SÉMINAIRE L. DE BROGLIE.
THÉORIES PHYSIQUES

R. CHENON

Parenthèses de Poisson

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. nº 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1955/1956
-:-:-:-

21 février 1956

Exposé n° 13

PARENTHÈSES DE POISSON,

par R. CHENON.

Une des méthodes utilisées pour se débarasser des divergences qui apparaissent en théorie des champs consiste à pratiquer des coupures.

Celles-ci sont étrangères aux principes de la théorie. On peut les interpréter comme l'indication de l'existence d'une longueur élémentaire, ou peut être encore comme la nécessité de quantifier l'espace-temps simultanément avec les champs.

Or la théorie classique des champs, sous sa forme Lagrangienne, prend un aspect mathématique très clair si on ne distingue pas les variables dépendantes et indépendantes. Le but, modeste, de cet exposé est de montrer cet aspect en définissant les parenthèses de Poisson sans faire jouer de rôle particulier à aucune variable.

1.- Introduction [1] [2]

Nous étudierons d'abord les champs à un nombre fini de degré de liberté, c'est-à-dire la mécanique analytique classique, dans le but d'introduire de façon naturelle les formes différentielles extérieures qui seront à la base de cet exposé.

Les équations eulériennes du problème d'extremum :

$$\delta \int L\ (q_i\ ,\ \dot{q}_i\ ,\ t)\ dt = 0 \tag{1}$$

sont en général du 2e ordre. On se ramène à des équations du 1er ordre en introduisant les moments $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ ou, ce que nous ferons ici, les vitesses $v_i = \dot{q}_i$. Le problème libre (1) devient le problème lié :

$$\delta \int L\ (q_i\ ,\ v_i\ ,\ t)\ dt = 0 \qquad \text{avec} \qquad \dot{q}_i - v_i = 0 \tag{2}$$

Or, dans le cas où $\text{dét}\ \left| \partial^2 L / \partial v_i\ \partial v_j \right| \neq 0$, ce problème lié est équivalent au problème libre :

$$\delta \int (L - \frac{\partial L}{\partial v_i}\ v_i)\, dt\ + \frac{\partial L}{\partial v_i}\ dq_i\ =\ 0 \tag{3}$$

l'absence de termes en dv_i signifie que l'on peut obtenir une forme canonique par des calculs purement algébriques. On reconnait en effet dans (3) l'expression : $p_i \, dq_i - H \, dt$.

Nous allons, d'une façon plus générale envisager le problème non canonique :

$$\delta \int a_i(X) \, dX^i = 0 \tag{4}$$

la forme différentielle $\omega = a_i \, dX^i$ étant quelconque. (ω = forme extérieure de degré 1 ou forme de Pfaff)

on a :
$$\delta\omega = \partial_j \, a_i \, \delta X^j dX^i + a_i \, \delta dX^i$$

ou δ et d étant échangeables, en faisant une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \partial_j \, a_i \, [\, \delta X^j \, dX^i - \delta X^i \, dX^j \,] + d \, [a_i \, \delta X^i] \\ &= \tfrac{1}{2} \, g_{ij} \, [\, \delta X^i \, dX^j - \delta X^j \, dX^i \,] + d \, [a_i \, \delta X^i] \end{aligned}$$

avec $g_{ij} = \partial_i \, a_j - \partial_j \, a_i$.

Si, les extrémités du chemin d'intégration étant fixes on fait une suite de variations δ qui conduise du chemin initial ℓ au chemin final ℓ' en balayant une surface s , on aura :

$$\int_{\ell'} \omega - \int_{\ell} \omega = \int_s \tfrac{1}{2} \, g_{ij} [\, \delta X^i \, dX^j - \delta X^j \, dX^i \,] \tag{5}$$

on note généralement l'élément infinitésimal de surface $\delta X^i dX^j - \delta X^j \, dX^i$ sous la forme $dX^i \, dX^j$. On doit considérer que $dX^i \, dX^j$ change de signe si on échange dX^i et dX^j .

On peut aussi considérer $dX^i \, dX^j$ comme le produit symbolique des 2 différentielles : (produit extérieur anticommutatif)

$$dX^i \, dX^j = dX^i \wedge dX^j = - \, dX^j \wedge dX^i$$

on obtient la forme de degré 2 :
$$\Omega = \tfrac{1}{2} \, g_{ij} dX^i \wedge dX^j$$

L'opération qui fait passer de ω à Ω se nomme une dérivation extérieure et se note d . On peut écrire :
$$\Omega = d\,\omega = da_i \wedge dX^i$$

si on définit le produit $(\wedge)$ comme distributif par rapport à l'addition. La formule (5) , qui est une formule de Stokes s'écrit :

$$\int_s d\,\omega = \int_{\text{bord de } s} \omega$$

les équations du problème (4) sont données par le système de Pfaff :

(6) $$\left\{ \omega_i \equiv g_{ij} dX^j = 0 \right.$$

les opérateurs qui font passer de Ω à ω_i que nous noterons

$$\omega_i \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial dX_i} \equiv d_i \Omega$$

sont définis comme supprimant dX^i ramené en 1ère position.

Exemple. Reprenons
$$\omega = p_i\, dq_i - H\, dt$$
$$\Omega = dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial dp_i} &= dq_i - \partial H/\partial p_i \; dt \\ \frac{\partial \Omega}{\partial dq_i} &= - dp_i - \partial H/\partial q_i \; dt \\ \frac{\partial \Omega}{\partial dt} &= dH - \partial \mathcal{L}/\partial t \quad dt \end{aligned} \right.$$

2.- Les formes différentielles extérieures [1][3]

Une forme de degré p s'écrit

$$\omega_p = \sum C_{i_1 \dots i_p}(X)\, dX^{i_1} \wedge dX^{i_2} \dots \wedge dX^{i_p}$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

La multiplication $\wedge$ est associative, distributive par rapport à l'addition mais anticommutative

$$\left[\begin{aligned} dX^i \wedge dX^j &= - dX^j \wedge dX^i \\ dX^i \wedge dX^i &= 0 \end{aligned} \right.$$

Il en résulte $p \leq n$.

On peut considérer ω comme l'élément figurant sous le signe $\int$ d'une intégrale p-uple dans l'espace à n dimensions. On montre que

$$\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq}\, \omega_q \wedge \omega_p \quad .$$

Opérateurs

1°) dérivation

$$d\omega = \sum dC_{i_1 \dots 2_p} \wedge dX^{i_1} \dots dX^{i_p} \quad \text{(forme de degré } p+1)$$

on peut aussi écrire :

$$d = dX^k \wedge \partial_k \qquad (\partial_k \text{ dérivation des coefficients})$$

on montre que :

$$\left| \begin{array}{l} d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \, \omega_p \wedge d\,\omega_q \\ d^2 \equiv 0 \qquad \text{(Théorème de Poincaré), on effet :} \end{array} \right.$$

$$d^2 = dX^k \wedge \partial_k \, (\partial X^\ell \wedge \partial \ell) = \underbrace{dX^k \wedge dX^\ell}_{\text{antisym}} \wedge \underbrace{\partial_k \partial_\ell}_{\text{sym}} = 0$$

Si $d\,\omega = 0$, on dit que ω est fermée, on montre alors que, au moins localement, $\omega = d\,\omega'$.

2°) $d_k \omega = \dfrac{\partial \omega}{\partial d X_k}$ = suppression de dX^k ramené en 1ère position

$$\left| \begin{array}{l} d_k \, d_\ell = - d_\ell \, d_k \\ d_k(\omega_p \wedge \omega_q) = d_k \omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \, \omega_p \wedge d_k \omega_q \\ dX^k \wedge d_k \omega_p = p.\omega \\ d d_k = - d_k d + \partial_k \end{array} \right.$$

3.- Théorie des champs [4]

Considérons le problème

(7) $$\delta \int L(X_\mu , \varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu) \, dX^1 \wedge \dots \wedge dX^p = 0$$
$$\mu = 1, 2, \dots, p \qquad \alpha = (1, 2, \dots, n)$$

Si on introduit les vitesses $v^\alpha_\mu = \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X_\mu}$ qui vérifient

(8) $$\pi^\alpha \equiv d\varphi^\alpha - v^\alpha_\mu \, dX^\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad d\pi^\alpha = 0$$

on est amené à considérer le problème (9) qui généralise (3) :

(9) $$\delta \int L \, dX^1 \dots dX^p + \frac{\partial L}{\partial v^\alpha_\mu} dX^1 \dots dX^{\mu-1} \wedge \pi^\alpha \wedge dX^{\mu+1} \dots dX^p = 0$$

Nous allons d'une façon plus générale considérer le problème (10) qui généralise (4) :

(10) $\delta \int \omega = 0$ $\qquad$ ω étant une forme de degré p

Nous négligerons d'abord les conditions (8) qui cependant ne sont plus des conséquences de (10).

Un calcul analogue a celui déjà fait donne

(11) $$\delta\omega = \delta x^K d_K\, d\omega + d\,[\delta x^k \,.\, d_k\omega\,]$$

d'où les équations :

(12) $$\mathcal{E}\,\left\{\,\omega_k \equiv d_k\, d\omega = 0\right.$$

On obtient les mêmes équations en ajoutant à ω une forme fermée.

<u>Intégrales premières.</u>

Pour $p = 1$, une intégrale première (I.P.) est une fonction de point $F(M)$, telle que $dF = 0$ compte tenu des équations.

Pour $p > 1$, une I.P. est une fonctionnelle $F(V)$ d'une variété V à $p - 1$ dimensions, telle que

(13) $$\frac{\delta F(V)}{\delta V(x)} = 0 \quad \text{compte tenu des équations.}$$

Si ces équations ont comme solution des variétés S à p dimensions, $F(V)$ est invariant lorsque V subit des déformations dans S .

Nous n'envisagerons ici que des fonctionnelles linéaires :

$$F(V) = \int_V f \qquad f = \text{forme de degré } p - 1$$

la condition (13) s'écrit

(14) $$df \equiv f^k .\ \omega_k$$

Réciproquement f^k étant un vecteur contrevariant, pour que $f^k .\ \omega_k$ soit fermée il faut et suffit (localement) que

(15) $$d(f^k .\, \omega_k) = 0$$

et alors $f^k .\, \omega_k = df$: f déterminée à une dérivée près.

Nous dirons que 2 I.P. , F et G , sont équivalentes $(F \sim G)$ si les formes correspondantes sont égales à une dérivée près $(df \equiv dg)$.

<u>Transformations infinitésimales invariantes</u> : (T.I)

$\delta x^k = \varepsilon f^k$ définit une T.I. si $\delta\omega$ est fermée (au second ordre près) c'est-à-dire si $d\,\delta\omega = \delta d\,\omega = 0$, car en appliquant (11) à $d\omega$

$$\delta\, d\omega = \underbrace{\delta x^k .\ d_k\, d\, d\omega}_{0} + d\,[\,\delta x^k\, d_k\, d\omega]$$

on a

(16) $$d(f^k . \omega_k) = 0 \quad \text{identique à 15}$$

d'où

Théorème (Noether) : il y a correspondance biunivoque entre les T.I. et les I.P équivalentes.

Parenthèses de Poisson.

Le crochet de 2 T.I est une T.I. nous allons déterminer les I.P. correspondantes :

soit $$df \equiv f^k . \omega_k \qquad dg \equiv g^k . \omega_k$$

et $$H = (g^{\ell} f^k_{/\ell} - f^{\ell} g^k_{/\ell})\omega_k = (g^{\ell} d_{\ell} df^k - f^{\ell} d_{\ell} dg^k)\omega_k$$

on a $$0 = df^k . \omega_k + f^k d\omega_k$$

d'où $$0 = d_{\ell} df^k . \omega_k + df^k \omega_{\ell K} + f^k d_{\ell} d\omega_k$$

en portant dans H :

$$H = g^{\ell} df^k \omega_{\ell K} - g^{\ell} f^k d_{\ell} d\omega_k - f^{\ell} dg^k \omega_{\ell K} + f^{\ell} g^k d_{\ell} d\omega_k$$

$$= d[g^{\ell} f^k \omega_{\ell K}] - g^{\ell} f^k [dd_{\ell} d_k d\omega + \underbrace{d_{\ell} dd_k d\omega}_{0} - d_k dd_{\ell} d\omega]$$

définition : Soients $F = \int_V f$, $G = \int_V g$ 2 I.P

considérons

$$(f , g) = f^k g^{\ell} d_{\ell} d_k d\omega .$$

La parenthèse de Poisson de F et G est

(17) $$(F , G) = \int_V (f , g)$$

le calcul précédent signifie que (F , G) est une I.P (théorème de Poisson).

On remarquera que 2. I.P équivalentes à 2 autres ont même parenthèse, ou encore que les I.P équivalentes à 0 ont une parenthèse nulle avec toutes les I.P. Elles jouent le rôle de constantes auxquelles elles se réduisent pour $p = 1$.

Cependant la définition (17) ne définit pas la parenthèse à une équivalence près mais choisit parmi les I.P .

<u>Exemple</u>. Si des T.I δ^{α} engendrent un groupe continu fini. Les équations de structure du groupe : $[\delta^{\beta}, \delta^{\alpha}] = C_{\gamma}^{\beta\alpha}\, \delta^{\gamma}$

entrainent $(I^{\beta}, I^{\alpha}) \sim C_{\gamma}^{\beta\alpha}\; I^{\gamma}$

<u>Théorème de Jacobi</u>.

Si $F = \int_V f \qquad G = \int_V g \qquad H = \int_V h$ sont 3 I.P.

l'identité :

$$((f\ ,\ g), h) + ((g\ , h)\ f) + ((h\ , f)\ , g) \equiv d\,[f^k g^{\ell}\, h^m\, d_k\, d_{\ell} d_m\, d\omega]$$

entraine (18) $((F\ ,\ G)\ \ H) + ((G\ ,\ H)F) + ((H\ , F)\ G\ ) \sim 0$

(pour $p = 1$ on a une égalité à 0 au sens strict)

<u>Interprétation des parenthèses</u>.

on a : $(f\ ,\ g) = f^k\, g^{\ell}\, \omega_{\ell k} = g^{\ell}\, d_{\ell}\, [f^k \omega_k] = g^{\ell}\, d_{\ell}\, df$

l'identité (11) donne, pour $\delta x^K = g^K$

$$\delta f = g^{\ell}\, d_{\ell}\, df \ + d\,[g^{\ell}\, d_{\ell}\, f]$$

donc

$$(f\ ,\ g) = \delta f - d\,[g^{\ell}\, d_{\ell}\, f]$$

c'est-à-dire

(19) $\qquad (F\ ,\ G) \sim \delta \int F \qquad\qquad (\delta x^K = g^K)$

<u>Retour à la théorie des champs</u>.

Revenons au problème (9) dans le cas $p = 4$, en tenant compte des conditions (8) . On montre alors que les équations (12) se réduisent à :

$$\omega_{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \partial \varphi_{\alpha}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{\alpha}} - \partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}}\right) d^4X = \breve{G}_{\alpha}\, d^4X$$

$\breve{G}_{\alpha}$ désignant le 1er membre des équations eulériennes.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial V^{\beta}_{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\pi^{\alpha})$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial dX_{\lambda}} \equiv \varphi^{\alpha}_{\lambda}\, \omega_{\alpha}.$$

d'où

1°) si $F = \int f$ est I.P $\qquad df = f^k \omega_k = f^{\alpha} \omega_{\alpha}$

ce qui correspond aux variactions $\delta x = 0$, $\delta \varphi = f^{\alpha}$, $\delta V^{\alpha}_{\mu} = \partial_{\mu}\, f^{\alpha}$

2°) si $F = \int_\sigma A_\mu \, d_\mu \sigma$ (σ surface genre espace)

$$df = (\partial_\mu A_\mu) \, d^4X = f^\alpha \, G_\alpha \, d^4X \longrightarrow \partial_\mu A_\mu = f^\alpha G_\alpha$$

3°) si $F = \int_\sigma A_\mu \, d_\mu \sigma \qquad G = \int_\sigma B_\mu \, d_\mu \sigma \longrightarrow (F , G) = \delta \int_\sigma A_\mu \, d_\mu \sigma$

Exemple. Soit φ vérifiant l'équation $E(\varphi) = (k - \Box)\varphi = 0$

les seules I.P. (outre les 10 provenant des T.I. Lorentziennes) sont

(20) $$I_f = \int_\sigma (f_\mu \varphi - f \varphi_\mu) \, d_\mu \sigma = \int I_\mu \, d_\mu \sigma$$

f étant une solution de $(k - \Box) f = 0$

on a :

$$\partial_\mu I_\mu = \Box f . \varphi - f \Box \varphi = f \, E(\varphi)$$

donc (21) $$(I_f , I_g) \sim \delta \int_\sigma (f_\mu \varphi - f \varphi_\mu) \, d_\mu \sigma = \int_\sigma (f_\mu g - f g_\mu) \, d_\mu \sigma$$

Si au lieu d'appliquer (19) on se sert de (17) on a l'égalité au lieu de l'équivalence dans (21).

On obtient une I.P particulièrement intéressante pour $f = D(X - Y)$ (Jordan-Pauli) alors :

$$I_{D(X-Y)} = \varphi(Y)$$ qui représente une I.P pour Y fixe.

(21) donne :

$$(\varphi(Y) , \varphi(Z)) = \int_\sigma (D_\mu(X - Y) \, D(X - Z) - D(X - Y) D_\mu(X - Z)) \, d_\mu \sigma = D(Y - Z)$$

<u>Le problème des parenthèses de Poisson.</u>

Les parenthèses viennent d'être définies pour les I.P. On peut chercher à les étendre à 2 fonctionnelles $F(V) = \int_V f$. $G(V) = \int_V g$ de telle sorte que :

1°) Elles se réduisent aux parenthèses définies dans le cas où F et G sont I.P

2°) L'élément différentiel de (F , G) soit une forme bilinéaire des dérivées des coefficients de f et g .

3°) On ait l'identité de Jacobi.

Dans le cas de la mécanique classique (p = 1) la réponse à ce problème est la suivante : Soit $\Phi(X)$ une fonction non I.P. mais à cela près arbitraire. On impose à Φ la condition d'être en involution avec toutes les I.P , donc avec toute autre fonction. La mécanique analytique choisit $\Phi \equiv t$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - Elie CARTAN : Leçon sur les invariants intégraux, Paris, Hermann, 1922.

[2] - Handbuch der Physik, tome V, Mechanik.

[3] - Elie CARTAN : Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, in Actualités scientifique et techniques, n° 994 , Paris, Hermann, 1945.

[4] - T. LEPAGE : Ac. royale de Belgique, Bull. Cl. des Sciences, t. 22 , 1936.