Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

Marc Feix

Enregistrements d'évènements aléatoires

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. nº 14, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1954/55
-:-:-:-

15 février 1955

Exposé n° 14

ENREGISTREMENTS D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES

par Marc FEIX.

-:-:-:-

SOMMAIRE - Ce travail de mise au point a eu son origine dans les difficultés rencontrées lors de comptages de phénomènes liés au fonctionnement d'accélérateurs pulsés (bétatron et accélérateur linéaire). Le temps de résolution des appareils impose alors d'importants ralentissements des cadences de comptage.

Nous nous proposons d'établir la relation entre le nombre moyen d'événements enregistrés lors d'un comptage et le nombre que l'on aurait obtenu s'il n'y avait eu un temps de résolution fini inhérent à l'appareillage. C'est donc le calcul du facteur de correction du système.

Nous traitons les deux cas suivants :

1.- Comptage simple d'événements aléatoires ;

2.- Comptage en coïncidence, le nombre des circuits de coïncidence étant limité à 2 .

1.- COMPTAGE SIMPLE D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES.

Durant l'intervalle de temps t (qui représente la durée de l'impulsion de l'accélérateur) le processus d'arrivée des événements est supposé Poissonien et il est caractérisé par le nombre moyen d'arrivées par unité de temps, soit a cette cadence. Le processus est alors entièrement défini par a .

Le système de comptage est défini en processus Poissonien par une fonction $\varphi(u)$ qui donne la probabilité conditionnelle qu'un événement soit enregistré au temps $x + u$, l'enregistrement précédent ayant eu lieu au temps x .

La fonction $f(u) = a\, e^{-au}$ donne la densité de répartition de l'époque de la 1^{e} arrivée, donc du 1er enregistrement, le compteur étant supposé initialement non bloqué.

Dans ces conditions l'on montre alors que $e(t)$ le nombre moyen d'enregistrements dans $[0 - t]$ satisfait à l'équation intégrale :

$$(1) \qquad e(t) = \int_0^t f(u)\,du + \int_0^t e(t-u)\,\varphi(u)\,du \quad .$$

Une telle équation se résout aisément en prenant les transformées de Laplace et en appliquant le théorème de Borel : si $f(p)$ et $\varphi(p)$ sont les transformées de $f(t)$ et $\varphi(t)$ on a alors :

$$(2) \qquad e(p) = \frac{f(p)}{p\,[1 - \varphi(p)]}$$

2 cas sont particulièrement intéressants.

a) - Le compteur est bloqué pendant un temps τ après chaque enregistrement. Les arrivées pendant le temps de blocage ne sont pas enregistrées, mais ne déclenchent pas de nouveaux blocages. Dans ce cas $\varphi(u) = f(u - \tau)\,\Upsilon(u - \tau)$ [Υ est la fonction unité d'Heaviside] et en tenant compte de $f(u) = a\,e^{-au}$, il vient :

$$(3) \qquad e(t) = \sum_{h=0}^{P.E\ t/\tau} \psi_h\ a(t - h\tau)$$

que l'on peut encore écrire en posant $at = m$ (nombre moyen d'arrivées dans $0-t$) et $\xi = \frac{\tau}{t}$ (caractérise le pouvoir de résolution du système relativement à la durée de l'impulsion)

$$(4) \qquad e(m\,,\xi) = \sum_{h=0}^{P.E\ 1/\xi} \psi_h\ m(1 - h\xi)$$

P.E(x) pour partie entière de x est l'entier immédiatement inférieur à x

$$(5) \qquad \psi_h(x) = \frac{(h,x)!}{h!} \qquad \text{avec} \qquad (h,x)! = \int_0^x e^{-t}\,t^h\,dt$$

b) - Comme tout à l'heure le compteur est bloqué pendant le temps τ après chaque enregistrement, mais les arrivées non enregistrées déclenchent cependant de nouveaux blocages.

On montre alors que si $v = u - \tau$ et si $\psi(v)$ est la loi de répartition du premier enregistrement après l'enregistrement ayant eu lieu au temps $v = -\tau$, $\psi(v)$ satisfait à :

$$(6) \qquad \psi(v) = a\,e^{-a\tau}\,\left(1 - \int_0^{v-\tau} \psi(v)\,dv\right)$$

ce qui donne pour

$$(7) \qquad \Psi(p) = e^{-p\tau}\psi(p) = \frac{a\,e^{-(a+p)\tau}}{p+ae^{-(a+p)\tau}}$$

et pour $e(t)$

$$(8) \qquad \begin{cases} e(t) = 1 - e^{-at} & \text{si } \tau > t \\ e(t) = at\,e^{-a\tau} + 1 - e^{-a\tau}(a\tau + 1) & \text{si } \tau < t \end{cases}$$

en introduisant les variables réduites m et ξ

$$(9) \qquad \begin{cases} e(m,\xi) = 1 - e^{-m} & \text{si } \xi > 1 \\ e(m,\xi) = m\,e^{-m\xi} + 1 - e^{-m\xi}(m\xi + 1) & \text{si } \xi < 1 \end{cases}$$

L'allure des courbes est donnée par les 2 figures (1) et (2)

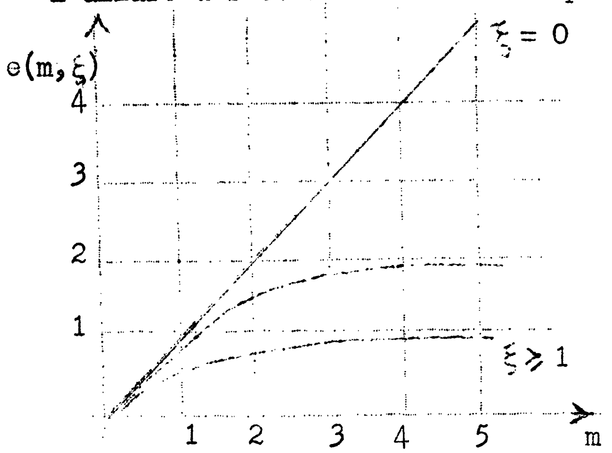

Fig (1) - Cas a .

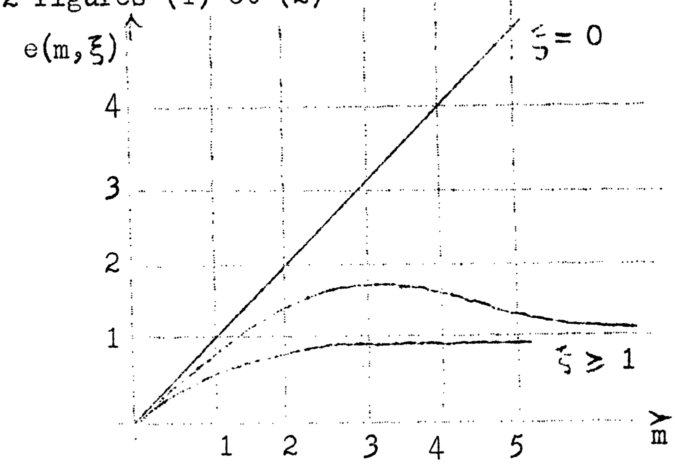

Fig (2) - Cas b .

Au voisinage de l'origine et pour ξ donné, les 2 courbes ont la même tangente et le même rayon de courbure, le "rendement" $r = \frac{e(m)}{m}$ est voisin de 1 et s'écrit

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi < 1 & e(m) = 1 - \frac{m}{2}(2\xi - \xi^2) \\ \xi > 1 & e(m) = 1 - \frac{m}{2} \end{cases}$$

Si l'on pose $p = 1 - r$ (p perte relative) et que l'on veuille la limiter à une petite valeur la cadence maximum de comptage autorisée est alors

$$(11) \qquad C = \frac{2pf}{2\xi - \xi^2}$$

f étant la fréquence de récurrence de l'impulsion de l'accélérateur.

Pour ξ petit, pour une même perte p et avec un même temps de résolution τ on voit que la cadence maximum autorisée en régime pulsé est égale à la cadence autorisée en régime continu multiplié par $\theta = f\tau$, θ est appelé fraction de temps utile de l'accélérateur.

2.- COMPTAGE EN COÏNCIDENCE.

Dans ce cas, des événements arrivent sur 2 voies différentes. Certains sont simultanés et déclenchent un enregistrement. Ce sont ceux-la qui nous intéressent. Malheureusement chaque événement arrivant sur la voie (1) ouvre pendant un temps τ à compter de l'instant de son arrivée une porte sur le canal n° (2) permettant à tout événement arrivant alors sur cette voie de donner lieu à un faux enregistrement et réciproquement. D'où un certain nombre de fausses coïncidences.

Un premier problème est l'étude du bruit de fond en l'absence de vraies coïncidences. Si m impulsions arrivent sur la voie (1) et n sur la voie (2) pendant l'intervalle de temps $[0 - t]$ quel est le nombre moyen de fausses coïncidences enregistrées. On montre que

$$(12) \qquad C = n\left[1 - \frac{e(m, \xi)}{m}\right] + m\left[1 - \frac{e(n, \xi)}{n}\right]$$

$e(x, \xi)$ est le nombre moyen d'enregistrements dans le cas b) du comptage simple (les arrivées non enregistrées déclenchent de nouveaux blocages). Rappelons que

$$\frac{\tau}{t} = \xi < 1 \qquad\qquad e(x, \xi) = x\, e^{-x\xi} + 1 - e^{-x\xi}\,(x\xi + 1)$$

Pour $m\xi$ et $n\xi$ petits,

$$C \sim 2mn\xi$$

Dans le cas où sur la voie (1) arrivent en moyenne m impulsions dont αm en vraies coïncidences et sur la voie (2) n impulsions dont βn en vraies coïncidences (avec évidemment $\alpha m = \beta n$) le nombre B de fausses coïncidences s'écrit : (nous notons B à cause de l'analogie avec un bruit de fond)

$$(13) \qquad B = n(1 - \beta)\left[1 - \frac{e(m, \xi)}{m}\right] + m(1 - \alpha)\left[1 - \frac{e(n, \xi)}{n}\right]$$

le nombre de vraies coïncidences (le signal) étant :

$$(14) \qquad S = \alpha m = \beta n = \sqrt{\alpha\beta}\ \sqrt{mn}$$

de (13) et (14) l'on peut déduire la cadence maximum de manière à avoir un rapport S/B supérieur à une limite fixée.

Dans le cas (souvent réalisé dans les montages) où ξ, $m\xi$ et $n\xi$ sont beaucoup plus petits que 1 la cadence maximum autorisée de comptage en coïncidence s'écrit :

$$(15) \qquad C = \frac{1}{2\tau}\ \frac{\alpha\beta}{1 - \frac{\alpha+\beta}{2}}\ \frac{\theta}{S/B}$$

$\Theta = ft$ comme précédemment.

Avec les valeurs usuellement réalisées sur les appareils la cadence autorisée peut devenir très faible dans le cas du montage en coïncidence de l'ordre de 1 coup/mn .

Sous l'aspect du bruit de fond dû au temps de résolution fini des appareils lié au caractère aléatoire des événements à enrégistrer le fonctionnement en régime pulsé est donc très désavantageux par rapport au fonctionnement en régime continu : approximativement dans le rapport Θ . Par contre pour d'autres bruits de fond (le bruit de fond cosmique par exemple) le fonctionnement en régime pulsé est très avantageux toujours dans le rapport Θ placé cette fois au bon endroit.

Je remercie vivement Monsieur Louis de Broglie d'avoir bien voulu s'intéresser à ce problème très particulier de technique de mesure.

BIBLIOGRAPHIE

CLARK, C.E. - Rev. of scient. Instrument, 20, 1949, p. 51-52
FEATHER, N. - Proc. Cambridge phil. Soc., 45, 1949, p. 648-659
FELLER, W. - A Volume for Anniversary of Courant, 1948
FORTET, R. - Calcul des probabilités, Paris, C.N.R.S.
HOLE, Njål - Ark. Mat. Astr. Fys., 33A - 34B, n° 20, 1948, p. 8
TAKACS, Lajos - Acta Math. Acad. Sc. Hungar., 2, 1953, p. 275-298
WESTCOTT, C.H. - Proc. royal Soc. of London, 194 A , 1948, p. 508-526.