

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

A. VISCONTI

H. UMEZAWA

Théorie générale des propagateurs

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. n° 5 et 6, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A5_0>

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris
 -:-:-
 Séminaire de Théories Physiques
 (Séminaire Louis de BROGLIE)
 Année 1954/55
 -:-:-

7 et 14 décembre 1954

Exposés n^{os} 5 et 6,

par A. VISCONTI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROPAGATEURS

par

H. UMEZAWA⁽¹⁾
 Université de Nagoya

A. VISCONTI⁽²⁾
 Institut Henri Poincaré

1.- Considérant, pour fixer les idées, le cas de l'électromagnétisme quantique, nous supposons donné son hamiltonien en schème de Heisenberg et nous incluons dans cet hamiltonien des termes correspondant à une interaction avec des sources fictives $\eta, \bar{\eta}, J$ (qui disparaîtront des résultats définitifs) et que nous écrirons⁽³⁾ :

$$(1) \quad \mathcal{H}_S(x) = -\lambda \bar{\Psi}(x) \eta(x) - \lambda \bar{\eta}(x) \Psi(x) - \lambda' J_\mu(x) A_\mu(x)$$

λ et λ' sont deux constantes de couplage.

Définissons alors un schéma où les fonctions d'ondes $\Psi(x), \bar{\Psi}(x), A_\mu(x)$ satisfont aux équations classiques (sans sources) :

$$(2a) \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + m - i e \gamma_\mu A_\mu(x)) \Psi(x) = 0$$

$$(2b) \quad \bar{\Psi}(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + m - i e \gamma_\mu A_\mu(x)) = 0$$

$$(2c) \quad \square A_\mu(x) = -\frac{e}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi + \text{H.C.}$$

du schème de Heisenberg et où les variations du vecteur d'état sont dues aux seules sources extérieures $\eta, \bar{\eta}, J$.

On peut alors montrer qu'à une variation $\delta \mathcal{H}(x)$ de l'hamiltonien correspond

(1) Adresses actuelles :

- The Physical Laboratories. The University Manchester (13) (Grande-Bretagne)

(2) - CERN. Theoretical Study Group. Blegdamsvej 15.17 Kobenhavn (Danemark)

(3) - Nous tenons à faire remarquer que bien que $\eta(x), \bar{\eta}(x)$ aient des relations d'anticommutation sur une surface du genre espace :

$$[\eta(x), \bar{\eta}(x')]]_+ = [\bar{\eta}(x), \Psi(x')]]_+ = \dots = 0, \quad x \neq x' \in \mathcal{S}$$

(Comme on peut le voir dans une étude plus détaillée) ces opérateurs ne représentent pas de particules, car ils ne satisfont pas à une équation d'ondes.

une variation $\delta U[\sigma_I, \sigma_{II}', \eta, \bar{\eta}, J]$ de l'opérateur d'évolution $U[\dots]$ du vecteur d'état telle que :

$$(3) \quad \delta U[\sigma_I, \sigma_{II}', \eta, \bar{\eta}, J] = -i \int_{\sigma_{II}}^{\sigma_I} U[\sigma_I, \sigma', \eta, \bar{\eta}, J] \delta \mathcal{H}(x') U[\sigma', \sigma_{II}', \eta, \bar{\eta}, J] d^4 x'$$

σ_I, σ_{II} sont les surfaces du genre espace limitant le domaine d'espace temps où se situe l'interaction et la surface σ' passe par le point x' .

En choisissant comme expression de la variation $\delta \mathcal{H}$:

$$(4) \quad \delta \mathcal{H}(x) = -\lambda \bar{\Psi}(x) \delta \eta(x) - \lambda \delta \bar{\eta}(x) \Psi(x) - \lambda' \delta J_\mu(x) A_\mu(x)$$

et supposant que $\delta \eta, \delta \bar{\eta}$ satisfont aux mêmes relations d'anticommutation que $\eta, \bar{\eta}$, on peut définir toutes les dérivées partielles fonctionnelles de l'opérateur U par rapport à $\eta, \bar{\eta}, J$ et écrire la formule de Taylor :

$$(5) \quad U[\sigma_I, \sigma_{II}', \eta, \bar{\eta}, J] = \underline{1} + \sum \frac{(i)^{n+m}}{n! m!} \int \bar{\eta}(x_1) \dots \bar{\eta}(x_n) \underline{G}[0, 0 / x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m] \eta(x'_1) \dots \eta(x'_m) \\ + \sum \frac{(i)^l}{l!} \int \underline{G}_{\mu_1} \dots \mu_l [0, 0 / z_1 \dots z_l] J_{\mu_1}(z_1) \dots J_{\mu_l}(z_l) \\ + \sum \frac{(i)^{m+1+n}}{m! l! n!} \int \bar{\eta}(x_1) \dots \bar{\eta}(x_m) \underline{G}_{\mu_1} \dots \mu_l [0, 0 / x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_l, x'_1 \dots x'_n] \\ \times \eta(x'_1) \dots \eta(x'_n) J_{\mu_1}(z_1) \dots J_{\mu_l}(z_l)$$

les intégrations sont faites sur les variables deux fois répétées et les divers coefficients de cette formule sont les opérateurs dérivées partielles fonctionnelles relatives à $\eta, \bar{\eta}, J$. Un calcul explicite permet d'obtenir les formules suivantes :

$$(6a) \quad \underline{G}[\eta, J / x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m] \equiv \lambda^{m+n} (\sigma_I, P[\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_m)], \sigma_{II}') \\ \times \underline{\mathcal{E}}_{m+n}(x_1 \dots x'_1 \dots)$$

$$(6b) \quad \underline{G}_{\mu_1} \dots \mu_l [\eta, J / z_1 \dots z_l] \equiv \lambda^{l-1} (\sigma_I, P[A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_l}(z_l)], \sigma_{II}')$$

$$(6c) \quad \underline{G}_{\mu_1} \dots \mu_l [\eta, J / x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_l, x'_1 \dots x'_n] \\ = \lambda^{m+n} \lambda^{l-1} (\sigma_I, P[\Psi(x_1) \dots \Psi(x_m) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n) A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_l}(z_l)], \sigma_{II}') \\ \times \underline{\mathcal{E}}_{m+n}(x_1 \dots, x'_1 \dots)$$

η est mis à la place de $\eta, \bar{\eta}$; $\underline{\mathcal{E}}_{m+n}(\dots)$ est le produit de toutes les fonctions $\mathcal{E}(x)$ formées à l'aide des coordonnées primées et non primées, et, par définition :

$$(7) \quad (\sigma_I, A(x) B(x'), \sigma_{II}') \equiv U[\sigma_I, \sigma, \eta, J] A(x) U[\sigma, \sigma', \eta, J] B(x') U[\sigma', \sigma_{II}', \eta, J]$$

Les éléments de matrices, pour $\eta = \bar{\eta} = 0$, $J = 0$, de 6a, 6b, 6c, relatifs aux vecteurs d'états $(\zeta_I, 0|$ et $|0, \zeta_{II})$ correspondant au vide (c'est-à-dire à l'état d'énergie minimum) sur ζ_I et ζ_{II} définissant des fonctions de points ou propagateurs

$$(8) \quad G(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) \quad ; \quad \mathcal{G}_{\mu_1 \dots \mu_l, \mu'_1 \dots \mu'_{l'}}(z_1 \dots z_l, z'_1 \dots z'_{l'})$$

$l + l' = \text{pair}$

qui sont des grandeurs proportionnelles aux éléments de matrice de transition entre n électrons $x_1 \dots x_n$ (ou l photons $z_1 \dots z_l$) sur ζ_I et n électrons $x'_1 \dots x'_n$ (ou l' photons) sur ζ_{II} .⁽⁴⁾ Une interprétation analogue peut être donnée pour \mathcal{G} .

On peut montrer que les équations auxquelles satisfont les propagateurs peuvent s'obtenir en dérivant successivement par rapport à η , $\bar{\eta}$, J l'équation génératrice :

$$(9) \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + m - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}) \frac{\delta U[\zeta_I, \zeta_{II}, \eta, J]}{\delta \eta(x)} = i \lambda^2 \eta(x) U[\zeta_I, \zeta_{II}, \eta, J]$$

où $e_1 = e/\lambda'$; puis en prenant l'élément de matrice des deux membres pour le vide sur ζ_I et ζ_{II} .

On obtient sans difficulté les équations différentielles fonctionnelles pour les propagateurs normés correspondant aux propagateurs définis en (8) divisés par :

$(\zeta_I, 0 | U[\zeta_I, \zeta_{II}, \eta = 0, J] | 0, \zeta_{II})$ par exemple :

$$G^{(no)}[J/x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n] = \frac{G[J/x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n]}{(\zeta_I, 0 | U[\zeta_I, \zeta_{II}, \eta = 0, J] | 0, \zeta_{II})}$$

elles s'écrivent respectivement par $G[J/x, x']$ et $G[J/x_1, x_2, x'_1, x'_2]$:

$$(10a) \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + m - i e_1 \gamma_\mu \mathcal{G}_\mu[J/x] - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}) G^{(no)}[J/x, x'] = i \lambda^2 \delta(x-x')$$

$$(10b) \quad (\gamma_\mu \partial_\mu^{(1)} + m - i e_1 \gamma_\mu \mathcal{G}_\mu[J/x_1] - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)}) G^{(no)}[J/x_1, x_2, x'_1, x'_2] \\ = \lambda^2 \delta(x_1 - x'_1) G^{(no)}[J/x_2, x'_2] - \lambda^2 \delta(x_1 - x'_2) G^{(no)}[J/x_2, x'_1].$$

Nous omettons d'écrire l'indice (no), tous les propagateurs considérés dans la suite de ce travail étant normés. Les propriétés physiques signalées en (8) et dans la note ⁽⁴⁾ justifient le nom de propagateur que nous leur avons donné et per-

(4) - Une étude plus poussée montre que le propagateur G ayant un nombre de x' différent de celui des x est nul et que le propagateur \mathcal{G} avec $l+l' = \text{impair}$ est également nul.

permettent leur représentation graphique



L'interprétation de \bar{G} se fait aisément par l'introduction de la partie sommet $\Gamma_\nu[J/z, x, x']$ définie par :

$$(11) \quad \Gamma_\nu[J/z, x, x'] = \frac{\delta G^{-1}[J/x, x']}{e_1 \delta \bar{G}_\nu[J/z]}$$

où l'on a noté par $G^{-1}[J/x, x']$ la fonctionnelle réciproque de $G[J/x, x']$ c'est-à-dire satisfaisant à :

$$\int G^{-1}[J/x, \xi] G[J/\xi, x'] d\xi = \delta(x - x')$$

on a alors :

$$(12) \quad \frac{\delta G[J/x, x']}{e_1 \delta J_\mu(z)} = - \int G[J/x, \xi] \Gamma_\nu[J/\xi, \xi, \xi'] G[J/\xi', x'] \bar{G}_{\nu\mu}[J/\xi, z] \quad (5)$$

qui se traduit par le diagramme suivant pour $J = 0$:



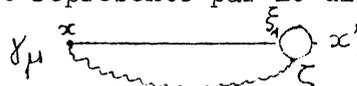
Par suite $\Gamma_\nu[J/z, x, x']$ est représenté par :

$$x \text{---} \bigcirc \text{---} x' \quad \left\{ \begin{array}{l} x, x' : \text{points d'attache de lignes d'électrons} \\ z : \text{ " " " " de photon} \end{array} \right.$$

On peut enfin définir un noyau $\mathcal{M}[J/x, x']$ comme suit :

$$(13) \quad \mathcal{M}[J/x, x'] = i e_1^2 \int \delta_\mu G[J/x, \xi_1] \Gamma_\nu[J/\xi, \xi_1, x'] \bar{G}_{\nu\mu}[J/\xi, x']$$

qui pour $J = 0$ est représenté par le diagramme suivant



On montre que ce noyau permet d'écrire les formules suivantes :

$$(14) \quad - e_1 \delta_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} G[J/x, x'] \Big|_{J=0} = \int \mathcal{M}(x, \xi) G(\xi, x')$$

$$(15) \quad \int \mathcal{M}(x, \xi) G(\xi, x') = - i (\delta_\mu \rho_\mu + n) G(x, x') \quad (1)$$

(5) - $\bar{G}_{\nu\mu}[J/z, z']$ est défini comme suit :

$$G_{\nu\mu}[J/z, z'] = - i \frac{\delta \bar{G}_\nu^{(no)}[J/z]}{\delta J_\mu(z')} = G_{\nu\mu}^{(no)}[J/z, z'] - G_\nu^{(no)}[J/z] G_\mu^{(no)}[J/z']$$

pour $J_\mu = 0$: $G_{\nu\mu} = \bar{G}_{\mu\nu}$

où $p_\mu^{(1)}$ est l'impulsion totale de l'état :

$$\bar{\Psi}(x') | 0 \rangle$$

En prenant un système dans lequel l'électron est au repos, le premier facteur du deuxième membre de (15) représente la différence Δm entre la masse expérimentale et la masse mécanique : l'opérateur intégral de noyau \mathcal{M} est donc bien, en accord avec le schéma, l'opérateur masse propre de l'électron.

2.- Nous allons maintenant considérer les propagateurs de deux particules, c'est-à-dire nous allons étudier plus particulièrement la diffusion électron-électron et la diffusion électron-photon.

La diffusion électron-électron est régie par le propagateur $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$. Il est facile, en généralisant l'opérateur de masse défini en (15), de montrer que $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ satisfait à l'équation de Bethe-Salpeter.

Nous allons pourtant concentrer notre attention sur l'étude d'un autre type d'équation qui vaut aussi bien pour $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ que pour $\hat{G}_{\mu\nu}(x, x', z, z')$. Nous avons donné en (10b) l'équation satisfaite par $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$, il est facile en utilisant (9) d'écrire l'équation à laquelle satisfait $\hat{G}_{\mu\nu}(x, x', z, z')$:

$$(16) \quad (\gamma_\rho \partial_\rho + m - i e_1 \gamma_\rho \mathcal{G}_\rho[J/x] - e_1 \gamma_\rho \frac{\delta}{\delta J_\rho(x)}) \hat{G}_{\mu\nu}[J/x, x', z, z'] \\ = - i \lambda^2 \mathcal{G}_{\mu\nu}[J/z, z']$$

Posant :

$$v_\mu[J/z, x, x'] = \int \Gamma_\nu[J/\zeta, x, \xi] \bar{G}_{\nu\mu}[J/\zeta, z] G[J/\zeta, x']$$

cherchons la solution de (10b) et de (16) en le prenant sous la forme :

$$(17a) \quad G[J/x_1, x_2, x'_1, x'_2] = G[J/x_1, x'_1] G[J/x_2, x'_2] - i e \int G[J/x, X'] v_\nu[J/Z, X', X] \\ \times I_\nu[J/Z, X, x_2, x'_1, x'_2] \quad (x'_1 \rightarrow x'_2)$$

$$(17b) \quad \hat{G}_{\mu\nu}[J/x, x', z, z'] = G[J/x, x'] \mathcal{G}_{\mu\nu}[J/z, z'] - i e_1 \int G[J/x, X'] v_\sigma[J/Z, X', X] \\ \times I_{\sigma\mu\nu}[J/Z, X, x', z, z']$$

On vérifie que l'on peut éliminer tous les γ et que I_ν et $I_{\sigma\mu\nu}$ satisfont aux équations :

$$(18a) \quad I_\nu[J/Z, X, x_2, x'_1, x'_2] = - \delta(X - x'_1) \frac{\delta G[J/x_2, x'_2]}{\delta \mathcal{G}_\nu[J/Z]} \\ + i e_1 \int v_\rho[J/\zeta, X, \xi] \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}_\nu[J/Z]} \Gamma_\rho[J/\zeta, \xi, x_2, x'_1, x'_2]$$

$$(18b) \quad I_{\sigma\mu\nu}[J/Z, X, x', z, z'] = - \delta(X - x') \frac{\delta \mathcal{G}_{\mu\nu}[J/z, z']}{\delta \mathcal{G}_\sigma[J/Z]} \\ + i e_1 \int v_\rho[J/\zeta', X, \xi] \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}_\sigma[J/Z]} I_{\rho\mu\nu}[J/\zeta', X, x', z, z']$$

Ces deux équations ayant même noyau peuvent être résolues au moyen d'une résolvante commune qui satisfait à l'équation :

$$(19) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta} \left[\mathcal{G}, \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}} / z, x, z', x' \right] = i e_1 v_\beta [J/z', x, x'] \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}_\alpha [J/z]} \\ + i e_1 \int v_\lambda [J/\zeta, x, \xi] \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}_\alpha [J/z]} \mathcal{R}_{\lambda\beta} \left[\mathcal{G}, \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}} / \zeta, \xi, z', x' \right].$$

de sorte que la solution de (18a) et (18b) s'écrit :

$$(20a) \quad I_\nu(z, X, x_2, x'_1, x'_2) = - e_1 \delta(X - x'_1) \int G(x_2, \xi) \Gamma_\nu(Z, \xi, \xi') G(\xi', x'_2) \\ + \int_{J=0} \mathcal{R}_{\nu\lambda} \left[\mathcal{G} = 0, \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}} / Z, X, \zeta_1, x'_1 \right] \mathcal{G}[J/x_2, \xi] \Gamma_\lambda[J/\xi_1, \xi, \xi'] \mathcal{G}[J/\xi', x'_2]$$

$$(20b) \quad I_{\sigma_{\mu\nu}} [Z, X, x', z, z'] = \int_{J=0} \mathcal{R}_{\sigma\rho} \left[\mathcal{G} = 0, \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}} / Z, X, \zeta', x' \right] \frac{\delta \mathcal{G}_{\mu\nu} [J/z, z']}{\delta \mathcal{G}_\rho [J/\zeta']}$$

Ainsi donc le problème est ramené à la recherche d'une solution de l'équation résolvante (19). On peut chercher cette solution suivant la méthode suivante :

Cherchons un développement en série de Taylor fonctionnelle de $\mathcal{R}_{\alpha\beta}[\dots]$ en fonction de $\frac{\delta}{\delta \mathcal{G}}$ de telle sorte que (19) soit transformée en un système d'équations intégrales qui ne renferment plus cet opérateur dérivation, écrivons donc :

$$(21) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta} \left[\mathcal{G}, \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}} / z, x, z', x' \right] = \sum_p \int \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu_1 \dots \mu_p}^{(p)} \left[\mathcal{G} / z, x, z', x', z_1 \dots z_p \right] \\ \times \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}_{\mu_1} [J/z_1]} \dots \times \frac{\delta}{\delta \mathcal{G}_{\mu_p} [J/z_p]}$$

et portons dans (19), on obtient la suite des formules récurrentes :

$$(22) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu_1 \dots \mu_N}^{[N]} \left[\mathcal{G} / z, x, z', x', z_1 \dots z_N \right] = i e_1 \int v_\lambda \left[\mathcal{G} / \zeta, x, \xi \right] \\ \times \frac{\delta \mathcal{R}_{\lambda\beta\mu_1 \dots \mu_N}^{(N)} \left[\mathcal{G} / \zeta, \xi, z', x', z_1 \dots z_N \right]}{\delta \mathcal{G}_\alpha [J/z]} \\ + i e_1 \int v_\lambda \left[\mathcal{G} / \zeta, x, \xi \right] \mathcal{R}_{\lambda\beta\mu_1 \dots \mu_{N-1}}^{(N-1)} \left[\mathcal{G} / \zeta, \xi, z', x', z_1 \dots z_{N-1} \right] \delta_{\alpha\mu_N} \delta(z - z_N)$$

Ecrivons explicitement les deux premières formules de récurrence (6) :

$$(23a) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta}^{(0)} \left[\mathcal{G} / z, x, z', x' \right] = i e_1 \int v_\lambda \left[\mathcal{G} / \zeta, x, \xi \right] \frac{\delta \mathcal{R}_{\lambda\beta}^{(0)} \left[\mathcal{G} / \zeta, \xi, z', x' \right]}{\delta \mathcal{G}_\alpha [J/z]}$$

(6) - Des considérations graphiques ainsi que la forme homogène de (23a) montrent que pour des problèmes de diffusion, $\mathcal{R}_{\alpha\beta}^{(0)}[\dots]$ peut être pris identiquement nul.

$$(23b) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu}^{(1)}[\mathcal{G}/z, x, z', x', Z_1] = i e_1 v_{\beta}[\mathcal{G}/z', x, x'] \delta_{\alpha\mu} \delta(z - Z_1) \\ + i e_1 \int v_{\lambda}[\mathcal{G}/\zeta, x, \xi] \frac{\delta \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu}^{(1)}[\mathcal{G}/\zeta, \xi, z', x', Z_1]}{\delta \mathcal{G}_{\lambda}[J/z]}$$

Il est alors possible au moyen d'un deuxième développement de transformer la suite de formules fonctionnelles récurrentes (10) en une suite d'équations intégrales ordinaires ; le développement en série de Taylor fonctionnelle de $v_{\lambda}[\dots]$ étant supposé connu :

$$(24) \quad v_{\lambda}[\mathcal{G}/z, x, x'] = \sum \int v_{\lambda\sigma_1 \dots \sigma_m}^{(m)}(z, x, x'; Z_1 \dots Z_m) \mathcal{G}_{\sigma_1}[J/Z_1] \dots \mathcal{G}_{\sigma_m}[J/Z_m]$$

et posons :

$$(25) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu_1 \dots \mu_N}^{(N)}[\mathcal{G}/z, x, z', x'; Z_1 \dots Z_N] = \\ = \sum \int \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu_1 \dots \mu_N \rho_1 \dots \rho_q}^{(N,q)}[z, x, z', x'; Z_1 \dots Z_N; Z''_1 \dots Z''_q] \mathcal{G}_{\rho_1}[J/Z''_1] \dots \\ \dots \mathcal{G}_{\rho_q}[J/Z''_q]$$

Les équations (23) sont alors des relations entre $\mathcal{R}^{(1,0)}$, $\mathcal{R}^{(1,1)}$, $\mathcal{R}^{(1,2)}$:

$$(26a) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu}^{(1,0)}(z, x, z', x'; Z) = i e_1 v_{\beta}^{(0)}(z', x, x') \delta_{\alpha\mu} \delta(z - Z) \\ + i e_1 \int v_{\lambda}^{(0)}(\zeta, x, \xi) \mathcal{R}_{\lambda\beta\mu\alpha}^{(1,1)}(\zeta, \xi, z', x', Z, z)$$

$$(26b) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\rho}^{(1,1)}(z, x, z', x', Z, Z') = i e_1 v_{\beta\rho}^{(1)}(z, x, x', Z') \delta_{\alpha\mu} \delta(z - Z) \\ + i e_1 \int v_{\alpha\lambda}^{(1)}(\zeta, x, \xi, Z') \mathcal{R}_{\lambda\beta\mu\rho}^{(1,1)}(\zeta, \xi, z', x', Z, z) \\ + i e_1 \int v_{\lambda}^{(0)}(\quad) \quad (\text{termes en } \mathcal{R}^{(1,2)}(\dots))$$

Enfin, se reportant de nouveau à (25) on verrait que $\mathcal{R}_{\alpha\beta}[\dots]$ s'exprime uniquement par $\mathcal{G} = 0$ à l'aide des coefficients $\mathcal{R}^{(p,0)}(\dots)$, mais comme le montrent les formules (26) la connaissance de $\mathcal{R}^{(1,0)}(\dots)$ requiert la connaissance de $\mathcal{R}^{(1,1)}(\dots)$, $\mathcal{R}^{(1,2)}(\dots)$ et ainsi de suite.

On peut essayer de donner une méthode approchée de résolution en raisonnant comme suit :

"Puisque l'apparition d'une dérivée fonctionnelle $\frac{\delta}{\delta \mathcal{G}[J/z]}$ correspond à l'insertion d'un photon en z , nous pouvons limiter le nombre des photons (virtuels) en vol, en limitant l'ordre de ces dérivées fonctionnelles".

A titre d'exemple, gardons uniquement les termes en $\frac{\delta}{\delta \mathcal{G}}$, il nous suffit de considérer (26) en omettant la dernière ligne de (26b) qui d'après (25) fait déjà intervenir une dérivée $\frac{\delta}{\delta \mathcal{G}}$.

Prenons d'autre part pour expression des propagateurs :

$$(27) \quad \Gamma_\mu(z, x, x') = \gamma_\mu \delta(z - x) \delta(z - x') \quad ; \quad G(x, x') = \frac{1}{2} S_F(x - x')$$

avec $\frac{\delta \Gamma_\mu}{\delta g} \equiv 0$. Calculant $v^{(0)}(\dots)$ et $v^{(1)}(\dots)$ on trouve finalement que $\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\rho}^{(1,1)}(\dots)$ satisfait à l'équation :

$$(28) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\rho}^{(1,1)}(z, x, z', x'; Z, Z') = \frac{i e_1}{8} \delta_{\alpha\mu} \delta(z - Z) \gamma_\beta D_F(x - z') S_F(x - Z') \gamma_\rho \\ \times S_F(Z' - x') + \frac{i e_1}{8} \int \gamma_\lambda S_F(x - Z') D_F(x - \zeta) \gamma_\rho S_F(Z' - \xi) \mathcal{R}_{\lambda\beta\mu\rho}^{(1,1)}(\zeta, \xi, z', x', Z, z)$$

Pour mettre en évidence les diagrammes, nous calculerons la solution de (28) par un développement en série suivant les puissances de e_1 . On vérifie que les diagrammes ainsi obtenus ne contiennent aucune intégrale singulière, c'est-à-dire pas d'énergies propres, pas de parties sommets. Utilisant (20a), (20b) et finalement (17a), (17b) on peut donner les diagrammes pour $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ et $\mathcal{Q}_{\mu\nu}(x, x', z, z')$:

$$(29a) \quad G(x_1, x_2, x'_1, x'_2) \sim \begin{array}{c} x_1 \quad x'_1 \\ \text{-----} \\ x_2 \quad x'_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x'_1 \\ \text{-----} \\ x_2 \quad x'_2 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x'_1 \\ \text{-----} \\ x_2 \quad Z \quad Z' \quad x'_2 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} x_1 \quad x'_1 \\ \text{-----} \\ x_2 \quad x'_2 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x'_1 \\ \text{-----} \\ x_2 \quad Z \quad Z' \quad x'_2 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} + \dots$$

$$(29b) \quad \mathcal{Q}_{\mu\nu}(x, x', z, z') \begin{array}{c} x \quad x' \\ \text{-----} \\ z \quad z' \end{array} + \begin{array}{c} x \quad x' \\ \text{-----} \\ z \quad z' \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} x \quad x' \\ \text{-----} \\ z \quad z' \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} x \quad x' \\ \text{-----} \\ z \quad z' \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} + \dots$$

Il faut ajouter aux diagrammes de $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ reproduits ici ceux obtenus en échangeant Z et Z' et x'_1 et x'_2 .

Le calcul de $\mathcal{Q}_{\mu\nu}$ a été effectué en prenant dans le deuxième membre de (20b)

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}[J/z, z'] \simeq \mathcal{G}_\mu[J/z] \mathcal{G}_\nu[J/z'] .$$

En ordonnant chronologiquement ces diagrammes, on voit qu'on limite à 4 le nombre

de photons virtuels. L'approximation utilisée pourra être améliorée en considérant des dérivées fonctionnelles d'ordre supérieur et en incluant dans les propagateurs des corrections radiatives.

3.- On peut prévoir d'une façon générale que les diagrammes obtenus à partir des équations (17), (18) ne contiendront ni énergies propres, ni parties sommets (vertex part) formées à l'aide des propagateurs : ce sont des diagrammes irréductibles. On peut donc à juste titre nommer les équations (17), (18) équations renormalisées. Ainsi donc, le problème de la renormalisation a été divisé en deux parties :

A) Construction de diagrammes irréductibles à l'aide des propagateurs $G(x, x')$, $\mathcal{G}_{\mu\nu}(z, z')$, $\Gamma_\gamma(z, x, x')$ (ces diagrammes ne peuvent donc pas introduire de termes infinis).

B) renormalisation de ces propagateurs G, \mathcal{G}, Γ .

C'est de ce deuxième problème dont nous allons nous occuper et dont nous donnerons les résultats essentiels.

a) Les équations renormalisées (17), (18) sont covariantes pour toute transformation $\lambda \rightarrow C\lambda$, $\lambda' \rightarrow C'\lambda'$, transformations correspondant aux suivantes :

$$e_1 \rightarrow e_1/C' ; G(x, x') \rightarrow C^2 G(x, x') ; \mathcal{G}(z, z') \rightarrow C'^2 \mathcal{G}(z, z')$$

et aux transformations analogues pour les propagateurs de n corps. On en conclut que la détermination du propagateur pour 1 seul corps fixe la constante de renormalisation de tous les propagateurs et le charge.

b) Nous définirons des états stationnaires sur $\mathcal{G}_I, \mathcal{G}_{II}$ correspondant à des particules de masse $m' = m + \Delta m$ (Δm a été défini en (15)). Les particules ainsi définies ne sont pas nues, elles sont en interaction avec leur champ propre.

Supposons le transformé de Fourier de $\mathcal{M}[J/x, x']$ (défini par (15)) pour $J = 0$ (donc fonction de $x - x'$) développé comme suit :

$$(30) \quad \mathcal{M}(p) = \Delta m + B(\gamma p + m') + (1 + B)(\gamma p + m') \mathcal{M}_1(p)$$

avec $\mathcal{M}_1(p) = 0$ lorsque $\gamma p + m' = 0$. Calculant le propagateur $G(p)$, on voit alors que :

$$(31) \quad G(x) = (2\pi)^{-4} \frac{\lambda^2}{1 + B} \int \frac{e^{ip_\mu x_\mu}}{(\gamma p + m')(1 + \mathcal{M}_1(p))} d^4 p .$$

$$(32) \quad B = \lambda^2 - 1$$

de telle sorte que le propagateur de particules libres soit $S_F(m', x-x')$.

c) La théorie ainsi obtenue est une théorie renormalisée, qu'elle contienne ou non des éléments infinis, en ce sens que toutes les constantes introduites ont été fixées par seul souci de cohérence interne. L'opérateur $\mathcal{M}(p)$ correspond à l'opérateur de masse Σ^* de Dyson et $\mathcal{M}_1(p)$ est la partie finie de cet opérateur telle qu'elle est extraite par Dyson de Σ^* . On voit de plus $\lambda'^2 = Z_2^{-1}$ et que $G(x, x')$ s'exprime uniquement à l'aide de $\mathcal{M}_1(p)$. Un résultat analogue vaut pour \mathcal{G} et Γ .

On remarquera de plus que la renormalisation de masse a été incluse dans la définition des particules libres en interaction avec leur champ propre et la renormalisation de charge incluse dans la définition de $e_1 = e/\lambda'$, avec : $\lambda'^2 = Z_3^{-1}$.

Le programme (B) peut être considéré dès lors comme achevé et les propagateurs de n corps ne comportent plus dans leurs expressions ni énergies propres, ni sommets.
