SÉMINAIRE L. DE BROGLIE.
THÉORIES PHYSIQUES

ROBERT POTIER

Sur les produits scalaires de fonctions d'ondes et les intégrales de Fourier réciproques, en mécanique ondulatoire relativiste

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. nº 16, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A15_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 16

SUR LES PRODUITS SCALAIRES DE FONCTIONS D'ONDES ET LES INTÉGRALES DE FOURIER RÉCIPROQUES, EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE RELATIVISTE.

Par Robert POTIER

-:-:-:-

INTRODUCTION.

Dans de nombreux travaux ([2], [3], [4]), Mr Olivier Costa de Beauregard a défini de manière covariante relativiste la norme, l'orthogonalité des fonctions d'onde et les intégrales de Fourier réciproques.

Son but était de donner à la théorie covariante de Tomonaga [12], Schwinger [10], Dyson [5] et Feyman [6] une base comparable à celle que représentait "le formalisme d'interprétation de la théorie primitive de Heisenberg-Schrödinger par rapport à la formulation hamiltonienne de la théorie quantique des champs".

Tous les raisonnements de Mr Costa de Beauregard postulaient que les fonctions d'onde de la particule obéissaient à l'équation de Gordon, qui excluait les théories des particules à masses et à spins multiples. (Cf. R. Potier [7], [8], [9]).

Pour étendre ses résultats à certains corpuscules de spin spécifié (électrons de Dirac, corpuscules de Kemmer), Mr Costa de Beauregard [3] devait s'appuyer sur l'égalité du flux du courant de ces corpuscules et du courant de Gordon qu'on pouvait leur associer, à travers les hypersurfaces σ du genre espace. Il lui était nécessaire pour cela de s'appuyer sur les algèbres matricielles particulières associées à ces corpuscules. L'extension à d'autres corpuscules se heurtait à des difficultés considérables.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer qu'une telle extension va de soi, si l'on renonce à imposer l'équation de Gordon, à la condition de faire sur le quadrivecteur courant d'univers des hypothèses très simples et toujours réalisées dans le cadre des théories actuellement envisagées (Cf. [1] et [7].).

1.- ONDES PLANES.

Nous avons montré [8] que les équations générales covariantes introduites par nous en 1945 [7], définissent des corpuscules à spins et masses multiples. Une solution onde plane de ces équations sera définie par un quadrivecteur k_λ (λ=1 , 2 , 3 , 4) , relié à l'impulsion-énergie p_λ par les formules de Louis de Broglie :

(1) $$h\, k_\lambda = 2\,\pi\, p_\lambda$$

et par des nombres quantiques de spin S , S_3 .

On peut ainsi poser :

(2) $$\psi(k,x) = \zeta_{S,S_3}(k)\; e^{ik_\lambda x_\lambda}$$

$\zeta(k)$ peut s'obtenir à partir de l'expression de l'onde plane dans le système propre, obtenue par une transformation de Lorentz qui annule k_1 , k_2 et k_3 .

Cette onde plane, $\zeta_1\, e^{ik_4 x_4}$, dépend de la masse propre m_e , à laquelle on peut associer une variable k_ℓ selon la formule

(3) $$h\, k_\ell = 2\,\pi\, c\, m_e$$

k_ℓ change de signe quand on change le sens des x_4 . Par conséquent, k_ℓ aura la variance d'un pseudo-invariant. Dans le système propre, on a :

(4) $$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \qquad\qquad k_4 = i\, k_\ell$$

Quand on repasse au système d'axes primitif, le vecteur k_λ conserve sa longueur d'univers et on a :

(5) $$\sum_\lambda (k_\lambda)^2 + k_\ell^2 = 0$$

(5) définit dans l'espace des k un hyperboloïde associé à la masse m_e . Il est à remarquer qu'une seule des nappes de cet hyperboloïde est à considérer dans le cas général, celle correspondant à $+k_\ell$. La nappe définie par $-k_\ell$ n'intervient que si les équations sont invariantes dans tout retournement de Lorentz. Alors, avec m_e , intervient la masse $-m_e$.

Nous définirons l'élément trilinéaire de l'hyperboloïde (5) :

(6) $$d\eta_\lambda = -\, i(d\, k_\mu\, dk_\nu\, dk_\rho) \qquad \lambda,\mu,\nu,\rho = \text{une permutation circulaire de 1, 2, 3, 4}$$

(6) définit un pseudo-quadrivecteur, auquel on associera un invariant, $d\eta$, selon la formule :

(7) $$h_\lambda\, d_\lambda = -k_\ell\, d\,\eta_\lambda$$

k_λ est en effet colinéaire à l'élément $d\eta_\lambda$, car :

(8) $$\underset{\lambda}{\varepsilon}\; k_\lambda \;\; dk_\lambda = 0$$

k_λ est normal à l'hyperboloïde, et $d\eta_\lambda$ aussi.

Dans l'espace-temps, nous considèrerons les hypersurfaces σ du genre espace, dont l'élément trilinéaire sera :

(9) $$d\sigma_\lambda = - i[dx_\mu\, dx_\nu\, dx_\rho]$$

λ, μ, ν, ρ = perturbation circulaire de 1 , 2 , 3 , 4 .

2.- CONSÉQUENCES DE L'EXISTENCE D'UN QUADRIVECTEUR RÉEL ET A DIVERGENCE NULLE.

Nous avons donné [7] les expressions générales du quadrivecteur-courant réel, de divergence 4-dimensionnelle nulle, pour les particules de spins et de masses multiples. Dans ce qui suit, il ne sera pas nécessaire d'utiliser le détail de ces expressions. Il suffira de faire les hypothèses suivantes.

1°) Un quadrivecteur, forme bilinéaire de la fonction d'onde ψ et de la fonction conjuguée $\bar{\phi}$ d'une autre fonction d'onde, ϕ , existe. Soit :

$$v(\bar{\phi}, \psi) \qquad\qquad v(\bar{\psi}, \psi) \text{ est réel.}$$

2°) Les équations d'onde entraînent :

(10) $$\mathrm{div}_4\, v(\bar{\phi}, \psi) = 0$$

3°) Si ϕ et ψ représentent deux fonctions d'onde planes définies par le même k_λ (donc de même quantité de mouvement et énergie), et si ϕ et ψ représentent des cas purs différents de spin dans le système propre (par exemple S^2 et S_3 différents, ou S^2 égaux et S_3 différents) on a :

$$v(\bar{\phi}, \psi) = 0$$

Les conditions 1°, 2°, et 3° sont réalisées par les quadrivecteurs de notre théorie ainsi que par ceux de toutes autres théories à notre connaissance.

<u>A partir de ces hypothèses on peut démontrer plusieurs lemmes</u>.

<u>Lemme 1</u>.- On a : $v(\bar{\phi}, \psi) = [v(\bar{\psi}, \phi)]^*$

En effet, $v(\bar{\psi}_1 + \lambda^* \bar{\psi}_2 , \psi_1 + \lambda \psi_2)$ est réel.

Donc : $v(\bar{\psi}_1, \psi_1) + \lambda\lambda^* v(\bar{\psi}_2, \psi_2) + \lambda^* v(\bar{\psi}_2, \psi_1) + \lambda\, v(\bar{\psi}_1, \psi_2)$ est réel.

Posons par exemple $\lambda = 1$, il suit que :

$$v(\bar{\psi}_2, \psi_1) + v(\bar{\psi}_1, \psi_2) \text{ est réel.}$$

Si $\lambda = i$, on voit que :

$$v(\bar{\Psi}_2,\Psi_1)-v(\bar{\Psi}_1,\Psi_2) \quad \text{est imaginaire pur.}$$

Deux complexes de somme réelle et de différence imaginaire pure sont conjugués.

Donc : $$v(\bar{\Psi}_2,\Psi_1) = [v(\bar{\Psi}_1,\Psi_2)]^*$$

On peut donc écrire :

$$\iiint_\sigma v_\mu(\bar{\Psi}_2,\Psi_1)\, d\sigma_\mu = \iiint_\sigma [v_\mu(\bar{\Psi}_1,\Psi_2)]^* d\sigma_\mu$$

ou, autrement dit :

(11) $$\langle\Psi_2|\Psi_1\rangle = (\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle)^*$$

<u>Lemme 2</u>.- Soient deux fonctions d'onde planes : $\Psi = \zeta\, e(\vec{k}.\vec{x} + k_4\, x_4)$ et $\phi = \omega e(\vec{k}\, .\, \vec{x} + k'_4\, x_4)$, où la valeur de $\vec{k}$ est la même dans les deux expressions, ζ et ω étant deux constantes.

On a : $$v_4(\bar{\Psi},\phi) = 0 \qquad \text{si} \quad k'_4 \neq k_4$$

En effet : $$v(\bar{\Psi},\phi) = e[(k'_4 - k_4)x_4]\, v(\bar{\zeta},\omega)$$

$$\text{div}_4\, v = i(k'_4 - k_4)\, e[(k'_4 - k_4)x_4]\, v_4(\bar{\zeta},\omega) = 0$$

Ce qui entraine : $v_4(\bar{\zeta},\omega) = 0$ d'où $v_4(\bar{\Psi},\phi) = 0$

<u>Lemme 3</u>.- Si $\Psi = \zeta\, e(k_\lambda\, x_\lambda)$ est une fonction d'onde plane, $v(\bar{\Psi},\Psi)$ est colinéaire au quadrivecteur k . On peut, en effet se ramener dans le système propre par une transformation de Lorentz. Si la proposition est vraie dans ce système, elle sera vraie en général (les deux quadrivecteurs se transformant de manière équivalente).

Formons $v(\bar{\Psi},\Psi_0)$, Ψ étant donnée par $\zeta\, e(k_\lambda\, x_\lambda)$ et $\Psi_0 = \zeta_0 e(k_0\, x_4)$ (ces deux fonctions appartenant aux mêmes états de masse et de spin).

D'où : $$v(\bar{\Psi},\Psi_0) = e[(k_0 - k_4)x_4 - \vec{k}\, .\, \vec{x}]\, v(\bar{\zeta},\zeta_0)$$

$$\text{div}_4\, v(\bar{\Psi},\Psi_0) = e[(k_0-k_4)x_4 - \vec{k}.\vec{x}]\,[(k_0-k_4)\, v_4(\bar{\zeta},\zeta_0) - k_\alpha\, v_\alpha(\bar{\zeta},\zeta_0)] \quad \text{avec } \alpha = 1,2,3$$

D'où : $$0 = (k_0 - k_4)\, v_4(\bar{\zeta},\zeta_0) - k_\alpha\, v_\alpha(\bar{\zeta},\zeta_0)$$

faisons tendre les k_α vers 0 , k_4 tend vers k_0 . On sait que si les k_α sont du premier ordre, $k_0 - k_4$ est du second ordre. Il faut donc que les trois v_α tendent eux aussi vers zéro.

D'où : $$v_\alpha(\bar{\zeta}_0, \zeta_0) = 0$$

Si on suppose que $v_4(\bar{\zeta}_0, \zeta_0)$ est nonnul (nous ferons, en général dans ce qui suit cette hypothèse) la colinéarité de $v(\bar{\Psi}_0, \Psi_0)$ et du quadrivecteur $0,0,0,k_0$,est bien démontrée. Notre lemme l'est aussi.

3.- ÉGALITÉ DE PARSEVAL.

Posons :

(12) $$\Psi_{(x)} \equiv (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta_\ell} \exp(i\, k_\lambda\, x_\lambda)\, \zeta_{m_\ell, S, S_3}(k)\, d\eta_\ell \quad .$$

η_ℓ est l'hyperboloïde

(13) $$\eta_\ell \equiv k_\lambda\, k^\lambda + k_\ell^2 = 0 \quad (\text{ou } \eta_\ell \equiv (k_\lambda)^2 + k_\ell^2 = 0).$$

relatif à l'état de masse propre m_ℓ . k_ℓ est un pseudo-invariant dont nous avons déjà parlé sous le nom de k_0 , S et S_3 définissent les états de spin de ζ , ramené au système propre.

Considérons la fonction d'onde :

(14) $$\phi \equiv (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta_\ell} \exp(i\, k_\lambda\, x_\lambda)\, \omega_{m_\ell, S, S_3}(k)\, d\eta_\ell$$

dans les formules (12) et (14) il convient de faire la sommation sur toutes les valeurs de ℓ , de S et de S_3 ,

Cherchons à calculer l'intégrale :

(15) $$\mathcal{J} = \iiint_\sigma v_\lambda(\bar{\phi}, \Psi)\, d\sigma_\lambda = < \phi \,|\, \psi >$$

La relation $\mathrm{div}_4\, v = 0$ entraine que cette intégrale ne dépend pas de σ . Donc on peut prendre pour σ l'hyperplan $x_4 = 0$. (15) devient :

(16) $$\mathcal{J} = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{x_4=0} - i v_4\Big(\iiint_{n_\ell} \exp(-i\, k_\lambda x_\lambda)\, \bar{\omega}_{m_\ell, S, S_3}(k)\, d\eta_\ell\Big)$$
$$\iiint_{n_{\ell'}} \exp(i\, k'_\lambda\, x_\lambda)\, \zeta_{m_{\ell'}, S', S'_3}(k')\, d\eta_{\ell'}\Big)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Dans (16) le coefficient $-i$ vient de $d\sigma_4 = -\, i\, dx_1\ ,\ dx_2\ ,\ dx_3$.

On doit faire la sommation sur tous les états de masse et de spin, donc sur tous les indices ℓ et ℓ' , sur S , S_3 , S' , S'_3 .

v_4 étant une forme bilinéaire, on peut sortir les exponentielles, de même on peut sortir les signes $\iiint_{n_\ell}$ et $\iiint_{\eta_{\ell'}}$. On peut également permuter $\iiint_{x_4=0}$

avec $\iiint_{\eta_\ell}$ et $\iiint_{\eta_{\ell'}}$, en vertu des propriétés bien connues des intégrales multiples.

On obtient finalement :

$$(17)\qquad \mathfrak{J} = -(2\pi)^{-3}\, i \iiint_{\eta_\ell} \iiint_{\eta_{\ell'}} \iiint_{x_4=0} \exp[\, i(k'_\lambda - k_\lambda)x_\lambda\,]$$

$$v_4(\bar{\omega}_{m_\ell,S,S_3}(k), \zeta_{m_{\ell'},S',S'_3}(k'))dx_1\, dx_2\, dx_3\, d\eta_{\ell'}\, d\eta_{\ell'}$$

Pour calculer $\mathfrak{J}$, cherchons la valeur de $\mathfrak{J}_1$, d'expression analogue, mais où nous limitons l'hyperplan $x_4 = 0$ à l'intérieur d'une boite $-X_1 < x_1 < +X_1$; $-X_2 < x_2 < +X_2$; $-X_3 < x_3 < +X_3$ pour obtenir la valeur de $\mathfrak{J}$, nous ferons tendre ensuite X_1, X_2 et X_3 vers l'infini.

Nous obtenons :

$$(18)\qquad \mathfrak{J}_1 = -(2\pi)^{-3}\, i \iiint_{\eta_\ell} \iiint_{\eta_{\ell'}} \frac{8\sin(k'_1-k_1)X_1\, \sin(k'_2-k_2)X_2\, \sin(k'_3-k_3)X_3}{(k'_1-k_1)(k'_2-k_2)(k'_3-k_3)}$$

$$\times\, v_4(\bar{\omega}, \zeta)\, d\eta_\ell\, d\eta_{\ell'}$$

Intégrons sur $\eta_{\ell'}$, en tenant compte de :

$$d\eta_{\ell'} = i\, \frac{k_{\ell'}}{k'_4}\, dk'_1\, dk'_2\, dk'_3$$

(remarquons que $\eta_{\ell'}$ est une <u>nappe d'hyperboloïde</u>, correspondant à <u>une valeur définie</u> du pseudo-invariant $k_{\ell'}$, la nappe $\eta_{\ell''}$ correspondant à la valeur $-m_{\ell'}$ de la masse propre étant associée à la valeur $-k_{\ell'}$ du pseudo-invariant). (Ceci dans le cas d'une théorie où les masses $-m$ existent toujours, ce n'est pas nécessaire à notre démonstration).

Faisons également tendre X_1, X_2 et X_3 vers l'infini. Il vient :

$$(19)\qquad \mathfrak{J}_1 \rightarrow \mathfrak{J} = \iiint_{\eta_\ell} \frac{k_{\ell'}}{k'_4}\, v_4(\bar{\omega}_{m_\ell,S,S_3}(\vec{k},k_4), \zeta_{m_{\ell'},S',S'_3}(\vec{k},k_4))\, d\eta_\ell$$

D'après notre lemme 3, v_4 est nul si $k'_4 \neq k_4$. Les seules contributions non nulles dans l'intégrale (19) proviennent des $v_4(\bar{\omega}, \zeta)$ où $k_\lambda = k'_\lambda$, quel que soit λ. Donc la masse propre à la même valeur pour les ondes planes ω et ζ, et $\ell = \ell'$ (nous remarquons que par masse propre nous entendons la quantité m_ℓ liée au pseudo-invariant k_ℓ par $h\, k_\ell = 2\pi\, c\, m_\ell$). D'autre part notre condition 3° annule toutes les contributions provenant des $S \neq S'$ et $S_3 \neq S'_3$. Finalement nous obtenons :

(20) $$\mathfrak{J} = \iiint_{\eta_\ell} \frac{k_\ell}{k_4} v_4(\bar{\omega}_{m_\ell,S,S_3}(k_\lambda), \zeta_{m_\ell,S,S_3}(k_\lambda) d\eta_\ell$$

considérons maintenant, l'intégrale :

(21) $$J = \iiint_{\eta_\ell} v_\lambda(\bar{\omega}_{m_\ell,S,S_3}(k_\lambda), \zeta_{m_\ell,S,S_3}(k_\lambda)) d\eta_{\ell\lambda} = \langle \omega | \zeta \rangle$$

où $d\eta_{\ell\lambda}$ est le pseudo-quadrivecteur infinitésimal élément de la variété η_ℓ et où il faut sommer sur λ , ℓ , S et S_3 . Dans J , l'élément sous le signe $\iiint$ est un pseudo-invariant, donc n'est pas affecté par une rotation de Lorentz. De même l'élément sous le signe $\iiint$ de $\mathfrak{J}$ n'est pas affecté par une telle rotation. En effet v est colinéaire à k , d'après notre lemme 3. $\frac{v_4}{k_4}$ est donc un invariant ; le coefficient numérique de proportionnalité de v et k ; $d\eta_\ell$ est un invariant et k_ℓ un pseudo-invariant. L'ensemble a donc la variance de l'élément J .

Les fonctions d'onde du corpuscule définies par $\omega(k_\lambda)$ et $\zeta(k_\lambda)$ admettent le même système propre de coordonnées. En effet les valeurs de k_λ qui les définissent sont les mêmes, et la masse propre est définie à partir du même k_ℓ . Passons dans ce système propre. Nous avons alors :

$$k_4 = i\, k_\ell \qquad v_1 = v_2 = v_3 = 0 \qquad d\eta_\ell = i\, d\eta_{\ell 4} \quad .$$

Les éléments sous le signe $\iiint$ de $\mathfrak{J}$ et J se réduisent alors à leur valeur commune :

$$v_4\, d\eta_{\ell 4}$$

Ils sont donc égaux toujours, puisque invariants dans toute rotation de Lorentz. Et finalement on a :

$$\mathfrak{J} = J$$

ou :

(22) $$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \omega | \zeta \rangle = \iiint_\sigma v_\lambda(\bar{\phi}, \psi) d\sigma_\lambda =$$

$$= \iiint_{\eta_\ell} v_\lambda(\bar{\omega}_{m_\ell,S,S_3}(k), \zeta_{m_\ell,S,S_3}(k)) d\eta_{\ell\lambda}$$

(22) est l'expression covariante de l'équation de Parseval.

4.- INTÉGRALES DE FOURIER RÉCIPROQUES.

Pour inverser l'intégrale de Fourier (12) il convient de séparer le problème d'analyse ainsi posé du problème d'algèbre constitué par la détermination des solutions ondes planes de l'équation d'onde.

Nous supposerons que pour chaque valeur de m_ℓ , k , S , S_3 une certaine fonction d'onde $\zeta_{0m_\ell,S,S_3}(k)\ e(k.x)$ est définie.

Tout ζ appartenant aux mêmes nombres quantiques s'écrira :

(23) $$\zeta = \rho\zeta_0$$

ρ sera une fonction de k , m_ℓ , S , S_3 , Le choix de ζ_0 sera fixé par la suite. Dans la formule (22) ω appartenant aux mêmes nombres quantiques que ζ, on aura :

(24) $$\omega = \rho'\zeta_0$$

d'où :

(25) $$\phi = (2\pi)^{-3/2}\iiint_{\eta_\ell} \exp(i\ k_\lambda\ x_\lambda)\ \rho'_{m_\ell,S,S_3}(k)\,\zeta_{0m_\ell,S,S_3}(k)\ d\eta_\ell$$

Nous écrirons (22) avec une fonction ϕ très particulière, où n'interviendront que des k voisins d'une valeur déterminée, et où :

(26) $$\iiint_{\eta_\ell} \rho'(k)\ d\eta_\ell = 1$$

Pratiquement nous supposerons que tous les k de l'intégrale (25) sont égaux mais que l'intégrale (25) a une valeur finie ce qui revient à prendre pour $\rho'(k)$ une fonction singulière analogue à la fonction δ de Dirac. L'intégrale triple du second membre de (22) devient :

(27) $$\mathcal{J} = \iiint_{\eta_\ell} \rho'^*(k)\ \rho(k)\ v_\lambda(\bar{\zeta}_{0_{m_\ell,S,S_3}}(k), \zeta_{0_{m_\ell,S,S_3}}(k))\,d\eta_{\ell\lambda}$$

mais :

$$d\eta_{\ell\lambda} = -\frac{k_\lambda}{k_\ell}\,d\eta_\ell$$

Et d'autre part, on peut sortir du signe $\iiint$ la quantité $\rho(k)$ et tenir compte de (26), qui donne :

$$\iiint_{\eta_\ell} \rho'^*(k)d\eta_\ell = 1$$

Il vient :

(28) $$\mathcal{J} = -\frac{\rho(k)}{k_\ell}\,k_\lambda\ v_\lambda$$

$k_\lambda\ v_\lambda$ est un invariant qu'on peut évaluer dans le système propre, sa valeur est alors $k_4\ v_4$.

On choisira les fonctions ζ_0 de telle façon que $v_4(\bar{\zeta}_0, \zeta_0)$, <u>dans le système propre</u> soit égale à $i\,\varepsilon = \pm i$. Alors $k_4 = i\ k_\ell$, et on a :

(29) $$\mathcal{J} = \rho\, \varepsilon$$

Mais (26) et (25) donnent :

(30) $$\Phi = (2\,\pi)^{-3/2}\, \zeta_0 \exp(i\, k_\mu x_\mu)$$

et la substitution de (30) dans le premier membre de (22) donne :

(31) $$\mathcal{J} = (2\,\pi)^{-3/2} \iiint_\sigma \exp(-i\, k_\mu\, x_\mu)\; v_\lambda(\bar{\zeta}_0, \Psi) d\sigma_\lambda$$

d'où :

(32) $$\rho = (2\,\pi)^{-3/2} \varepsilon \iiint_\sigma \exp(-i\, k_\mu\, x_\mu)\; v_\lambda(\bar{\zeta}_0, \Psi) d\sigma_\lambda$$

Si nous posons $\xi = \exp\,(i\; k_\mu\; x_\mu)\, \zeta_0$, cela peut s'écrire :

(33) $$\rho = (2\,\pi)^{-3/2} \varepsilon < \xi | \Psi >$$

ce qui permet de déterminer :

(34) $$\zeta = (2\pi)^{-3/2}\, \varepsilon < \xi \,|\, \Psi > \zeta_0$$

5.- RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY.

On peut porter la valeur (34) de ζ dans l'équation (12) on obtient :

(35) $$\Psi(x) = (2\,\pi)^{-3} \iiint_{\eta_\ell} \exp(i\; k_\lambda\; x_\lambda)\, \varepsilon_\ell < \xi | \Psi > \; \zeta_0\, d\eta_\ell$$

(35) peut aussi s'écrire :

$$\Psi(x) = (2\,\pi)^{-3} \iiint_{\eta_\ell} \iiint_{\sigma'} \varepsilon_\ell \zeta_0 \exp(i\; k_\lambda (x_\lambda - x'_\lambda))\; v_\mu(\zeta_0, \Psi(x')) d\sigma'_\mu\, d\eta_\ell \quad .$$

Définissons les opérateurs linéaires $S_\mu(x)$, qui appliqués à une fonction d'onde Ψ donnent les résultats :

(36) $$S_\mu(x)\, \Psi \equiv (2\,\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta_\ell} \varepsilon_\ell\, \zeta_0 \exp(i\; k_\lambda\; x_\lambda)\; v_\mu(\bar{\zeta}_0, \Psi) d\eta_\ell$$

(36) et (35) permettent d'écrire :

(37) $$\Psi(x) = (2\,\pi)^{-3/2} \iiint_{\sigma'} S_\mu(x-x')\; \Psi(x') d\sigma'_\mu$$

(37) résout le problème de Cauchy relatif au système des équations d'onde et de la particule libre que nous considérons.

Les S_μ peuvent s'exprimer aisément à partir des fonctions singulières de Stueckelberg-Schwinger [11], [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROGLIE (L. de) - Théorie générale des particules à spin. Paris, 1942

[2] COSTA de BEAUREGARD (O.) - C.R. Acad. Sc. Paris, 225, 1947, p. 626 ; 232, 1951, p. 804.; 237, 1953, p. 1945 ; 238, 1954, p. 50 et 1196. Phys. Rev., 83, 1951, p. 182.
Particules fondamentales et noyaux (Colloques internationaux du C.N.R.S., 1953, p. 207-216. Journal de Physique, 15, 1954, décembre.

[3] COSTA de BEAUREGARD (O.) - Séminaire de théories physiques de L. de BROGLIE, 1954/1955, exposé n° 1.

[4] COSTA de BEAUREGARD (O.) - C.R. Acad. Sc. Paris, 239, 1954, p. 1357-1359.

[5] DYSON (F.J.) - Phys. Rev. 75, 1949, p. 486-502.

[6] FEYMAN (R.P.) - Phys. Rev. 76, 1949, p. 749-759 et 769-789.

[7] POTIER (R.) - C.R. Acad. Sc. Paris, 222, 1946, p. 636-640, p. 855-857, p. 1076-1079.

[8] POTIER (R.) - C.R. Acad. Sc. Paris, 227, 1949, p. 1146-1147 ; 228, 1949, p. 656-658.

[9] POTIER (R.) - C.R. Acad. Sc. Paris, 1951, p. 1538-1540, p. 1647-1649. p. 1736-1738.

[10] SCHWINGER - Phys. Rev. 74, 1948, p. 1439-1461 ; 75, 1949, p. 651-679.

[11] STUECKELBERG (E.C.G.) - Arch. Sci. Phys. Nat., Genève, 56, 1939, n° 1.

[12] TOMONAGA (S.I.) - Progress. Theor. Phys., 1, 1946, p. 27.