Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

GÉRARD PETIAU

Quelques cas de représentation des corpuscules en interaction avec des champs extérieurs dans la nouvelle forme de la mécanique ondulatoire (Théorie de la double solution)

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. nº 18, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A17_0>

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1954/55)
-:-:-:-

29 mars 1955

Exposé n° 18

QUELQUES CAS DE REPRÉSENTATION DES CORPUSCULES EN INTERACTION AVEC DES CHAMPS EXTÉRIEURS DANS LA NOUVELLE FORME DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE. (THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION).

par Gérard PETIAU

-:-:-:-:-

Je me propose dans cet exposé de montrer comment il est possible, tout au moins dans certains cas particuliers, de déterminer complètement pour un corpuscule soumis à l'action d'un champ extérieur, des solutions de l'équation d'ondes de Schrödinger possédant une singularité ponctuelle localisée mobile décrivant une trajectoire.

1.- Je considère l'équation d'ondes de Schrödinger dépendant du temps

$$\triangle \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon V \Psi = 2 \frac{im}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,y,z,t) \tag{1}$$

décrivant un corpuscule chargé soumis à l'action d'un potentiel $V(x,y,z)$.

Suivant la méthode de L. de Broglie, l'onde $\Psi(x,y,z,t)$ peut être écrite sous la forme

$$\Psi(x,y,z,t) = a(x,y,z,t) \exp[\frac{i}{\hbar} S(x,y,z,t)]$$

les fonctions a et S étant réelles.

L'équation (1) donne alors le système

$$2m(\partial_t S - \varepsilon V) - \sum (\partial_x S)^2 + \hbar^2 \frac{\Delta a}{a} = 0 \quad , \tag{2}$$

$$2m(\partial_t a) - 2 \sum (\partial_x S)(\partial_x a) - \triangle S a = 0 \quad . \tag{3}$$

Si l'on considère S comme connu, l'équation (3) est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. La solution de celle-ci se détermine en recherchant les courbes caractéristiques. Ces courbes sont solutions du système différentiel :

$$\frac{dt}{m} = - \frac{dx}{\frac{\partial S}{\partial x}} = - \frac{dy}{\frac{\partial S}{\partial y}} = - \frac{dz}{\frac{\partial S}{\partial z}} = \frac{2\, d\, a}{\triangle S\, a} \quad . \tag{4}$$

Si la fonction S satisfait à la relation

$$\triangle S = 0 \quad ,$$

la solution de (3) s'obtient simplement :

En effet, il suffit alors de déterminer trois intégrales premières dépendant du temps, solution des équations différentielles,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial y} \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial z}$$

soient $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$

$$(x_0 = \varphi_1(t_0) \quad , \quad y_0 = \varphi_2(t_0) \quad , \quad z_0 = \varphi_3(t_0))$$

que nous écrivons encore

(5) $$\lambda = x - \varphi_1(t) \quad , \quad \mu = y - \varphi_2(t) \quad , \quad \nu = z - \varphi_3(t)$$

avec $$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x} \quad , \ldots$$

Nous avons alors

$$a(x,y,z,t) = a(\lambda,\mu,\nu) = f_{arbitraire}(\lambda,\mu,\nu) \quad .$$

Il reste à résoudre le système (2). Pour cela, on effectue le changement de variables (5).

Cette transformation étant linéaire, on aura

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] a(x,y,z,t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\right] a(\lambda,\mu,\nu) \quad .$$

D'autre part l'expression

$$2m\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \varepsilon V\right) - \sum (\partial_x S)^2$$

se transforme en une expression $\Phi(\lambda,\mu,\nu,t)$ qui doit être indépendante de t .

Il en résulte des conditions qui déterminent les fonctions φ_1 , φ_2 , φ_3 et la fonction S .

Si l'on n'admet pas l'hypothèse $\triangle S = 0$, on est conduit au système (4) complet.

On détermine d'abord trois intégrales premières dépendant du temps

$$f_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,x,y,z,t) = 0 \quad , \quad f_2 = 0 \quad , \quad f_3 = 0$$

et réciproquement $\lambda_1 = \varphi_1(x,y,z,t)$, ...

et il reste en outre à déterminer une quatrième intégrale première telle que

$$\frac{da}{a} = \frac{\Delta S\, dt}{2m} = - \frac{S_1(\lambda,\mu,\nu,t)dt}{2m} \quad .$$

on en déduit

$$a = f_{arbitraire}(\lambda,\mu,\nu) \exp[- \int \frac{S_1(\lambda,\mu,\nu,t)dt}{2m}] \quad .$$

Pour qu'une solution de ce type soit acceptable il faut des conditions supplémentaires :

1°) La fonction

$$f_1 = \exp[- \int \frac{S_1(\lambda,\mu,\nu,t)dt}{2m}] = f_1(\lambda,\mu,\nu,t)$$

doit être une fonction régulière.

2°) Sur les trajectoires λ,μ,ν sont constants, f_1 se réduit à une fonction de t . La fonction d'ondes doit présenter un caractère de permanence qui n'est compatible qu'avec certaines formes de la fonction f_1 (par exemple fonction périodique de valeur moyenne sur une période non nulle, fonction dont la valeur moyenne au cours du temps tend vers une valeur constante non nulle, etc...).

2.- ÉTUDE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE.

Les équations précédentes (2) et (3), dans le cas de l'oscillateur harmonique spatial, pour lequel nous avons

$$\varepsilon V = k\, r^2 = k(x^2 + y^2 + z^2)$$

nous donnent

(2') $$2m(\partial_t S - k\, r^2) - \sum (\partial_x S)^2 + \hbar^2 \frac{\Delta a}{a} = 0$$

(3') $$m(\partial_t a) - \sum (\partial_x S)(\partial_x a) - \frac{1}{2} \Delta S\, a = 0 \quad .$$

Nous chercherons une solution en admettant sur la fonction S les hypothèses

1°) $\Delta S = 0$,

2°) S est une fonction linéaire de x,y,z , soit

$$S = S_0(t) - S_1(t)x - S_2(t)y - S_3(t)z$$

$$= S_0(t) - \sum_j S_j(t)x_j \qquad j = 1 , 2 , 3 \quad .$$

Le système (4) s'écrit

$$(4') \qquad \frac{dt}{m} = - \frac{dx_j}{(\partial_{x_j} S)} = \frac{dx_j}{S_j(t)} \quad ,$$

soit

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{S_j(t)}{m} \quad .$$

Nous écrivons les solutions de ce système sous la forme

$$\begin{cases} x_j = x_j(t) = \varphi_j(t) \\ x_j^0 = \varphi_j(t_0) \quad \text{d'où} \quad m\,\varphi_j'(t) = S_j(t) \end{cases} .$$

Nous définissons trois paramètres λ_1 , λ_2 , λ_3 par

$$(5') \qquad \lambda_j = x_j - \varphi_j(t) \quad .$$

L'équation (3")

$$m(\partial_t\, a) - \sum (\partial_x\, S)(\partial_x\, a) = 0$$

nous donne alors

$$a(x,y,z,t) = a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$$

et (5') entraîne

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] a(x,y,z,t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_3^2}\right] a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \quad .$$

Par le changement de variable (5'), l'équation (2') devient

$$2m\left[S_0' - \sum S_j'\, x_j - k \sum x_j^2\right] - \sum (S_j)^2 + \hbar^2 \frac{\Delta a}{a} = 0$$

ou

$$\hbar^2 \frac{\Delta_\lambda a}{a} - 2mk \sum \lambda_j^2 - 2m \sum \lambda_j (S_j' + 2k\,\varphi_j) - 2mk \sum \varphi_j^2 - 2m\, S_j' \varphi_j -$$
$$- \sum (S_j)^2 + 2m\, S_0' = 0 \quad .$$

Cette équation ne dépendra plus de t si nous avons

$$S_j'(t) + 2k\,\varphi_j(t) = A_j \quad \text{constantes} ,$$

$$\begin{cases} 2m\, S_0' - 2mk \sum \varphi_j^2 - 2m\, S_j' \varphi_j - \sum (S_j)^2 = B \text{ constante} \\ \text{ou encore} \\ 2m\, S_0' - 2m\, A_j \varphi_j + 2mk \sum \varphi_j^2 - \sum (S_j)^2 = B \end{cases} .$$

Ces conditions vont nous déterminer les φ_j , S_j et S_0 . Nous déterminons φ_j et S_j' par le système

$$\begin{cases} m\,\varphi_j' = S_j \\ S_j' + 2\,k\,\varphi_j = A_j \rightarrow m\,\varphi'' + 2\,k\,\varphi_j = A_j \end{cases} .$$

La solution en est immédiatement

$$\boxed{\varphi_j(t) = R_j \operatorname{Cos}[\omega(t-t_0) - \alpha_j] + x_0 - R_j \operatorname{Cos}\alpha_j}$$

avec
$$\left|\begin{array}{l} \omega^2 = \dfrac{2\,k}{m} \\ A_j = 2\,k(x_0 - R_j \operatorname{Cos}\alpha_j) \end{array}\right. .$$

La trajectoire $\varphi_j(t)$ coïncide avec la trajectoire classique si nous avons $A_j = 0$,

soit $$x_0 = R_j \operatorname{Cos}\alpha_j \quad .$$

La relation

$$S_j = m\,\varphi_j'$$

nous donne ensuite

$$S_j = -\sqrt{2km}\,R_j \sin[\omega(t-t_0) - \alpha_j]$$

et l'on vérifie que $S_j(t_0) = m\,\omega\,R_j \sin\alpha_j = m\,v_j^0$.

Il reste à déterminer S_0 ,

En reportant les expressions des φ_j et S_j' dans S_0' on obtient :

$$S_0(t) = [B + \frac{m}{2k}\sum_j A_j^2]\,\frac{t}{2m} - \frac{\sqrt{2km}}{4}\sum_j R_j^2 \sin 2[\omega(t-t_0) - \alpha_j] \quad .$$

On a donc

1°) Pour les trajectoires

$$\varphi_j(t) = R_j \cos[\omega(t-t_0) - \alpha_j] + \frac{A_j}{2k} \quad .$$

2°) Pour la fonction S

$$S(t) = [B + \frac{m}{2k}\sum A_j^2]\,\frac{t}{2m} - \frac{\sqrt{2km}}{4}\sum R_j^2 \sin 2[\omega(t-t_0) - \alpha_j]$$
$$+ \sum_j x_j\,\sqrt{2km}\,R_j \sin[\omega(t-t_0) - \alpha_j] \quad .$$

La fonction $a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ est alors déterminée par l'équation d'ondes

$$\hbar^2 \frac{\Delta_\lambda a}{a} - 2\, m\, k \sum \lambda_j^2 - 2\, m \sum \lambda_j\, A_j + B = 0 \quad .$$

On voit que la condition $A_j = 0$ ramène les trajectoires aux trajectoires classiques et l'équation d'ondes à l'équation de l'oscillateur harmonique transposée dans l'espace $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Nous nous placerons maintenant dans ce cas. Il reste l'équation

$$\Delta_\lambda\, a + \frac{1}{\hbar^2}[B - 2mk \sum \lambda_j^2]\, a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = 0 \quad .$$

La résolution de cette équation s'effectue sans difficulté :

On pose

$$\lambda_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi \;,\; \lambda_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi \;,\; \lambda_3 = \rho\cos\theta$$

$$\varkappa = \frac{B}{\hbar^2} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{2km}{\hbar^2}$$

$$a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = a(\rho)\; P_\ell^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} ,$$

et l'on obtient par séparation des variables l'équation différentielle déterminant $a(\rho)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \varkappa - \sigma^2\rho^2\right] a(\rho) = 0$$

cette équation identique à celle que l'on rencontre dans la théorie de l'oscillateur harmonique admet la solution générale

$$a(\rho) = C_1\, e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2}}\, \rho^\ell\; {}_1F_1\!\left(\tfrac{1}{2}(\ell + \tfrac{3}{2} - \tfrac{\varkappa}{2\sigma})\; ;\; \ell + \tfrac{3}{2}\; ;\; \sigma\rho^2\right)$$

$$+ C_2\, e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2}}\, \frac{1}{\rho^{\ell+1}}\; {}_1F_1\!\left(-\tfrac{1}{2}(\ell - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\varkappa}{2\sigma})\; ;\; -\ell + \tfrac{1}{2}\; ;\; \sigma\rho^2\right) .$$

La solution en C_1 correspond à l'onde régulière, au voisinage de $\rho = 0$;
La solution en C_2 à l'onde singulière.

Pour que ces fonctions soient acceptables, c'est-à-dire aient un comportement à l'infini convenable, les fonctions ${}_1F_1$ doivent se réduire à des polynômes.

Ceci nous donne les conditions

1°) Pour l'onde régulière

$$\frac{1}{2}(\ell_1 + \frac{3}{2} - \frac{\varkappa}{2\sigma}) = - n_1 \quad , \quad \frac{\varkappa}{2\sigma} = 2\, n_1 + \ell_1 + \frac{3}{2}$$

d'où $$B_1 = 2\, m\, \omega\, \hbar (2\, n_1 + \ell_1 + \frac{3}{2}) \quad .$$

2°) Pour l'onde singulière

$$- \frac{1}{2}(\ell_2 - \frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2\sigma}) = - n_2 \quad , \quad \frac{\varkappa}{2\sigma} = 2\, n_2 - \ell_2 + \frac{1}{2}$$

d'où $$B_2 = 2\, m\, \omega\, \hbar (2\, n_2 - \ell_2 + \frac{1}{2}) \quad .$$

La valeur propre B intervient dans la phase S .

Par suite, pour qu'il y ait guidage par une phase commune, il faut que l'on ait

$$B_1 = B_2 = B \quad .$$

Or les valeurs de B_1 sont toutes positives, mais non pas celles de B_2 . Seules les valeurs communes seront acceptables.

Nous poserons

$$2\, n_1 + \ell_1 = N \quad , \quad 2\, n_2 - \ell_2 = N + 1$$

alors $$B = 2\, m\, \omega\, \hbar\, (N + \frac{3}{2}) \quad .$$

Nous devons alors distinguer deux cas :

1°) N pair

$$2\, n_1 + \ell_1 = N \text{ pair} \quad , \quad 2\, n_2 - \ell_2 = N + 1 \text{ impair}$$

les valeurs de (ℓ_1, n_1) , (ℓ_2, n_2) seront

$$\ell_1 = 0\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ N \qquad\qquad \ell_2 = 1\ ,\ 3\ ,\ \dots\ \infty$$

$$2\, n_1 = N\ ,\ N-2\ ,\ \dots\ ,\ 0 \qquad\qquad 2\, n_2 = N+2\ ,\ N+4\ ,\ \dots\ \infty$$

Soit $\ell_1 = 2s$, $\ell_2 = 2s+1$, on a

$$a(\rho) = e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2}} \left\{ \sum_{s=0}^{N/2} C_1^{(s)} \rho^{2s} \, {}_1F_1\left(-\left(\frac{N}{2} - s\right) ; 2s + \frac{3}{2} ; \sigma\rho^2\right) + \sum_{s=0}^{\infty} C_2^{(s)} \frac{1}{\rho^{2s+2}} \, {}_1F_1\left(-\left(\frac{N}{2} + s + 1\right) ; -2s - \frac{1}{2} ; \sigma\rho^2\right) \right\}$$

2°) Pour N impair

$$2 n_1 + \ell_1 = N \text{ impair} \qquad\qquad 2 n_2 - \ell_2 = N + 1 \text{ pair}$$

$$\begin{cases} 2 n_1 = N-1 , N-3 , \ldots , 0 \\ \ell_1 = 1 , 3 , \ldots , N \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2 n_2 = N+1 , N+3 , \ldots \infty \\ \ell_2 = 0 , 2 , \ldots \infty \end{cases}$$

$$\ell_1 = 2s+1 \qquad\qquad \ell_2 = 2s$$

$$a(\rho) = e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2}} \left\{ \sum_{s=0}^{(N-1)/2} C_1^{(s)} \rho^{2s+1} \, {}_1F_1\left(-\left(\frac{N-1}{2} - s\right) ; 2s + \frac{5}{2} ; \sigma\rho^2\right) + \sum_{s=0}^{\infty} C_2^{(s)} \frac{1}{\rho^{2s+1}} \, {}_1F_1\left(-\left(\frac{N+1}{2} + s\right) ; -2s + \frac{1}{2} ; \sigma\rho^2\right) \right\}$$

La solution complète du problème de l'oscillateur harmonique est donc obtenue par l'expression des fonctions S et $a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

3.- Je vais maintenant considérer comme second exemple, le cas du mouvement d'un électron soumis à l'interaction d'un champ magnétique constant $H = H_z = C^{te}$, $H_x = H_y = 0$.

Ce champ magnétique peut être considéré comme dérivant du potentiel vecteur

$$A_z = 0 \quad , \quad A_x = - H_1 y \quad , \quad A_y = H_2 x$$

avec $\qquad H_1 + H_2 = H$

L'indétermination correspondante dans H_1 et H_2 correspond au choix de la jauge.

Nous poserons

$$\frac{e}{c} H_1 = K_1 \quad , \quad \frac{e}{c} H_2 = K_2 \quad , \quad K_1 + K_2 = \frac{e}{c} H \quad .$$

J'introduirai en outre une constante δ en posant

$$k_1 + \delta = K_1 \quad ,$$

$$k_2 - \delta = K_2 \quad ,$$

de telle sorte que

$$\frac{e}{c} H = K_1 + K_2 = k_1 + k_2 = k \quad .$$

L'équation de Schrödinger donne, en écrivant

$$\Psi = a(x,y,z,t) \exp[\frac{i}{\hbar} S(x,y,z,t)] \quad ,$$

le système

(2) $$2m \frac{\partial a}{\partial t} - 2[(\partial_x S + K_1 y)(\partial_x a) + (\partial_y S - K_2 x)(\partial_y a) + (\partial_z S)(\partial_z a)] - \Delta S a = 0$$

(3) $$2m(\partial_t S) - [(\partial_x S + K_1 y)^2 + (\partial_y S - K_2 x)^2 + (\partial_z S)^2] + \hbar^2 \frac{\Delta a}{a} = 0$$

Je vais encore chercher une solution ne dépendant que de la position du corpuscule sur la trajectoire en introduisant l'hypothèse

$$\Delta S = 0 \quad .$$

Je vais chercher une solution du système (2) , (3) en posant

$$S = S_0(t) - S_1(t)x - S_2(t)y - \gamma z - \delta x y \quad .$$

Le terme δxy (δ, γ constantes) nous permettra de rapporter la solution à un choix quelconque de la jauge en partant d'une jauge déterminée pour le champ extérieur.

Introduisant les nombres k_1 et k_2 définis précédemment, le système (1) , (2) s'écrit :

(3) $$m(\partial_t a) + (S_1 - k_1 y)(\partial_x a) + (S_2 + k_2 x)(\partial_y a) + \gamma(\partial_z a) = 0$$

(4) $$2m[S_0' - S_1' x - S_2' y] - [S_1 - k_1 y]^2 - [S_2 + k_2 x]^2 - \gamma^2 + \hbar^2 \frac{\Delta a}{a} = 0$$

Les caractéristiques du système (3) sont solutions du système différentiel :

$$\frac{dt}{m} = \frac{dx}{S_1(t) - k_1 y} = \frac{dy}{S_2 + k_2 x} = \frac{dz}{\gamma}$$

ou $$m \frac{dx}{dt} = S_1(t) - k_1 y \quad ; \quad m \frac{dy}{dt} = S_2(t) + k_2 x \quad ; \quad m \frac{dz}{dt} = \gamma$$

Nous écrivons les solutions de ce système sous la forme

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \quad , \quad y = \Psi(t) \quad , \quad z = z_0 + \frac{\gamma}{m}(t-t_0) \\ x_0 = \varphi(t_0) \quad , \quad y_0 = \Psi(t_0) \quad . \end{cases}$$

Nous avons alors

$$m\,\varphi'(t) = S_1(t) - k_1\,\Psi(t) \quad ; \quad m\,\Psi'(t) = S_2(t) + k_2\,\varphi(t)$$

Nous poserons

$$\lambda = x - \varphi(t) \quad ; \quad \mu = y - \Psi(t) \quad ; \quad \nu = z - z_0 - \frac{\gamma}{m}(t-t_0)$$

Nous aurons alors $a(x,y,z,t) = a(\lambda,\mu,\nu)$

$$\Delta_{x,y,z}\, a(x,y,z,t) = \Delta_{\lambda,\mu,\nu}\, a(\lambda,\mu,\nu) \quad .$$

Le changement de variable

$$x = \lambda + \varphi(t) \quad , \quad y = \mu + \Psi(t) \quad , \quad z = \nu + \frac{\gamma}{m}(t-t_0) + z_0$$

donne alors dans l'équation (4) :

$$\hbar^2 \frac{\Delta_\lambda a}{a} + 2m\,S_0' - S_1^2 - S_2^2 - \gamma^2 - 2\varphi(m\,S_1' + k_2\,S_2)$$

$$- 2\,\Psi(m\,S_2' - k_1\,S_1) - k_2^2\,\varphi^2 - k_1^2\,\Psi^2 - 2\lambda(m\,S_1' + k_2 S_2 + k_2^2\varphi)$$

$$- 2\mu(m\,S_2' - k_1\,S_1 + k_1^2\Psi) - k_2^2\,\lambda^2 - k_1^2\,\mu^2 = 0 \quad .$$

Cette équation ne devant dépendre que de λ,μ,ν nous devons avoir :

$$m\,S_1' + k_2\,S_2 + k_2^2\varphi = A_1 = C^{te}$$

$$m\,S_2' - k_1\,S_1 + k_1^2\Psi = A_2$$

$$2m\,S_0' - S_1^2 - S_2^2 - \gamma^2 - 2\varphi\,A_1 - 2\Psi\,A_2 + k_2^2\varphi^2 + k_1^2\Psi^2 = B = C^{te}$$

et il reste l'équation aux dérivées partielles :

$$\hbar^2 \frac{\Delta a}{a} - 2\lambda\,A_1 - 2\mu\,A_2 - k_2^2\lambda^2 - k_1^2\mu^2 + B = 0 \quad .$$

Les équations ci-dessus déterminent complètement φ, Ψ, S_1, S_2, S_0.

Nous allons préciser ce calcul dans le cas simplifié où l'on a $A_1 = A_2 = 0$.

On a alors :

$$\begin{cases} m\,S_1' + k_2\,S_2 + k_2^2\,\varphi = 0 & ; \quad m\,S_2' - k_1\,S_1 + k_1^2\,\psi = 0 \\ m\,\varphi' = S_1 - k_1\,\psi & ; \quad m\,\psi' = S_2 + k_2\,\varphi \end{cases}$$

et par élimination, posant

$$k = k_1 + k_2$$

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{k_1 + k_2}{m}\,\psi' = 0 \\ \psi'' - \dfrac{k_1 + k_2}{m}\,\varphi' = 0 \end{cases}$$

Soit $\omega = \frac{k}{m} = \frac{e}{m\,c}\,H$

On a $\varphi'' + \omega\,\psi' = 0 \quad , \quad \psi'' - \omega\,\varphi' = 0$

d'où

$$\varphi(t) = R\cos[\omega(t-t_0) - \varphi_0] + x_0 - R\cos\varphi_0$$

$$\psi(t) = R\sin[\omega(t-t_0) - \varphi_0] + y_0 + R\cos\varphi_0$$

R et φ_0 désignant deux nouvelles constantes.

Les trajectoires $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sont les cercles classiques décrits par l'électron dans le champ magnétique $H = H_z$.

Posant

$$v_0^2 = (\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2 = \omega^2\,R^2$$

on a

$$R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{m\,c\,v_0}{e\,H}$$

$$v_x^0 = -\,\omega\,R\cos\varphi_0 \quad , \quad v_y^0 = -\,\omega\,R\sin\varphi_0$$

La pulsation $\omega = \frac{eH}{mc}$ est indépendante du choix de la jauge ainsi que l'on devait s'y attendre.

On a alors sans difficulté :

$$S_1(t) = m\,\varphi'(t) + k_1\,\psi$$

$$= -\,k_2\,R\sin[\omega(t-t_0) - \varphi_0] + k_1(y_0 + R\sin\varphi_0)$$

$$S_2(t) = m\,\psi' - k_2\,\varphi$$

$$= k_1\,R\cos[\omega(t-t_0) - \varphi_0] - k_2(x_0 + R\cos\varphi_0)$$

et $$S_0(t) = [B + \gamma^2]\,\frac{t}{2m} + \frac{R^2}{4}(k_1 - k_2)\,\sin 2[\omega(t-t_0) - \varphi_0]$$
$$+ k_1\, R(y_0 + R\sin\varphi_0)\,\cos[\omega(t-t_0) - \varphi_0]$$
$$- k_2\, R(x_0 - R\cos\varphi_0)\,\sin[\omega(t-t_0) - \varphi_0] \quad .$$

Nous avons donc déterminé S_0 , S_1 , S_2 et la phase $S(t) = S_0(t) - S_1(t)x - S_2(t)y - \gamma z - \delta\, xy$.

Nous sommes amenés maintenant à chercher les solutions à singularités localisées en $\lambda = \mu = \nu = 0$ de l'équation

$$\hbar^2\left[\frac{\partial^2 a}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial\nu^2}\right] - [k_2^2\,\lambda^2 + k_1^2\,\mu^2 - B]\,a(\lambda,\mu,\nu) = 0$$

Par un choix convenable du facteur δ , nous pouvons nous ramener à $k_1 = 0$ $k_2 = k$, d'où

$$\Delta_\lambda\, a - \left[\frac{k^2}{\hbar^2}\lambda^2 - \frac{B}{\hbar^2}\right] a = 0 \quad .$$

Cette équation est, transposée en λ , celle à laquelle on ramène le problème de l'électron dans un champ magnétique constant et obtenue par Landau en 1929.

Cette équation est dans la direction $O\lambda$ celle d'un oscillateur harmonique linéaire. Mais la solution de la mécanique ondulatoire "orthodoxe" par séparation des variables λ , μ , ν n'est pas acceptable ici.

En effet la recherche des solutions singulières limite l'application de la méthode de séparation des variables aux systèmes de coordonnées dans lesquels il existe des surfaces de valeurs d'une des coordonnées constantes enveloppant complètement le point singulier.

Toutefois l'existence de la solution singulière se voit ici immédiatement car au voisinage de $\lambda = \mu = \nu = 0$, l'équation ci-dessus se ramène à l'équation de Helmholtz dont la solution est bien connue, mais avec les valeurs de B correspondant au cas de l'oscillateur harmonique.

Pour mettre ceci en évidence, nous poserons encore

$$\lambda = \rho\cos\theta \quad , \quad \mu = \rho\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad \nu = \rho\sin\theta\sin\varphi$$

d'où l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{k^2}{\hbar^2}\,\rho^2\cos^2\theta + \frac{B}{\hbar^2}\right]$$
$$\times\, a(\rho,\theta,\varphi) = 0 \,.$$

Il n'y a évidemment plus séparation des variables ρ et θ , mais si l'on cherche une solution $a(\rho, \theta)$, on voit que au voisinage de $\theta = 0$ $(\cos \theta = 1)$, $\rho \to \lambda$ la solution $a(\rho, \theta)$ se raccordera à celle de

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{\ell(\ell+1)}{\lambda^2} - \frac{k^2}{\hbar^2} \lambda^2 + \frac{B}{\hbar^2}\right] a(\lambda, 0) = 0 \quad .$$

La résolution de cette équation, qui est celle considérée précédemment, détermine des valeurs quantifiées B_N acceptables pour que la fonction décroisse convenablement pour $\lambda \to \infty$.

Au contraire, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda, \mu \to 0$ et l'équation d'ondes se ramène à l'équation de Helmholtz mais avec les valeurs de la constante B_N ci-dessus.

Les fonctions d'ondes à singularités localisées mobiles décrivant le mouvement d'un électron dans un champ magnétique constant sont donc complètement déterminées.

Le cas du champ électrique constant se traite également sans difficulté par la même méthode.