A. Crumeyrolle

Revêtements « spinoriels » du groupe symplectique et indices de Maslov

Séminaire Jean Leray, nº 3 (1974-1975), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A6_0>

REVÊTEMENTS "SPINORIELS" DU GROUPE SYMPLECTIQUE

ET INDICES DE MASLOV

par A. CRUMEYROLLE

1°) Définition algébrique des indices de Maslov .

Les résultats antérieurs sont admis et nous conservons les mêmes notations.

Proposition 1 : Une base symplectique $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta^*})$ adaptée à la somme directe $E' = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ étant choisie, $\gamma \in Sp_2(r)$ se factorise de manière unique en :

(11) $\gamma = \sigma.\tau_2.\tau_1$, $p(\sigma) \in U(r,\mathbb{C})$, $\tau_i \in \exp \overset{2}{V} \mathcal{E}_i$, $i = 1,2$,

On a : $\sigma = \exp\left(-\frac{i\Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{2}\right) \exp a^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*}$, $a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}$.

Posant $\mathrm{Ind}\, \gamma = \exp\left(i\Sigma a^{\alpha\alpha^*}\right)$, alors $\mathrm{Ind}\, \gamma = \det p(\sigma) \in S^1$ et ne dépend que de la donnée de γ dans $Sp_2(r)$.

Cette factorisation peut se voir comme un cas particulier d'un théorème de Cartan sur les sous-groupes compacts maximaux; on peut l'établir en détails en remarquant :

- que le sous-groupe G'_i des éléments de $M'_p(r)$ qui conservent $\mathcal{E}_i$ point par point est engendré par les exp u, $u \in \mathbb{C} \oplus \overset{2}{V} \mathcal{E}_i$
- que $GL(r,\mathbb{C}) \oplus G'_i$ est une sous-algèbre de Lie de $M'_p(r)$ et G'_i est un idéal de cette sous-algèbre.
- que l'on peut en raison de la connexité de $Sp_2(r)$ raisonner sur un voisinage de l'identité et appliquer aux éléments $\prod_i (\exp u_i)$, $u_i \in \overset{2}{V} \mathcal{E}_i$, la formule de Campbell-Hausdorff.
- que le calcul de det $p(\sigma)$ se fait à l'aide de $[\bar{a}^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*} ; \varepsilon_\gamma]$

Remarque : La factorisation de Cartan n'étant pas un produit direct, en général $\mathrm{Ind}\,(\gamma\gamma') \neq \mathrm{Ind}\,\gamma . \mathrm{Ind}\,\gamma'$. Toutefois on a égalité si dans le calcul de la factorisation de $\gamma\gamma'$ n'apparaît aucune permutation sur des couples tels que $\tau_1\tau_2$.

Proposition . (Arnol'd [1]).

U(r,C) opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces lagrangiens avec stabilisateur O(r,$\mathbb{R}$).

On sait que l'on appelle lagrangien tout sous-espace (réel ici) totalement isotrope maximal pour F.

L et L' sont des lagrangiens transverses si $E = L \oplus L'$. A quelle condition le transformé de L par $\gamma \in Sp_2(r)$ est-il transverse ? Il est possible de se ramener à $L = E_1$, $L' = E_2$ introduits plus haut. $\gamma_0 = \nu^{-1} \circ \gamma \circ \nu$, avec $p(\gamma_0) \in U(r,\mathbb{C})$ est tel que $p(\gamma_0) e_\alpha = t_\alpha \cdot e_{\alpha^*}$ et $p(\gamma_0) e_{\alpha^*} = - t_\alpha e_\alpha$, $t_\alpha = \pm 1$, en choisissant convenablement (e_α, e_{β^*}) base symplectique adaptée à $E = E_1 \oplus E_2$. D'après la proposition 10, $\exp\left(\sum_\alpha - \frac{\pi}{2} t_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*}\right)$ donne γ_0 par projection.

Mais si $\gamma'_0 \in Sp_2(r)$ envoie E_1 sur E_2, $\gamma'_0 = \nu_2 \circ \gamma_0$, ν_2 conservant E_2, on peut se ramener, modulo un changement de repère symplectique, à ν_2 conservant E_2 point par point, la remarque qui suit la proposition 1 assure que $\operatorname{Ind} \gamma_0 = \operatorname{Ind} \gamma'_0$ puis la proposition 1 assure que $\operatorname{Ind} \gamma = \operatorname{Ind} \gamma_0$. Ainsi :

Proposition 3 : Si $\gamma \in Sp_2(r)$ envoie le lagrangien L sur le lagrangien L' transverse : (I) Il existe r nombres $t_\alpha = \pm 1$, tels que

$$\operatorname{Ind} \gamma = \exp\left(- \frac{\pi i}{2} \sum t_\alpha\right) \in \mathbb{Z}_4. \quad (12)$$

(II) Il existe $\gamma' \in Sp_2(r)$, avec $p(\gamma') \in U(r,\mathbb{C})$, tel que si $(e_\alpha\ e_{\beta^*})$ est une base symplectique adaptée à la décomposition $E = L \oplus L'$; $\gamma'(e_\alpha) = t_\alpha e_{\alpha^*}$, $\gamma'(e_{\alpha^*}) = -t_\alpha e_\alpha$, et $\operatorname{Ind} \gamma = \operatorname{Ind} \gamma'$.

Définition : Nous appellerons $m_2(\gamma) = \frac{r}{2} - \frac{1}{i\pi} \log (\operatorname{Ind} \gamma)$, (mod 4), (13)

indice de Maslov de $\gamma \in Sp_2(r)$, transformant le lagrangien L en le lagrangien transverse L'.

Nous nous proposons de relier cette définition à celle de J. Leray (2).

Soient encore L et L', (e_α, e_{β^*}) une base symplectique adaptée à la somme directe $L \oplus L' = E$. Si L'' est un autre lagrangien, $L'' \neq L$, il existe $\gamma \in Sp_2(r)$ qui conserve L' point par point et envoie L sur L'', on a :

$$p(\gamma)(e_\alpha) = a_\alpha^{\beta^*} e_{\beta^*} + e_\alpha \text{ avec } a_\beta^{\alpha^*} = a_\alpha^{\beta^*} \qquad (14)$$

Pour que L et L'' soient transverses il faut et il suffit que la matrice $||a_\beta^{\alpha^*}||$ soit régulière.

Selon J. Leray [2] introduisons $z \in L$, $z' \in L'$, $z'' \in L''$ avec $z+z'+z'' = 0$, L, L', L'' deux à deux transverses.

$z \to z'$ est un isomorphisme de L sur L', $F(z,z') = F(z,p(\gamma)z) = F(z',z'') = F(z'',z)$; $p(\gamma)$ - Id considérée comme application de L dans L' est inversible, sa matrice est $||a_\beta^{\alpha^*}|| = u$.

L et L' s'identifient à des espaces duaux, (e_{β^*}) base duale de (e_α). Il est possible de réduire dans le groupe spécial orthogonal la matrice de $||a_\beta^{\alpha^*}||$ à une forme de Sylvester, soient (e'_α) dans L et e'_{α^*} dans L' les nouvelles bases duales, alors $(p\gamma)(e'_\alpha) = t'_\alpha e'_{\alpha^*} + e'_\alpha$, $t'_\alpha = \pm 1$, $E'_{\alpha^{**}} = t'_\alpha e'_\alpha + e_{\alpha'^*}$ est une base de L'', $F(e_{\alpha'}, E'_{\beta^{**}}) = \delta_{\alpha\beta}$. L'indice d'inertie de la forme quadratique $z \to F(z,\rho(z))$, noté Inert(L,L',L'') est $\frac{r - \mathrm{Tr}u}{2}$, $\rho = p(\gamma)$

γ ayant le même sens que dans la proposition 3 posons :

$$M_\gamma(L,L') = \exp\left(-\frac{i\pi r}{2}\right) . \exp\left(\frac{\pi i}{2} \Sigma\, t_\alpha\right) \qquad (15)$$

Envoyons L sur L' par γ_2 avec : $\gamma_2(e_\alpha) = e_{\alpha^*}$, $\gamma_2(e_{\alpha^*}) = -e_\alpha$ puis L' sur L'' par γ_0 avec : $\gamma_0(e_{\alpha^*}) = e_{\alpha^{**}} = \gamma(e_\alpha)$, $\gamma_0(e_{\alpha^{**}}) = -e_{\alpha^*}$, enfin L'' sur L par γ_1 avec $\gamma_1(E'_{\alpha^{**}}) = -t'_\alpha e'_\alpha$, $\gamma_1(e'_\alpha) = t'_\alpha E'_{\alpha^{**}}$.

$$P = M_{\gamma_0}(L',L'') \cdot M_{\gamma_1}(L'',L) . M_{\gamma_2}^{-1}(L',L) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}(r-\mathrm{Tr}u)\right) \qquad (16)$$

$$(i\pi)^{-1} \log P = \frac{r - \mathrm{Tr}u}{2} + 2k , \quad k \in \mathbb{Z} , \qquad (17)$$

$\therefore$ Inert(L,L',L'') = $(i\pi)^{-1} \log P$, (mod 2).

Ceci montre que $m_2(\gamma)$ est l'indice de Maslov, (mod 4), de $\gamma \in Sp_2(r)$ tel qu'il est défini dans [2].

Toujours selon J. Leray, $Sp_2(r)$ opère transitivement et effectivement sur le revêtement $\Lambda_4(r)$ de la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(r)$; on peut donc définir pour $\lambda_4, \lambda_4' \in \Lambda_4(r)$ et $\gamma \in Sp_2(r)$:

$m_2(\lambda_4,\lambda_4') = m_2(\lambda_4,\gamma(\lambda_4)) = m_2(\gamma) \in \mathbb{Z}_4$, sous la condition que λ_4 et λ_4' se projettent sur L et L' transverses et $\gamma(L) = L'$.

En imposant aux lagrangiens la condition d'être orientés $m_2(\gamma)$ prend ses valeurs dans un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, d'où la définition de

$$m_2(\lambda_2,\lambda_2') \in \mathbb{Z}_2 .$$

<u>Indices de Maslov d'ordre quelconque</u> :

On utilisera $\gamma \in Sp_q(r)$, alors $\operatorname{Ind}\gamma = \exp\left(-\frac{\pi i}{q}\Sigma\, t_\alpha\right) \in \mathbb{Z}_{2q}$,

P étant défini comme dans (16) :

$$(2i\pi)^{-1} q \log P = \frac{r - \operatorname{Tr} u}{2} + kq \quad , k \in \mathbb{Z} , \qquad \operatorname{Inert}(L,L',L'') = (2i\pi)^{-1} q \log P \pmod q \tag{18}$$

et l'indice de Maslov, mod 2q, de $\gamma \in Sp_q(r)$ est :

$$m_q(\gamma) = -\frac{r}{2} - \frac{q}{2i\pi} \log(\operatorname{Ind}\gamma) \ , \quad \text{mod } 2q \ , \tag{19}$$

On passe ensuite comme ci-dessus à la grassmannienne lagrangienne d'ordre 2q puis q.

Pour le cas où γ appartient au revêtement universel $Sp_\infty(r)$, l'indice de Maslov sera :

$$m_\infty(\gamma) = -\frac{r}{2} + \frac{\Sigma t_\alpha}{2} \in \mathbb{Z} \quad , \tag{20}$$

il donne $m_q(\gamma)$ par réduction mod 2q.

2) <u>Définition cohomologique des indices de Maslov .</u>

V est une variété différentielle réelle de dimension 2r, à structure presque symplectique; une sous-variété $\mathcal{L}$ de dimension r de V, telle que $L_x = T_x(V)$ soit pour tout x un sous-espace lagrangien est dite sous-variété lagrangienne.

Considérons un recouvrement de $\mathcal{L}$ par des ouverts connexes (U_α), et au dessus de chaque U_α, un sous-fibré lagrangien L_α tel que :

$$T_x(V) = L_x \oplus L_\alpha(x) \quad , \quad \forall x \in U_\alpha \, , \qquad (A)$$

Au-dessus de chaque U_α il est loisible de choisir (passer au besoin à un recouvrement plus fin) de manière différentiable λ_x, $\lambda_\alpha(x) \in \Lambda_{2q}(T_x(V))$ se projetant respectivement sur L_x et $L_\alpha(x)$.

Soit χ_α : $x \to m_q(\lambda(x),\lambda_\alpha(r)) \in \mathbb{Z}_{2q}$, application constante de U_α dans $\mathbb{Z}_{2q}$. Le système des (U_α, χ_α) définit un cocycle au dessus de $\mathcal{L}$ de fibre type $\mathbb{Z}_{2q}$.

Mais de (18) on déduit que :

$\mathrm{Inert}(L_\alpha, L_\beta, L)_x = m_q(\lambda_\beta,\lambda)_x - m_q(\lambda_\alpha,\lambda)_x + m_q(\lambda_\alpha,\lambda_\beta)_x$ de sorte que pour 2 systèmes (U_α,χ_α) , (U'_α,χ'_α) , tels que $L_\alpha(x) = L'_\alpha(x)$, pour tout α, les deux cocycles obtenus au-dessus de $\mathcal{L}$ sont cohomologues.

A la situation (A) on peut donc associer univoquement un cocycle $\hat{\alpha} \in H^1(\mathcal{L}, \mathbb{Z}_{2q})$.

Définition : Soit (C) une courbe fermée orientée de $\mathcal{L}$, image continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous appelons indice de Maslov généralisé d'ordre 2q de (C) pour le cocycle $\hat{\alpha}$ la valeur prise par le cocycle $\hat{\alpha}$ sur le cycle que définit (C).

Cette valeur est indépendante du système des (U_α) représentant $\hat{\alpha}$, elle est invariante par homologie et par homotopie sur (C).

On définit un indice d'ordre q en considérant des lagrangiens orientés et de manière analogue un indice à valeurs dans $\mathbb{Z}$, en partant de m_∞.

Si on prend $V = \mathbb{R}^{2r}$, on peut écrire : $\mathbb{R}^{2r} = E_1 \oplus E_2$.

Comme plus haut, en général on a :

$T_x(V) = L_x \oplus E_2^x$, E_2^x translaté de E_2.

Il existe une transformation symplectique ρ_x telle que les

$\rho_x(e_\alpha) = a_\alpha^{\beta^*}(x)\, e_{\beta^*} + e_\alpha$, (21) constituent une base naturelle

de L_x, car en général L_x et E_2^x sont transverses. Il n'existe pas sur $\mathcal{L}$ d'autres points "singuliers" que ceux pour lesquels L_x et E_2^x sont non transverses. Comme $a_\alpha^{\beta^*}(x) = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha^*}}$ et $\dfrac{\partial x^{\beta^*}}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial x^{\alpha^*}}{\partial x^\beta}$, on pourra déterminer localement une fonction S

telle que : $x^{\beta^*} = \partial_\beta\, S(x^\alpha)$, $a_\alpha^{\beta^*}(x) = \partial_{\beta\alpha}\, S(x^\alpha)$. (22)

Les points singuliers correspondront au "contour apparent" Σ de $\mathcal{L}$ relativement à E_1 et seront définis par : $J(x) = \det\left\|\dfrac{\partial x^{\beta^*}}{\partial x^\alpha}\right\| = 0$. On pourra construire un cocycle au-dessus de $\mathcal{L} - \Sigma$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}_q$) .

C'est l'indice à valeurs dans $\mathbb{Z}$ d'une courbe (C) de $\mathcal{L}$, sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2r}$, calculé pour ce cocycle, que définit Maslov [1].
(22) montre pourquoi l'indice de Morse est un cas particulier de l'indice de Maslov.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOL' D Une classe caractéristique intervant dans les cond. de quantification (dans le livre de Maslov - Dunod . Paris 1972) .

[2] LERAY J. a) Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Colloque de Nice 1970

b) Sol. asympt. et phys. math. Colloque d'Aix 1974.