Séminaire L. de Broglie. Théories physiques

Pham Mau Quan

Thermodynamique d'un fluide relativiste

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. n° 3, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-:-:-:-:-
Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de BROGLIE)
-:-:-:-:-:-:-:-
Année 1954/1955

23 novembre 1954

EXPOSÉ N° 3

THERMODYNAMIQUE D'UN FLUIDE RELATIVISTE,

par PHAM MAU QUAN

I

Introduction et considérations géométriques

1. INTRODUCTION

Je me propose, dans cet exposé, d'indiquer quelques résultats que j'ai obtenus récemment dans l'étude des fluides thermodynamiques. Cette étude a été faite dans le cadre de la Relativité générale.

Des tentatives d'études ont été effectuées dans cette voie. Déjà, dès les premiers temps de la Relativité, Einstein, Planck, De Broglie, étudiaient la nature des grandeurs thermodynamiques, à travers leur variance dans le groupe de Lorentz [1]. Puis en 1940, C. Eckart [2] et van Dantzig [3] ont cherché à établir les équations générales des fluides thermodynamiques, respectivement en Relativité restreinte et en Relativité générale, mais d'une manière en général peu satisfaisante.

J'ai été amené à faire cette étude pour les raisons suivantes.

On sait que la thermodynamique classique justifie l'extension du principe de d'Alembert aux fluides dont le potentiel interne par unité de volume est de la forme $\varphi(\rho, \theta)$ où ρ est la densité et θ la température. Cependant, dans l'application du principe de d'Alembert généralisé, on procède aux modifications virtuelles du système en deux stades :

a) une modification virtuelle compatible avec les liaisons à l'instant t et qui laisse invariante la température.

b) une modification de la température fixée au moyen de quelque hypothèse thermodynamique.

On en déduit qu'en tout point du fluide, existe la relation [4] :

$$\varphi(\rho,\theta) - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\rho,\theta) + p = 0$$

où p représente la pression du fluide. C'est l'équation caractéristique du fluide. Elle fait intervenir en Hydrodynamique un nouveau champ scalaire θ. On doit alors faire intervenir une nouvelle relation demandée à la théorie de la chaleur, en l'espèce l'équation de conduction

$$\operatorname{div}(-\varkappa \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\theta) = c\rho\frac{d\theta}{dt} - \frac{\ell}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

La décomposition précédente permet heureusement en Mécanique classique d'établir les équations générales du fluide. Mais, si selon les principes de la Relativité, on donne une inertie à l'énergie, de quelque origine soit-elle, on ne peut par ce procédé, obtenir les équations rigoureuses du fluide.

Pour avoir les équations rigoureuses des fluides thermodynamiques, il nous faut encore tenir compte de l'effet de la gravitation.

D'autre part, en Relativité générale, la représentation de la matière s'effectue nécessairement par des schémas du type hydrodynamique. L'hydrodynamique relativiste a reçu des travaux de A. Lichnerowicz [5] un exposé cohérent et rigoureux. Elle constitue le premier pas d'une théorie complète des milieux continus. Il apparaît comme nécessaire de développer une théorie thermodynamique des fluides en Relativité générale.

2. LES POSTULATS FONDAMENTAUX.

Il est clair qu'une théorie relativiste des fluides thermodynamiques doit trouver ses bases dans les théories de l'hydrodynamique et de la chaleur. Aussi nous nous sommes efforcés de tenir le plus grand compte des bases classiques nécessaires à l'intelligence de la théorie et aux applications possibles. Inversement notre étude suggère une modification de certains résultats classiques concernant la thermodynamique des fluides en mouvement.

Il nous apparaît comme suffisant de prendre pour éléments primitifs de notre théorie, les éléments suivants :

1° - un espace-temps de la Relativité générale qui fait intervenir la gravitation dans les phénomènes étudiés,

2° - les équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

qui établissent le lien logique entre le champ gravitationnel inclus dans les propriétés géométriques de l'espace-temps et le champ de la matière qui constitue le siège des phénomènes thermodynamiques,

3° - le phénomène élémentaire de conduction thermique, traduit par l'hypothèse de Fourier

$$\vec{q} = -\varkappa \, \overrightarrow{\text{grad}} \, \theta$$

3. DÉFINITIONS ET CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALES.

Nous représentons le fluide considéré par un domaine connexe de l'espace-temps V_4, variété différentiable à quatre dimensions de classe c^2, c^4 par morceaux, douée de la métrique d'univers :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda)\, dx^\alpha dx^\beta$$

$$(\alpha, \beta, \lambda = 0,1,2,3)$$

du type hyperbolique normal. Les $g_{\alpha\beta}$ sont de classe c^1, c^3 par morceaux.

Un fluide relativiste peut être considéré comme un milieu matériel continu, déformable, doué des propriétés suivantes :

1) il possède une densité propre ρ ;

2) il est possible de définir un vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ pour chaque point du milieu.

Cette définition est suffisante pour que le fluide constitue une description phénoménale de l'univers spatio-temporel de la Physique.

Le fluide envisagé est dit thermodynamique, lorsque les phénomènes calorifiques ne sont pas négligés. Un tel fluide fait intervenir les données suivantes : vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, densité propre ρ, tenseur des pressions $\pi^{\alpha\beta}$ et le champ scalaire des températures propres θ.

La fonction scalaire θ qui représente la température est supposée de classe C^2, C^4 par morceaux.

Considérons dans la variété espace-temps V_4, un domaine D occupé par un milieu fluide. Nous dirons que l'espace-temps riemannien V_4 est associé à ce fluide.

$\vec{u}$ désigne le vecteur vitesse unitaire en chaque point du fluide. Ses trajectoires orientées dans le temps, sont appelées lignes de courant.

On appellera repère propre en un point du domaine D, un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$ orintés dans l'espace sont normés par la condition $\vec{V}^{(i)^2} = -1$.

$$g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} u^{\beta} = +1$$
$$g_{\alpha\beta}\, V^{(i)\alpha}\, V^{(i)\beta} = -1 .$$

Ce repère doit être identifié à un repère galiléen local. L'axe de temps a la direction du vecteur $\vec{u}$. L'espace associé est défini par le tri-plan $\vec{V}^{(i)}$.

On peut naturellement rapporter le voisinage d'un point de V_4 au repère propre en ce point. La métrique d'univers de V_4 prend la forme :

$$ds^2 = \delta_{\alpha'\beta'}\,\omega^{\alpha'}\omega^{\beta'} = (\omega^{0'})^2 - (\omega^{1'})^2 - (\omega^{2'})^2 - (\omega^{3'})^2$$

où les $\omega^{\alpha'}$ forment un système de formes de Pfaff linéairement indépendantes.

La considération du repère propre est fort utile.

En effet, un tenseur peut être défini en un point x de V_4 par ses composantes relatives au repère propre. Ses composantes générales quelconques se déduisent des premières par des formules de transformation connues.

Quant à l'interprétation locale des équations, on s'appuie sur la remarque suivante :

Dans la théorie de la Relativité générale, l'univers est regardé comme une variété dont les systèmes de référence en un point se repèrent entre eux comme dans la Relativité restreinte. Dans celle-ci, l'espace-temps rapporté au repère propre, admet la métrique :

$$ds^2 = (dx^{0'})^2 - (dx^{1'})^2 - (dx^{2'})^2 - (dx^{3'})^2$$

où $x^{0'} = ct$. c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

II

Les équations du fluide thermodynamique

4. LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE.

Les équations du champ sont les équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ de signification essentiellement géométrique est défini par

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(R + k)\, g_{\alpha\beta} \tag{4.2}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la variété riemannienne V_4

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Gamma^\rho_{\rho\beta} + \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\sigma\beta}$$

$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ et k est la constante cosmologique.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ de signification purement physique, doit décrire au mieux les propriétés du milieu. Les grandeurs qui figurent dans ce tenseur sont les éléments du modèle plus ou moins simplifié du concept approprié au problème traité par lequel nous remplaçons la matière réelle. Pour un fluide thermodynamique, nous sommes conduits à prendre :

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - Q^{\alpha\beta}$$

où $Q^{\alpha\beta}$ est le tenseur thermodynamique.

Nous rapportons d'abord le fluide au voisinage d'un point $x \in V_4$ au repère propre en ce point. Dans ce repère, la matière est au repos au point considéré. Le fluide y est caractérisé par sa densité propre ρ , son tenseur de pressions $\pi^{i'k'}$ et le vecteur courant de chaleur $q^{i'}$ qui rend compte de la conduction thermique.

Nous sommes ainsi amenés à donner aux composantes $T^{\lambda'\mu'}$ du tenseur d'énergie dans le repère propre, les valeurs suivantes :

$$T^{0'0'} = \rho \qquad T^{i'k'} = - \pi^{i'k'} \qquad T^{0'i'} = T^{i'0'} = - q^{i'}$$

qui seront justifiées par les conséquences.

Rapportons maintenant l'espace-temps au point considéré au repère naturel associé au système de coordonnées curvilignes locales x^{α} . La matrice de passage d'un repère à l'autre est $(A^{\alpha}_{\lambda'})$. Soit $(A^{\lambda'}_{\alpha})$ la matrice inverse. Les $A^{\alpha}_{\lambda'}$ sont les composantes contravariantes des vecteurs $\vec{V}^{(\lambda')}$ du repère propre dans le repère naturel. Soit :

$$A^{\alpha}_{0'} = u^{\alpha} \qquad\qquad A^{0'}_{\alpha} = u_{\alpha}$$

$$A^{\alpha}_{i'} = V^{(i')\alpha} \qquad\qquad A^{i'}_{\alpha} = - V^{(i')}_{\alpha}$$

Dans ces formules et dans celles qui suivent, les indices affectés d'un accent ' se rapportent au repère propre ; tout indice latin prend les valeurs 1, 2, 3 , tout indice grec prend les valeurs 0 , 1 , 2 , 3 .

Nous passons des composantes $T^{\lambda'\mu'}$ aux composantes contravariantes $T^{\alpha\beta}$ par les formules :

$$T^{\alpha\beta} = T^{\lambda'\mu'} A^{\alpha}_{\lambda'} A^{\beta}_{\mu'}$$

En effectuant les calculs, nous donnerons à $T^{\alpha\beta}$ l'expression :

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha} u^{\beta} - \pi^{\alpha\beta} - (u^{\alpha} q^{\beta} + u^{\beta} q^{\alpha}) \qquad (4.[illegible])$$

où nous avons posé :

$$\pi^{\alpha\beta} = \sum_{i',k'} \pi^{i'k'} V^{(i')\alpha} V^{(k')\beta}$$

$$q^{\alpha} = \sum_{i'} q^{i'} V^{(i')\alpha}$$

Les quantités $\pi^{\alpha\beta}$ et q^α satisfont respectivement aux identités

$$\pi^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$$
$$q^\alpha u_\alpha = 0$$

5. LA CONDUCTION DE LA CHALEUR EN RELATIVITÉ.

Le vecteur courant de chaleur q^α peut être rendu compte par l'extension relativiste de l'hypothèse de Fourier. En effet, par rapport au repère propre au point considéré, il a pour composantes :

$$q_{0'} = 0 \qquad\qquad q_{i'} = -\varkappa\, \partial_{i'} \theta$$

où θ désigne le champ scalaire de température, $\partial_{\alpha'}$ la dérivée pfaffienne relative aux formes $\omega^{\alpha'}$. $\varkappa$ est le coefficient de conductivité thermique.

Nous passons des composantes $q_{\lambda'}$ de $\vec{q}$ à ses composantes covariantes générales q_α par les formules :

$$q_\alpha = q_{\lambda'} A^{\lambda'}_\alpha = q_{i'} A^{i'}_\alpha$$

D'autre part, dans le changement de coordonnées : $\partial_{i'}\theta = \partial_\rho \theta\, A^\rho_{i'}$ et par suite $q_{i'} = -\varkappa\, \partial_\rho \theta\, A^\rho_{i'}$. On en déduit :

(5.1) $$q_\alpha = -\varkappa\, \partial_\rho \theta\, (\delta^\rho_\alpha - u^\rho u_\alpha)$$

en remarquant que $\vec{q}$ est la composante d'espace du vecteur $-\varkappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \theta$.

On vérifie que

(5.2) $$u_\alpha q^\alpha = 0$$

Cette identité appelle deux remarques :

1) q^α est un vecteur d'espace, orthogonal à u^α :

$$\vec{q}^{\,2} < 0$$

2) l'identité $u^{\alpha} q_{\alpha} \equiv 0$ traduit en un certain sens l'absence de toute " densité de charge calorifique ".

Définition.- On appellera lignes de chaleur, les trajectoires du vecteur courant de chaleur q^{α}.

Ces lignes, orientées dans l'espace, sont orthogonales aux lignes de courant. Elles interviennent pour la description de certains phénomènes calorifiques.

Dans l'espace-temps V_4 , le vecteur q_{α} permet de définir le flux de chaleur à travers un élément tri-plan orienté dans le temps. Il satisfait à une formule de divergence que l'on peut établir en admettant le postulat de continuité de la chaleur.

L'élément de fluide au point $x \in D_4$, est caractérisé par sa densité ρ , sa température θ , son volume spécifique $\varpi = \frac{1}{\rho}$. Au cours d'une modification élémentaire d'état, la quantité de chaleur mise en jeu est

$$Q_e = c\, d\theta \wedge m + \ell\, d\varpi \wedge m \tag{5.3}$$

où c est la chaleur spécifique à volume constant et ℓ la chaleur de dilatation.

m est la forme élément de matière qui a pour composante non nulle dans le repère propre

$$m = \rho\, u^{0'} \omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'} .$$

Un calcul effectué dans le repère propre donne

$$Q_e = (c \rho u^{\rho'} \partial_{\rho'} \theta - \frac{\ell}{\rho} u^{\rho'} \partial_{\rho'} \rho) \frac{1}{4!} \eta_{\alpha_{0'} \alpha_{1'} \alpha_{2'} \alpha_{3'}} \omega^{\alpha_{0'}} \wedge \omega^{\alpha_{1'}} \wedge \omega^{\alpha_{2'}} \wedge \omega^{\alpha_{3'}} \tag{5.4}$$

où $\eta_{\alpha_{0'} \alpha_{1'} \alpha_{2'} \alpha_{3'}}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume spatio-temporel. On en déduit l'expression

$$Q_e = (c \rho u^{\alpha} \partial_{\alpha} \theta - \frac{\ell}{\rho} u^{\alpha} \partial_{\alpha} \rho) \sqrt{|g|} \; dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{5.5}$$

lorsqu'on rapporte l'espace-temps au repère naturel.

Par définition, Q_e est appelée la chaleur dégagée relative à un élément quadridimensionnel de fluide attaché au point x^{α} lorsqu'il vient au point $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$. La quantité totale de chaleur dégagée relative à un domaine B_4 de l'espace-temps, occupé par le fluide, sera l'intégrale :

$$Q = \iiiint_{B_4} (c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{\ell}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho) \sqrt{|g|} \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{5.6}$$

Considérons maintenant des domaines B_4 limités dans des tubes de courant par deux sections engendrées par des lignes de chaleur (associées donc à des volumes fluides). Le postulat de continuité de la chaleur consiste à affirmer que la chaleur dégagée relative à un B_4 quelconque est égale au flux du vecteur courant de chaleur q^α à travers la surface latérale de B_4.

Grâce au choix de B_4, ce flux a pour valeur $\iiint_{\partial B_4} q^\alpha d\omega_\alpha$, où ∂B_4 est la frontière de B_4, $d\omega_\alpha$ l'élément d'hypersurface de ∂B_4. Nous avons donc :

$$\iiiint_{B_4} (c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{\ell}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho) \sqrt{|g|} \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iiint_{\partial B_4} q^\alpha d\omega_\alpha \tag{5.7}$$

En transformant la seconde intégrale en intégrale de divergence par la formule de Stokes, on en déduit l'égalité

$$\iiiint_{B_4} [\nabla_\alpha q^\alpha - (c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{\ell}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho)] \sqrt{|g|} \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0$$

qui a lieu pour tout domaine B_4 du type considéré. Sous des hypothèses de différentiabilité de la théorie, on tire :

$$\nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{\ell}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \tag{5.8}$$

Cette équation s'appelle équation de conduction. Elle généralise l'équation classique de Fourier.

6. LES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT.

Les équations de mouvement du fluide thermodynamique sont fournies par les conditions de conservation

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

appliquées à la forme (4.3) du tenseur d'impulsion énergie. En tenant compte des conditions

$$u_\beta u^\beta = 1 \qquad\qquad u_\beta q^\beta = 0$$

on en déduit :

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) - u_\beta \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha q^\alpha - q^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta \tag{6.1}$$

$$\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\rho} (g_\rho^\beta - u_\rho u^\beta) = \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - u^\beta (\nabla_\alpha q^\alpha - q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho) \tag{6.2}$$

L'équation (6.1) joue le rôle d'une équation de continuité pour le milieu. L'énergie d'origine calorifique y figure effectivement.

D'autre part, les lignes de courant du schéma considéré sont définies comme lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, c'est-à-dire les trajectoires du champ de vecteur $\vec{u}$. Les équations (5.2) où l'on posera

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

constituent un système différentiel qui déterminera les lignes de courant du schéma.

Il convient d'ajouter aux équations précédentes, les équations

$$\nabla_\alpha q^\alpha = c\rho\, u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{\ell}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \tag{6.3}$$

$$q^\alpha = -\varkappa\, \partial_\rho \theta\, (g^{\rho\alpha} - u^\rho u^\alpha) \tag{6.4}$$

qui déterminent les lignes de chaleur et le champ de température du schéma.

L'interprétation des équations de mouvement se fait en faisant les hypothèses locales :

$$\rho = \mu (1 + \epsilon) \tag{6.5}$$

$$\nabla_\alpha (\mu u^\alpha) = 0 \tag{6.6}$$

où μ est la densité de matière locale, $\mu\epsilon$ la densité d'énergie interne. (6.6) traduit la conservation de la matière.

Cas d'un fluide parfait thermodynamique.

Un fluide est dit parfait, si la résultante des forces superficielles $\vec{T}\, ds$ agissant sur un élément de surface orientée ds, est normale à cet élément. On a alors dans le repère propre

$$\pi^{i'k'} = p\,\delta^{i'k'}$$

où p est un scalaire représentant la pression du fluide au point considéré.

Les formules de transformation conduisent à

$$\pi^{\alpha\beta} = p\ (g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta})$$

Nous donnons au tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait thermodynamique, la forme

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\ u^{\alpha}u^{\beta} - p\,g^{\alpha\beta} - (u^{\alpha}q^{\beta} + u^{\beta}q^{\alpha}) \tag{6.7}$$

Les équations de mouvement s'écrivent :

$$\nabla_{\alpha}\,[(\rho + p)\ u^{\alpha}] - u^{\alpha}\partial_{\alpha}p = \nabla_{\alpha}\,q^{\alpha} - q^{\rho}u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\rho} \tag{6.8}$$

$$(\rho + p)\ u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\beta} - \partial_{\alpha}p\ (g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta}) = \nabla_{\alpha}(u^{\alpha}q^{\beta} + u^{\beta}q^{\alpha}) - u^{\beta}(\nabla_{\alpha}q^{\alpha} - q^{\rho}u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\rho}) \tag{6.9}$$

Les trois quantités ρ, p, θ sont liées par une relation appelée équation d'état du fluide parfait. Celle-ci est introduite sous la forme :

$$\rho = \varphi(p, \theta)$$

III

LA STRUCTURE DES ÉQUATIONS DU CHAMP RELATIF A UN FLUIDE PARFAIT THERMODYNAMIQUE

7. LE PROBLÈME DE CAUCHY.

Etant donné, dans la variété espace-temps de la relativité générale, un domaine occupé par un fluide thermodynamique, on se propose d'étudier la structure des équations fondamentales au moyen de la solution du problème de Cauchy.

Le champ de gravitation est supposé satisfaire aux équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta} \tag{7.1}$$

Etant donnés sur une hypersurface S :

a) le champ de gravitation par les $g_{\alpha\beta}$ et leur dérivées $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$

b) le champ des températures par θ et $\partial_\lambda \theta$

on se propose de déterminer $(g_{\alpha\beta}, \theta)$ au voisinage de S. Il suffit d'étudier la possibilité de calculer sur S les valeurs des quantités introduites et de leurs dérivées successives.

L'hypersurface S étant définie localement par

$$x^0 = 0$$

les équations d'Einstein sont équivalentes pour $g^{00} \neq 0$ à l'ensemble des deux systèmes

$$R_{ij} = \chi\, [(\rho + p)\, u_i u_j - \tfrac{1}{2} (\rho - p)\, g_{ij} - (u_i q_j + u_j q_i)] \tag{7.2}$$

$$S^0_\lambda = [(\rho + p)\, u^0 u_\lambda - p\, g^0_\lambda - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0)] \tag{7.3}$$

où les S^0_λ ont des valeurs connues sur S.

Supposant p provisoirement connu, on évalue d'abord en fonction de p, les inconnues u^0 et $Z = u^\rho \partial_\rho \theta$ qui peuvent s'exprimer à l'aide de la nouvelle inconnue

(7.4) $$V^0 = (\rho + p - \varkappa Z)\, u^0 + \varkappa(\partial^0\theta - Z u^0)$$

De (7.3) on tire en effet les équations

(7.5) $$\chi(V^0 + \varkappa\partial^0\theta)\, u^0 = S^{00} + \chi p\, g^{00} \equiv P^{00}(p)$$

(7.6) $$\chi(V^0 Z + \varkappa\Delta_1\theta\, u^0) = (S^{0\lambda} + \chi p\, g^{0\lambda})\, \partial_\lambda\theta \equiv Q^0(p)$$

qui déterminent linéairement u^0 et Z à partir de V^0. Or, on peut déterminer V^0 ou $W^0 = V^0 + \varkappa\partial^0\theta$ en fontion de p, en exprimant à partir de (7.3) le caractère unitaire de $\vec{u}$. Il vient :

(7.7) $$(W^0)^4 - 2\varkappa\,\partial^0\theta\,(W^0)^3 + [\varkappa^2(\partial^0\theta)^2 - (R^0)^2]\,(W^0)^2 + $$
$$+ 2\varkappa P^{00}Q^0W^0 - \varkappa^2\Delta_1\theta\,(P^{00})^2 = 0$$

où $\chi^2(R^0)^2$ est le carré du vecteur d'espace $(S^0_\lambda + \chi p\, g^0_\lambda)$.

Connaissant $W^0(p)$ on détermine sur S la valeur de p à l'aide de l'équation d'état

$$\rho = \varphi(p, \theta)$$

puis les valeurs de ρ, u_λ. Les u_λ sont déterminées si $V^0 \neq 0$. Les équations (7.2) donnent alors les $\partial_{00}\, g_{ij}$.

La détermination des valeurs sur S de $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_0 p$, $\partial_{00}\theta$ s'effectuent à l'aide des conditions de conservation et de l'équation de conduction thermique. Introduisant encore l'inconnu auxiliaire Z, on déduit de ces équations, le système :

(7.8) $$\frac{\mathcal{C}}{\rho}\, u^0\, \frac{\partial\varphi}{\partial p}\, \partial_0 p + \varkappa Z\, \partial_0 u^0 - \varkappa g^{00}\partial_{00}\theta + \varkappa u^0\partial_0 Z = H_1 \ (dc)$$

(7.9) $$u^0\, \frac{\partial\varphi}{\partial p}\, \partial_0 p + (\rho + p - \varkappa Z)\, \partial_0 u^0 + \varkappa[g^{00} + (u^0)^2]\, \partial_{00}\theta - 2\varkappa u^0\partial_0 Z = H_2 \ (dc)$$

(7.10) $$[g^{00} - (u^0)^2]\, \partial_0 p - (W^0 - \varkappa Z u^0)\, \partial_0 u^0 - \varkappa[g^{00} - (u^0)^2]\, u^0\partial_{00}\theta = H_3 \ (dc)$$

$$(7.11) \quad (\partial^0\theta - Zu^0)\,\partial_0 p - \varkappa(\Delta_1\theta - Z^2)\,\partial_0 u^0 + (\rho + p - \varkappa Z)(u^0)^2\,\partial_{00}\theta - V^0\,\partial_0 Z = H_4 \ (dc)$$

et les trois équations

$$(g^{0i} - u^0u^i)\,\partial_0 p - \varkappa(\partial^i\theta - Zu^i)\,\partial_0 u^0 - V^0\partial_0 u^i - \varkappa[g^{0i} - (u^0u^i)]\,u^0\,\partial_{00}\theta = K^i \ (dc)$$

où $\partial^\lambda\theta = g^{\lambda\rho}\partial_\rho\theta$ et où les H_α et K^i désignent des quantités à valeurs connues sur S.

Pour $V^0 \neq 0$, les $\partial_0 u^i$ sont immédiatement connues quand les autres inconnues ont été évaluées. Le calcul peut être poursuivi par des dérivations successives.

Ainsi, sauf pour des variétés exceptionnelles, le problème de Cauchy posé admet une solution (au moins sous des données analytiques), ce qui contribue à justifier les équations adoptées.

8. LE PROBLÈME DE RACCORDEMENT.

On se propose de représenter sur une variété espace-temps V_4, un modèle comportant plusieurs domaines meublés par de la matière. Dans chacun de ces domaines meublés, la matière engendre un tube d'univers limité par une hypersurface S. A l'intérieur de S, la métrique de l'espace-temps doit satisfaire aux équations d'Einstein du cas intérieur

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}$$

A l'extérieur de tous les domaines meublés, elle doit vérifier les équations d'Einstein du cas extérieur

$$S_{\alpha\beta} = 0$$

L'axiomatique de la théorie conduit aux conditions de raccordement suivantes :

1° - les $(g_{\alpha\beta}, \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$ continues pour l'espace-temps

2° - les $(\theta, \partial_\lambda \theta)$ continues pour le schéma matériel

à la traversée de l'hypersurface de raccordement S.

Le raccordement du champ d'un fluide parfait thermodynamique avec un champ extérieur, doit s'effectuer le long d'une hypersurface S sur laquelle

$$\theta = \text{const.} \qquad \partial^0 \theta = 0$$

On en déduit avec la condition $S^0_\lambda = 0$ sur S, que S doit être engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur et que la pression s'annule sur S :

$$u^0 = 0 \qquad\qquad p = 0$$

9. LES VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES V_3^C ET LES VARIÉTÉS EXCEPTIONNELLES DU PREMIER ORDRE V_3^H.

Les variétés exceptionnelles du problème de Cauchy sont des variétés à la traversée desquelles se présentent certaines discontinuités. Dans un système de coordonnées arbitraire, elles auront pour équation

$$f(x^\lambda) = 0$$

Pour qu'elles aient une signification physique, il faut faire l'hypothèse qu'elle soit orientée dans le temps, ou à la limite, tangente aux cônes élémentaires :

$$\Delta_1 f = g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f \leqslant 0$$

Dans le langage de la théorie de propagation par ondes, on peut généraliser ce qu'on appelle par vitesse de propagation au sens d'Hugoniot. On établit [5,6] qu'elle est donnée par

$$T^2 = -\frac{(u^\lambda \partial_\lambda f)^2}{[g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu]\, \partial_\lambda f\, \partial_\mu f}$$

On sait alors que les variétés caractéristiques $V_3^C(g^{00} = 0)$ jouent le rôle de surfaces d'ondes gravifiques (Darmois et Lichnerowicz [5,7]).

Les variétés exceptionnelles du premier ordre V_3^H correspondent aux discontinuités du gradient de pression $\partial_0 p$ (ainsi que de $\partial_0 \rho$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_0 q^\lambda$) . Elles constituent l'extension relativiste des fronts d'ondres de l'hydrodynamique classique lorsque l'on tient compte des changements de température.

Elles généralisent la propagation d'une perturbation faible compatible au sens d'Hugoniot avec le mouvement initial d'un fluide thermodynamique. Elles donnent la solution du problème de la propagation du son dans un milieu conducteur.

Si $\vec{q}$ est petit, ce qui est le cas des fluides réels, on établit à partir de la nullité du déterminant D du système des équations (7.8,9,10,11) que la vitesse de propagation T est donnée aux infiniment petits d'ordre supérieur près par :

$$T = \pm (\varphi'_p)^{-\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{\varphi'_p}) \left[1 + \frac{\varepsilon}{\rho} (1 + \frac{1}{\varphi'_p})\right] \frac{\vec{q}.\vec{n}}{\rho+p-\varkappa Z}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire d'espace définissant la direction de propagation.

La correction est de l'ordre de $\frac{\vec{q}.\vec{n}}{\rho+p-\varkappa Z}$, si on compare aux résultats classiques $T = \pm (\varphi'_p)^{-\frac{1}{2}}$. Elle est très petite puisqu'en unités CGS il faut substituer au vecteur $\vec{q}$ le vecteur $\frac{\vec{q}}{c}$. Elle est donc imperceptible dans les mesures expérimentales. C'est dans ce sens que nous avons une preuve de la précision des formules classiques proposées depuis Laplace.

10. LES VARIÉTÉS EXCEPTIONNELLES D'ORDRE ZERO V_3^0 ET LE PROBLÈME DES ONDES DE CHOC.

Ce sont les variétés telles que $V^0 = 0$, à la traversée desquelles se produisent les discontinuités de ρ , p, u^λ , q^λ . Pour les étudier, il faut revenir aux équations initiales utilisées pour la détermination de p , u^λ qui peuvent s'écrire

$$(10.1) \qquad S^{0\lambda} = \chi T^{0\lambda}$$

Cette détermination ne fait pas intervenir l'équation de conduction et les conditions de conservation. Nous supposerons donc que les données de Cauchy consistent dans les valeurs de $(g_{\alpha\beta}\ ,\ \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$ sur S . La température θ peut être discontinue à la traversée de S . Les conditions de raccordement concernant l'espace sont ainsi préservées.

Nous orientons l'hypersurface S par sa normale $\vec{\nu}$ de manière à distinguer une face négative et une face positive.

Le problème consiste à déterminer les valeurs de $(\rho_+\ ,\ p_+\ ,\ \theta_+\ ,\ u^\lambda_+\ ,\ q^\lambda_+)$ lorsque l'on se donne les valeurs $(\rho_-\ ,\ p_-\ ,\ \theta_-\ ,\ u^\lambda_-\ ,\ q^\lambda_-)$ ou inversement. C'est le problème qui se pose dans l'étude des ondes de choc. Les variétés V^0_3 donnent donc la généralisation relativiste de ce problème.

En vue des applications, on peut prendre pour V_4 un espace-temps de la relativité restreinte, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites $(x^0 = ct\ ,\ x^i)$. Nous changeons de notation dans les équations (10.1), en remplaçant l'indice 0 par 1 ; S aura pour équation

$$x^1 = 0$$

L'hypersurface S doit naturellement être orientée dans le temps $(g^{11} = -1)$. Les équations (8.2) conduisent à

$$T^{1\lambda}_+ = T^{1\lambda}_-$$

Il leur faut adjoindre les hypothèses locales

$$\rho = \mu(1+\epsilon) \tag{8.3}$$

$$\nabla_\alpha(\mu u^\alpha) = 0 \tag{8.4}$$

A partir de (8.3), il est possible de déduire une relation analogue à l'équation connue dans l'étude des ondes de choc. Pour cela, intégrons l'équation (8.4) sur un domaine B limité dans un tube de courant par deux surfaces $S_{-\varepsilon}$ et $S_{+\varepsilon}$ voisines et parallèles à S :

$$x^1 = +\varepsilon \qquad\qquad x^1 = -\varepsilon$$

Nous avons

$$\iiiint_B \nabla_\alpha (\mu u^\alpha)\, d\tau = \iiint_{\partial B} \mu u^\alpha \nu_\alpha\, d\omega = 0$$

où $d\omega$ est l'élément d'aire de la frontière ∂B de B et ν_α les composantes de la normale unitaire à l'hypersurface ∂B. Grâce au choix de B, on a :

$$\iiint_{S_{+\varepsilon}} \mu^\alpha \nu_\alpha\, d\omega - \iiint_{S_{-\varepsilon}} \mu^\alpha \nu_\alpha\, d\omega = 0$$

Nous en déduirons la relation cherchée :

$$\mu_+ u^1_+ = \mu_- u^1_- \tag{8.5}$$

Les équations (8.2)(8.3)(8.4)(8.5) constituent l'extension relativiste des équations d'Hugoniot pour une onde de choc, compte tenu des phénomènes thermiques.

Il est facile de mettre les équations dans le cas adiabatique ($\vec{q} = 0$) sous la forme

$$\frac{\mu_+ v_+}{c\sqrt{1-\beta_+^2}} = \frac{\mu_- v_-}{c\sqrt{1-\beta_-^2}} = m$$

$$\frac{m\left(1+\epsilon_+ + \frac{p_\pm}{\mu_+}\right)}{\sqrt{1-\beta_+^2}} = \frac{m\left(1+\epsilon_- + \frac{p_-}{\mu_-}\right)}{\sqrt{1-\beta_-^2}}$$

$$\frac{m\left(1+\epsilon_+ + \frac{p_\pm}{\mu_+}\right)}{c\sqrt{1-\beta_+^2}} + p_+ = \frac{m\left(1+\epsilon_- + \frac{p_-}{\mu_-}\right)}{c\sqrt{1-\beta_-^2}} + p_-$$

On en tire les corrections relativistes vis-à-vis des équations d'Hugoniot.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. de BROGLIE — Sur la variance relativiste de la température. (Cahiers de Physique, 31-32 , 1948).

[2] C. ECKART — The thermodynamics of irreversible process. III. Relativistic theory of the simple fluid (Phy. Rev. 58 , 1940).

[3] D. Van DANTZIG — On relativistic thermodynamic (Proc. Kond. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 42 , 1939)
On the thermohydrodynamics of perfectly perfect fluid (Ib. 43 , 1940)

[4] P. DUHEM — Hydrodynamique - Elasticité - Acoustique (Hermann 1891)

[5] A. LICHNEROWICZ — Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste (Ann. Ecole Normale Supérieure, fasc.IV , 1941)

Etude mathématique des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (cours professé au Collège de France) (Masson , 1954)

[6] PHAM MAU QUAN — Thèse, 1954.

[7] G. DARMOIS — Les équations de la gravitation einsteinienne (Mémorial des Sc. Math., fasc. XXV, 1927) .