + \Theta_{\mu\nu} \quad .$$

Si nous contractons par u_{ν} , il vient

$$T_{\mu\nu} \; u_{\nu} = - k_{\mu}$$

puisque $u_{\nu} u_{\nu} = -1$ et que $\Theta_{\mu\nu} u_{\nu} = 0$.

Nous pouvons donc calculer k_{μ} :

$$\boxed{- k_{\mu} = - \frac{i\hbar}{2} \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\nu} \psi \; . \; \frac{\psi^{+} \gamma_{\nu} \psi}{\sqrt{-(\psi^{+}\psi)^{2} + (\psi^{+} \gamma_{5} \psi)^{2}}}}$$

Utilisons la relation de Kofinck :

$$\psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\nu} \psi . \psi^{+} \gamma_{\nu} \psi = \psi^{+} \psi \; . \; \psi^{+} [\partial_{\mu}] \psi - \psi^{+} \gamma_{5} \psi \; . \; \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{5} \psi$$

Il vient

$$k_{\mu} = \frac{i\hbar}{2} \; \frac{\psi^{+}\psi \; . \; \psi^{+} [\partial_{\mu}] \psi - \psi^{+} \gamma_{5} \psi . \; \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{5} \psi}{\sqrt{-(\psi^{+}\psi)^{2} + (\psi^{+} \gamma_{5} \psi)^{2}}}$$

Là encore nous retrouvons <u>la même expression</u> du vecteur impulsion que pour le fluide des toupies (équation 14). Par contre, alors que le fluide des toupies est un fluide de Weyssenhoff sans tension interne, le fluide représentatif de l'équation de Dirac comporte des tensions internes :

$$k_{\mu} u_{\nu} = \frac{i\hbar^{3}}{2\rho^{2}} \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\lambda} \psi \; . \; \psi^{+} \gamma_{\lambda} \psi \; . \; \psi^{+} \gamma_{\nu} \psi \neq T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} - k_{\mu} u_{\nu} = \Theta_{\mu\nu} = - \frac{i\hbar}{2} \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\nu} \psi - \frac{i\hbar^{3}}{2\rho^{2}} \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\lambda} \psi . \psi^{+} \gamma_{\lambda} \psi . \psi^{+} \gamma_{\nu} \psi$$

$$\boxed{\Theta_{\mu\nu} = - \frac{i\hbar^{3}}{2\rho^{2}} \psi^{+} [\partial_{\mu}] \gamma_{\lambda} \psi \; \left\{ \delta_{\lambda\nu} \; \frac{\rho^{2}}{\hbar^{2}} + \psi^{+} \gamma_{\lambda} \psi \; \psi^{+} \gamma_{\nu} \psi \right\}}$$

et l'on a bien $\Theta_{\mu\nu} u_{\nu} = 0$.

D'autre part le moment de rotation est donné par $x_{\nu} T_{\mu\lambda} - x_{\mu} T_{\nu\lambda}$.

Si nous prenons sa divergence, il vient

$$\partial_{\lambda}(x_{\nu} T_{\mu\lambda} - x_{\mu} T_{\nu\lambda}) = x_{\nu} \partial_{\lambda} T_{\mu\lambda} - x_{\mu} \partial_{\lambda} T_{\nu\lambda} + \delta_{\lambda\nu} T_{\mu\lambda} - \delta_{\lambda\mu} T_{\nu\lambda}$$

Les deux premiers termes sont nuls puisque $T_{\mu\lambda}$ est conservatif. Les deux derniers donnent $T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = 2\,T_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ qui n'est pas nul puisque $T_{\mu\nu}$ n'est pas symétrique.

Le moment de rotation n'est pas conservatif, car il ne tient compte que de la rotation orbitale alors que le fluide de Dirac comporte aussi une rotation propre.

Le moment de rotation propre (spin angular) est donné par la formule de Belinfante :

$$f_{[\lambda\mu]\nu} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{\nu}} I_{[\lambda\mu]}\, \mathrm{op.}\psi \right\}$$

Ici

$$I_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}\gamma_\lambda\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\lambda$$

d'où

$$f_{[\lambda\mu]\nu} = -\frac{i\hbar}{4}\psi^+\gamma_\nu(\gamma_\lambda\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\lambda)\psi = -\frac{i\hbar}{2}\psi^+\gamma_\nu(\gamma_\lambda\gamma_\mu - \delta_{\lambda\mu})\psi$$

il est facile de voir que les seules composantes non nulles sont celles où $\lambda \neq \mu \neq \nu$ et que le tenseur est complètement antisymétrique :

$$f_{[\lambda\mu\nu]} = -\frac{i\hbar}{2}\psi^+\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu\psi$$

C'est bien la forme donnée plus haut pour le spin. D'après la méthode de Belinfante, on doit former le tenseur

$$S_{\lambda[\mu\nu]} = \tfrac{1}{2}(f_{\lambda\mu\nu} + f_{\nu\lambda\mu} - f_{\mu\nu\lambda}) = \tfrac{1}{2}(-i\hbar)\psi^+(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda)\psi =$$

$$= \tfrac{1}{2}(-i\hbar)\psi^+\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$$

ce qui donne $\frac{1}{2} f_{\lambda\mu\nu}$, que nous écrirons

$$\sigma_{\lambda\mu\nu} = -\frac{i\hbar}{2}\psi^+\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$$

ou en prenant le dual :

$$\boxed{\sigma_\rho = \frac{\hbar}{2}\psi^+\gamma_5\gamma_\rho\psi}$$

La divergence de ce tenseur $\partial_\nu \sigma_{\lambda\mu\nu}$ fournit le tenseur d'énergie-impulsion de rotation propre $t_{\lambda\mu}$ qui est tel que $T_{\lambda\mu} + t_{\lambda\mu}$ est à la fois conservatif et symétrique. $t_{\lambda\mu}$ qui, dans le cas de l'équation de Dirac est antisymétrique ($t_{\mu\nu} = -T_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$) se transforme facilement en

$$t_{\lambda\mu} = \partial_\nu\sigma_{[\lambda\mu\nu]} = \partial_\nu\delta_{\lambda\mu\nu\rho}\sigma_\rho$$

en appelant σ_ρ le dual de $\sigma_{[\lambda\mu\nu]}$ qui est le spin proprement dit.

$$t_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}(\partial_\nu \delta_{\lambda\mu\nu\rho}\sigma_\rho + \partial_\rho \delta_{\lambda\mu\rho\nu}\sigma_\nu) = \tfrac{1}{2}\delta_{\lambda\mu\nu\rho}(\partial_\nu\sigma_\rho - \partial_\rho\sigma_\nu)$$

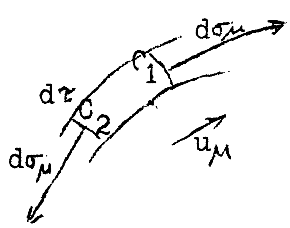
d'où le résultat bien connu relatif à l'équation d'onde de Dirac

$$t_{\lambda\mu} = \overline{\tfrac{1}{2}(\partial_\lambda\sigma_\mu - \partial_\mu\sigma_\lambda)} = -T_{\underset{\vee}{\lambda\mu}}$$

l'énergie-impulsion de rotation propre est représentée par le dual du rotationnel du spin.

Nous allons maintenant justifier cette représentation hydrodynamique des ondes de Dirac (qui est équivalente à celle proposée par Takabayasi[14]) en étudiant la dynamique d'une gouttelette de fluide, contenue dans un volume du genre espace. On montre que cette gouttelette obéit aux trois lois de la dynamique : conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment cinétique, ce qui justifie complètement l'interprétation des quatre grandeurs relativistes ρ, u_μ, K_μ et σ_μ respectivement comme densité de masse, vitesse, densité d'impulsion et densité de rotation interne, ainsi que celle du tenseur d'espace propre $\Theta_{\mu\nu}$ comme tenseur de tension interne. Un élément de mouvement de la gouttelette sera représenté par un domaine relativiste limité par un hypertube de courant infiniment délié et deux hypercloisons d'espace propre orthogonales au courant et infiniment voisines C_1 C_2.

1) Intégrons dans ce domaine l'équation de conservation du courant $\partial_\mu(\rho u_\mu) = 0$



$$\iiiint \partial_\mu(\rho u_\mu)\, d\omega = 0 = \iiint_S \rho\, u_\mu\, d\sigma_\mu \qquad \text{(théorème de Gauss)}$$

$d\sigma_\mu$ étant l'élément d'hypersurface.

Décomposons l'hypersurface S en trois parties. Sur l'hyperparoi du tube, $d\sigma_\mu$ est perpendiculaire à u_μ $u_\mu d\sigma_\mu = 0$, l'intégrale est nulle.

Sur l'hypercloison C_1 : $d\sigma_\mu = u_\mu dV_0$ $\qquad u_\mu d\sigma_\mu = u_\mu u_\mu dV_0 = -dV_0$

---

(14) Takabayasi décompose le tenseur d'énergie impulsion en

$$T_{\mu\nu} = k_\mu u_\nu + \frac{c\hbar}{2} P\,(s_\nu \partial_\mu A + i\,\delta_{\nu\alpha\beta\gamma}\, u^\alpha s^\beta \partial_\mu u^\gamma) \quad (*)$$

s^μ étant le vecteur unitaire colinéaire au spin : $s_\mu u_\mu = 0$ $\quad s_\mu s_\mu = -1$. On voit tout de suite que le second terme, contracté par u_ν, s'annule. Il représente donc $\Theta_{\mu\nu}$ et cette décomposition est équivalente à la nôtre, le k_μ de Takabayasi est le même que le nôtre(**). On obtient ainei une autre expression pour les tensions internes $\Theta_{\mu\nu} = \dfrac{c\hbar}{2}\dfrac{P}{\sqrt{-\sigma_\lambda\sigma_\lambda}}[\sigma_\nu\partial_\mu A + i\,\delta_{\nu\alpha\beta\gamma}u^\alpha\sigma^\beta\partial_\mu u^\gamma]$

Le second terme qu'on peut écrire $ik_{\nu\gamma}\partial_\mu u^\gamma$ ou $-iu^\gamma\partial_\mu k_{\nu\gamma}$ est classique et caractérise tous les fluides à spin. Le premier, dans lequel A est défini à partir des deux invariants : $\operatorname{tg} A = \dfrac{i\,\psi^+\gamma_5\psi}{\psi^+\psi}$, est propre au fluide de Dirac et paraît plus difficile à interpréter.

(*) TAKABAYASI, Nuovo cimento, III, 2 (février 1956)
(**) HALBWACHS-LOCHAK-VIGIER, C.R., Acad. Sc. Paris, 241 (1955) p. 744.

Sur l'hypercloison C_2 : $d\sigma_\mu = - u_\mu dV_0$ $\qquad u_\mu d\sigma_\mu = - u_\mu u_\mu dV_0 = dV_0$
dV_0 étant l'élément de volume <u>propre</u>.

$$\iiiint \partial_\mu (\rho u_\mu)\, d\omega = \iiint_{C_2} \rho\, dV_0 - \iiint_{C_1} \rho\, dV_0 = 0 \quad .$$

Les deux intégrales représentent les masses m_2 et m_1 de la goutelette aux deux instants considérés. Cette masse est bien constante.

2) Intégrons maintenant l'équation de conservation du tenseur canonique d'énergie-impulsion $\quad \partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$

$$\iiiint \partial_\nu T_{\mu\nu}\, d\omega = \iiiint \partial_\nu (k_\mu u_\nu)\, d\omega + \iiiint \partial_\nu \Theta_{\mu\nu}\, d\omega = 0$$

Appliquons au premier terme le théorème de Gauss.

Il vient :

$$\iiiint \partial_\nu (k_\mu u_\nu)\, d\omega = \iiint_S k_\mu u_\nu\, d\sigma_\nu$$

On peut décomposer l'hypersurface S comme précedemment sur l'hyperparoi du tube, on a

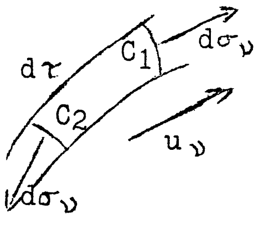
$$u_\nu d\sigma_\nu = 0 \quad , \qquad \text{l'intégrale est nulle.}$$

Il ne reste donc que les termes d'hypercloison, soit

$$\iiint_{C_1} k_\mu u_\nu d\sigma_\nu + \iiint_{C_2} k_\mu u_\nu d\sigma_\nu$$

avec

$$(u_\nu d\sigma_\nu)_{C_1} = -dV_0 \qquad (u_\nu d\sigma_\nu)_{C_2} = dV_0$$



d'où : $$\iiint_S k_\mu u_\nu d\sigma_\nu = - \iiint_{C_1} k_\mu dV_0 + \iiint_{C_2} k_\mu dV_0 =$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left[\iiint_{V_0} k_\mu dV_0 \right] d\tau = \left[\iiint_{V_0} \dot{k}_\mu dV_0 \right] d\tau$$

en désignant par $\dot{k}_\mu$ la dérivée de la densité d'impulsion le long de la ligne de courant.

On a donc en définitive :

$$\iiiint \partial_\nu T_{\mu\nu}\, d\omega = \iiiint \partial_\nu \Theta_{\mu\nu}\, d\omega + \left[\iiint_{V_0} \dot{k}_\mu dV_0 \right] d\tau = 0$$

L'interprétation est immédiate : le premier terme peut s'écrire

$$\int \left[\iiint \partial_\nu \Theta_{\mu\nu} dV_0 \right] d\tau$$

ou encore $\quad [\iiint \partial_\nu \Theta_{\mu\nu} \; dV_0]\, d\tau$ si les deux hypercloisons sont suffisamment voisines. $-\partial_\nu \Theta_{\mu\nu}$ est classiquement une densité de force de tension interne f_μ et on a finalement

$$\iiint_{V_0} \dot{k}_\mu \, dV_0 = \iiint_{V_0} f_\mu \, dV_0 \qquad .$$

ou en intégrant :

$$\boxed{\dot{K}_\mu = F_\mu}$$

C'est le théorème de la quantité de mouvement pour la goutelette prise en bloc.

3) Intégrons, suivant la même méthode, l'équation de conservation du moment du tenseur d'énergie-impulsion <u>total</u> $T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$:

$$\iiiint \partial_\nu [x_\nu (T_{\mu\lambda} + t_{\mu\lambda}) - x_\mu (T_{\nu\lambda} + t_{\nu\lambda})]\, d\omega = 0$$

$$2 \iiiint T_{\overset{\vee}{\mu\nu}}\, d\omega + 2 \iiiint t_{\overset{\vee}{\mu\nu}}\, d\omega = 0$$

$$2 \iiiint T_{\overset{\vee}{\mu\nu}}\, d\omega = \iiiint (k_\mu u_\nu - k_\nu u_\mu)\, d\omega + 2 \iiiint \Theta_{\overset{\vee}{\mu\nu}}\, d\omega$$

$$2 \iiiint t_{\mu\nu}\, d\omega = 2 \iiiint \partial_\lambda \sigma_{\mu\nu\lambda}\, d\omega = 2 \iiint_S \sigma_{\mu\nu\lambda}\, d\sigma_\lambda =$$

$$2 \iiint_P \sigma_{\mu\nu\lambda}\, d\sigma_\lambda - 2 \frac{d}{d\tau} [\iiint_{V_0} \sigma_{\mu\nu\lambda}\; u_\lambda \, dV_0]\, d\tau$$

On peut identifier le tenseur $2\sigma_{[\mu\nu\lambda]} u$ avec le spin $k_{[\mu\nu]}$ de Weissenhoff. C'est un tenseur d'espace propre car on a évidemment :

$$k_{\mu\nu} \; u_\nu = 0$$

D'autre part on peut expliciter le vecteur $d\sigma_\lambda$ sur l'hyperparoi par $d\sigma_\lambda = ds_{0\lambda}\, d\tau$(15) $\; d\sigma_\lambda$ étant dans l'espace propre, $ds_{0\lambda}$ y est aussi, et

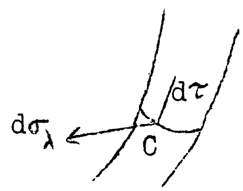
---

(15) Nous avons $d\sigma_\lambda = \overline{[dx^\mu dx^\nu dx^\rho]} = \delta_{\lambda\mu\nu\rho} [dx^\mu \; dx^\nu \; dx^\rho]$. Si nous prenons les axes propres $d\sigma_\lambda = \delta_{\lambda\mu\nu\rho} [dx_1^\mu dx_2^\nu u^\rho d\tau]$ avec $u^4 = ic \quad u^1 = u^2 = u^3 = 0$ $dx_1^4 = dx_2^4 = 0$.

$$d\sigma_\lambda = \delta_{\lambda\mu\nu} [dx_1^\mu, dx_2^\nu, icd\tau] = icd\tau\, \overline{\delta_{\lambda\mu\nu} [dx_1^\mu dx_2^\nu]} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu, \nu \neq 4$$

ce qu'on peut écrire $d\sigma_i = d\tau\, \varepsilon_{iJK} [dx_1^J dx_2^K] = d\tau \overline{[dx^J \; dx^K]}$ le dual étant un dual à trois indices dans l'espace propre : ic $\delta_{iJK} = \varepsilon_{iJK}$. En fait l'élément de surface propre est $dS_{0i} = \overrightarrow{[dx^J \; dx^K]}$ ce qui donne bien $d\sigma_\lambda = ds_{0\lambda} . d\tau$ $(\lambda \neq 4)$

représente ainsi le vecteur infinitésimal d'espace propre normal à l'hypercontour d'espace propre C qui n'est autre que la surface Σ_0 de la goutelette dans l'espace propre.



Le produit $\sigma_{\mu\nu\lambda}\, ds_{0\lambda}$ est donc l'élément de flux du spin à travers la surface de la gouttelette dans l'espace propre. On peut du reste l'écrire $\delta_{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_\rho\, ds_{0\lambda}$ ou $\overline{\sigma_\mu\, ds_{0\mu}}$

On a donc finalement :

$$2\iiiint T_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\, d\omega + 2\iiiint t_{\mu\nu}\, d\omega = 0 = \int d\tau \iiint_{V_0} (k_\mu u_\nu - k_\nu u_\mu)\, dV_0 + 2\int d\tau \iiint_{V_0} \Theta_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\, dV_0$$

$$+ 2\int d\tau \iint_{\Sigma_0} \overline{\sigma_\nu\, ds_{0\mu}} - \frac{d}{d\tau}\left[\iiint_{V_0} k_{\mu\nu}\, dV_0\right] d\tau = 0$$

Si l'intervalle de temps entre C et C' est suffisamment petit, on peut simplifier par $d\tau$ et il reste (en posant $\dfrac{dk_{\mu\nu}}{d\tau} = \dot{k}_{\mu\nu}$)

$$\iiint_{V_0} (k_\mu u_\nu - k_\nu u_\mu)\, dV_0 + 2\iiint_{V_0} \Theta_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\, dV_0 + 2\iint_{\Sigma_0} \overline{\sigma_\mu\, ds_0} - \iiint_{V_0} \dot{k}_{\mu\nu}\, dV_0 = 0$$

ou enfin, en utilisant les notations de Weyssenhoff pour les intégrales sur le volume propre de la gouttelette :

$$\boxed{K_\mu u_\nu - K_\nu u_\mu = \mathring{K}_{\mu\nu} - 2\iiint_{V_0} \Theta_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\, dV_0 + 2\iint_{\Sigma_0} \overline{\sigma_\mu\, ds_{0\nu}}}$$

Formule qui généralise la formule classique de Weyssenhoff au cas d'un fluide doté de tensions internes.

Les deux derniers termes caractérisent ce qu'on peut appeler la "torsion" du fluide. L'existence des tensions internes et leur caractère dissymétrique font nécessairement intervenir dans la dynamique de la gouttelette en rotation, d'une part l'intégrale de volume des tensions dissymétriques qui entraînent de proche en proche la rotation de l'ensemble de la gouttelette, d'autre part des actions de surface liées à la rotation <u>propre</u> de tous les éléments du fluide extérieur qui touchent immédiatement la gouttelette et qui l'incitent à tourner en roulant sur eux.

On peut conclure des calculs précédents que l'équation de Dirac peut être <u>représentée</u> par un modèle hydrodynamique cohérent qui est celui même qu'a proposé Takabayasi. Le fluide doit être considéré comme possédant des tensions internes et un mouvement tourbillonnaire infinitésimal. Une gouttelette obéit aux trois lois fondamentales de la dynamique classique : conservation de la masse, théorème de la quantité de mouvement, théorème du moment cinétique.

Le fluide représentatif diffère par contre du fluide réel par lequel nous nous efforçons de représenter l'éther et qui est un fluide "matière pure" dépourvu de tensions internes, conformément au modèle de Weyssenhoff.

La comparaison entre les deux fluides s'exprime par :

$T_{\mu\nu} = k_{\mu} u_{\nu}$ pour Weyssenhoff

$T_{\mu\nu} = k_{\mu} u_{\nu} + \Theta_{\mu\nu}$ pour Dirac Takabayasi

$T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \dot{k}_{\mu\nu}$ pour Weyssenhoff

$$T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \dot{k}_{\mu\nu} + \lim_{\Sigma_0 \to 0} \left[\frac{1}{V_0} \iint \overline{\sigma_{\nu}\, ds_{0\mu}} \right] = \tfrac{1}{2}(\partial_{\nu}\sigma_{\mu} - \partial_{\mu}\sigma_{\nu})$$

pour Dirac-Takabayasi.

5.- Remarques sur les résultats précédents :

1) Nous avons montré qu'un fluide à spin n'est autre qu'un fluide ordinaire dont les "molécules" sont dotées d'un mouvement de rotation propre classique. L'introduction d'une densité de spin se justifie lorsqu'on se place à une échelle suffisamment grande pour que le fluide puisse être considéré comme continu. Cette densité ne peut évidemment se réduire à un rotationnel, elle est une grandeur macroscopique qui rend compte de mouvements tourbillonnaires s'effectuant dans des domaines dont les dimensions sont considérées comme négligeables à l'échelle où l'on se place.

Dans le modèle d'éther que nous proposons, nous avons introduit des structures tourbillonnaires stables, considérées en première approximation comme solides, et supposées petites devant les dimensions de l'électron. Nous aurons donc le droit de traiter l'éther au niveau quantique comme un fluide à spin.

2) L'expression (14) du vecteur d'impulsion k_{μ} est la même que celle de l'impulsion du fluide de Dirac dans la représentation hydrodynamique de Takabayasi.

Ainsi se confirme l'idée déjà émise[16] selon laquelle le fluide de Dirac serait un fluide de Weyssenhoff avec tensions internes.

Nos calculs montrent que l'impulsion du fluide de Dirac est simplement celle d'un fluide à spin classique. Son expression n'a rien à voir avec la

(16) HALBWACHS, LOCHAK, VIGIER : C.R. Acad. Sc. Paris, 241 (1955) p. 744

théorie des quanta, sinon dans la mesure où le spin est un phénomène qui est à la base de la théorie des quanta.

On voit également que l'opérateur différentiel qui apparait linéairemant dans l'expression de l'impulsion est l'opérateur ∂_μ , c'est-à-dire celui de la théorie des quanta.

En effet, si π et π^+ sont respectivement conjugués à ψ et ψ^+ par rapport au temps propre, la densité d'impulsion nous sera donnée par :

$$\pi^+ \overrightarrow{\partial_\mu} \psi - \psi^+ \overleftarrow{\partial_\mu} \pi$$

L'opérateur ∂_μ semble donc ressortir tout simplement du fait que les équations décrivent des particules à spin(17) et du fait que l'on se sert de spineurs.

De même, dans l'équation (18) on voit apparaître

$$P_{\mu\nu} = (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad ,$$

opérateur moment cinétique orbital, comme en théorie des quanta.

On a

$$x_\mu k_\nu - x_\nu k_\mu = \pi^+ \overrightarrow{P_{\mu\nu}} \psi - \psi^+ \overleftarrow{P_{\mu\nu}} \pi$$

Ces dernières remarques sont encore très fragmentaires mais laissent espérer qu'on peut donner une interprétation simple de la correspondance communément admise entre les grandeurs physiques et les opérateurs attribués à tort à la seule théorie des quanta.

Enfin, comme nous l'avohs vu, la théorie des fluides à spin peut être déduite du lagrangien

$$L = \tfrac{1}{2} K^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} + D\, m_0 c^2$$

(17) Toutes les équations, y compris l'équation de Schrödinger qui est l'approximation non relativiste de l'équation de Dirac où le spin est supposé parallèle à une direction fixe. Le ψ de Schrödinger est en réalité une composante de spineur.

qui exprime sous forme relativiste[18] l'idée que l'énergie d'un corps provient essentiellement de son mouvement de rotation relativiste dans l'espace-temps ce qui est à rapprocher de l'hypothèse que Mr Louis de Broglie a mise à la base de la mécanique ondulatoire et qu'il exprimait en ces termes : "chaque fois que dans un système de référence un élément matériel, au sens le plus général, possède une énergie W, il existe dans ce système un phénomène périodique de fréquence ν définie par la relation $W = h\nu$ où h désigne la constante de Planck".

---

[18] On a en effet dans le système propre d'un tourbillon, et à cause des équations du mouvement :

$$L = -\frac{1}{2}\,k.\vec{S}\;\overrightarrow{\frac{d\theta}{dt}} + m_0c^2 = 0$$

(où $\frac{d\theta}{dt}$ désigne l'angle de rotation autour du moment cinétique $k\vec{s}$)

analogue à la relation classique de Mr de Broglie.:

$$E = h\nu_0 = m_0\,c^2$$