Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Hélène Airault

Problèmes de Dirichlet-Neumann étalés et fonctionnelles multiplicatives associées

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1974-1975), exp. n° 3, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A3_0>

PROBLÈMES DE DIRICHLET - NEUMANN ÉTALÉS ET FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES ASSOCIÉES.

par Hélène AIRAULT

Dans [1,2], on a résolu un problème de Dirichlet-Neumann mélangé pour des fonctions définies sur R^n et à valeurs vectorielles. On a montré [2] comment ce problème apparaissait de façon naturelle si on cherche à résoudre de manière probabiliste certains problèmes de Neumann-Spencer. Ici, on étudie de façon plus précise la forme multiplicative des fonctionnelles $\mathcal{R}(s)$ associées aux différentes conditions frontières, ainsi que les semi-groupes correspondants.

TABLE DES MATIÈRES

I - LES PROBLÈMES DE NEUMANN - SPENCER.

II - FIBRÉ DES REPÈRES ORTHONORMÉS TRADUCTION DES CONDITIONS FRONTIÈRES ET ÉNONCÉ DES PROBLÈMES.

III - PROCESSUS RÉFLÉCHIS SUR M ET SUR O(M)

1) La symétrie par rapport au bord, applications induites.
2) Le processus réfléchi sur la variété M.
3) Les semi-groupes de Spencer opérant sur les formes.
4) Les semi-groupes réfléchis sur O(M).

IV - LE TEMPS LOCAL.

V - CAS PLAT - SOLUTION DU PROBLÈME DE SPENCER - LE SEMI-GROUPE ASSOCIÉ - THÉORÈME D'ANNULATION - LA FONCTIONNELLE $\mathcal{R}(s)$.

1) Solution du problème (1) et théorème d'annulation.
2) Le semi-groupe associé.
3) La forme multiplicative de $\mathcal{R}(s)$.

- Obtention à partir du sytème intégral (T')
- Détermination à partir de $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{R}_\varepsilon(s)$ dans les cas particuliers du $\frac{1}{2}$ - plan et d'un polygône.

I . - LES PROBLEMES DE SPENCER - NEUMANN.

Ces problèmes sont étudiés dans [4,16] et une introduction à notre étude est faite dans [2]. M désigne une sous-variété à bord et finie d'une variété riémannienne et n_x est la normale au bord au point x.

On note $T_x(M)$ l'espace tangent en x à la variété M et $T_x^*(M)$ l'espace vectoriel dual de $T_x(M)$. Soit θ une forme différentielle définie dans un voisinage du bord (prenons par exemple une forme de degré 1).

Dans un système de coordonnées locales, θ s'exprime sous la forme

$$\theta = \theta_1 dx_1 + .. + \theta_n dx_n$$

où $(dx_1(x),..,dx_n(x))$ est une base de $T_x^*(M)$

On peut supposer que $dx_n(x)$ est la différentielle qui correspond à la normale n_x sous l'isomorphisme canonique $T_x^*(M) \simeq T_x(M)$ défini par la métrique riemanienne. La composante normale de θ est alors au point x, $\theta_n dx_n$ et la composante normale de $d\theta$ est

$$(d\theta)_n = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_n} - \frac{\partial\theta_n}{\partial x_1}\right) dx_n \wedge dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial\theta_n}{\partial x_{n-1}}\right) dx_n \wedge dx_{n-1}$$

Un des problèmes de Spencer-Conner [4,16] consiste à déterminer une forme differentielle π harmonique dans M (c'est à dire telle que $\Box\pi = 0$, où $\Box = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de De Rham-Hodge) et telle que $$\begin{cases} \pi_n = \theta_n \\ (d\pi)_n = (d\theta)_n \end{cases}$$ au bord de M.

Ces problèmes ont été résolus par des techniques L^2. On étudiera ces problèmes dans le fibré des repères orthonormés de la variété M.

II. - FIBRE DES REPÈRES ORTHONORMÉS - TRADUCTION DES CONDITIONS FRONTIÈRES ET ENONCÉ DES PROBLÈMES - [2,12]

Un repère au dessus du point $x \in M$ est un isomorphisme d'espace vectoriel euclidien de $E = \mathbb{R}^n$ sur $T_x(M)$.

L'ensemble des repères orthonormés au dessus des points de la variété M noté $O(M)$ est un fibré au dessus de M sur lequel agit le groupe orthogonal $O(n)$ par l'opération suivante.

$$(g,r) \to g.r = r \circ g \quad \text{de} \quad O(n) \times O(M) \quad \text{dans} \quad O(M).$$

Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base orthonormale de $E = \mathbb{R}^n$. A une forme π de degré p sur M correspond la valeur de la forme π lue dans le repère r.

$$f_\pi(r) = \pi_{p(r)}(r(e_{i_1}) \wedge .. \wedge r(e_{i_p})) \quad (1 \leq i_1 < .. < i_p \leq n)$$

f_π est une application de $O(M)$ dans $\overset{p}{\wedge} E$.

DEFINITION 1.II [12]

<u>Une application f définie sur $O(M)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est équivariante si $\forall g \in O(n)$, on a</u> $f(g.r) = g(f(r))$

THEOREME 1.II [12]

<u>Les applications de $O(M)$ dans $E = \mathbb{R}^n$ qui correspondent à des formes différentielles de degré 1, sont les fonctions de $O(M)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont équivariantes.</u>

Ces résultats se généralisent immédiatement aux formes de degré p.

A l'opérateur de De Rham - Hodge $\square$ est associé un opérateur elliptique dégénéré Λ sur $O(M)$. [12] $\square\pi = 0$ si et seulement si $\Lambda f_\pi(r) = f_\theta(r)$.

On note $F_{p,r}$ le sous espace de $\overset{p}{\wedge}E$ engendré par les vecteurs

$$r^{-1}(n_x) \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_{p-1}} \qquad (i_1 < .. < i_{p-1})$$

Pour un repère r au dessus du point x, on désigne par $P(r)$ la projection orthogonale dans $\overset{p}{\wedge}E$ sur le sous-espace $F_{p,r}$, et on note $Q(r) = I - P(r)$.
$df_\pi(r)$ (rel n) désigne la dérivée de l'application f_π suivant le relèvement horizontal du vecteur $\vec{n}$.
Pour une forme différentielle π, les conditions frontières ($\pi_n = 0$ et $(d\pi)_n = 0$) se traduisent [2] sur la fonction f_π par les conditions
[$P(r)\, f_\pi(r) = 0$ et $Q(r)\, df_\pi(r)$ (rel n) $= 0$ pour les repères r au dessus des points du bord de M].
On notera $bO(M)$ l'ensemble des repères r au dessus des points du bord de M.
Le problème de Spencer mentionné au § I, se ramène donc au problème (F_q) suivant sur les fibré des repères. Etant donné une fonction $\varphi(r)$ définie sur $bO(M)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, déterminer une fonction f définie sur $O(M)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telle que

a) $\Lambda f(r) = 0$ pour tout repère r au dessus des points à l'intérieur de M.
b) $P(r)f(r) - Q(r)df(r)$ (rel n) $= \varphi(r)$ pour les repères r au dessus de bM.
Trouver une représentation intégrale pour les solutions lorsqu'elles existent .
$Q(r)$ est dégénérée ; $P(r)$ et $Q(r)$ sont deux projecteurs orthogonaux tels que $I = P(r) + Q(r)$.

<u>Dans le cas du problème concernant les formes de degré 1</u>, P et Q vérifient
$P(rog) = g^{-1} o P(r) og$ et $g^{-1} o\, Q(r) og = Q(rog)$ pour tout $g \in O(n)$
En effet, si $P(r)$ est la projection sur $r^{-1}(n_x)$, on a

$$P(rog) = \text{proj. sur } g^{-1}(r^{-1}(n_x)) = g^{-1} o \text{ proj. sur } r^{-1}(n_x) og$$

On cherche les solutions du problème (F_q) qui sont équivariantes.

III. - PROCESSUS RÉFLÉCHIS SUR M ET SUR $O(M)$

1 - La symétrie par rapport au bord - applications induites

On note V la variété doublée de M [14,15,16] et ν la "symétrie" par rapport au bord ; on suppose que $\nu \circ \nu$ est l'application identique.

LEMME 1.III

Soit f une fonction définie sur V, et différentiable

a) si $f(x) = f(\nu x)$ alors $\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0$ au bord.

b) si $f(x) = - f(\nu x)$ alors $f(x) = 0$ au bord.

La démonstration est immédiate ; pour a), on remarque que

$$df(\nu x)\,(\vec{n}) = df(x)\,.\,d\nu\,(x)\,(\vec{n}) = - df(x)\,(\vec{n})$$

Dans les notations qui suivent, on considérera généralement des formes de degré 1 ; les formules s'étendant facilement au cas des formes de degré p.

La symétrie ν induit une application $\hat{\nu} : \beta \to \hat{\beta}$ définie sur les formes de degré 1 par

$$(1) \qquad <\hat{\beta}(x), h> = <\beta(\nu x), d\nu(x)\,.\,h>$$

[β étant la forme différentielle et h un vecteur de $T_x(V)$]

A l'application $\hat{\nu}$ définie sur les formes, correspond l'application ν^* qui agit sur les fonctions de la manière suivante

$$(2) \qquad (\nu^* f)\,(r) = f(d\nu(p(r)) \circ r) = f(\nu r)$$

où on pose $\qquad \nu(r) = d\nu(p(r)) \circ r$

LEMME 2.III

Si une forme β sur V vérifie $\hat{\beta} = \beta$; on a $\beta n = 0$ et $(d\beta)_n = 0$ au bord de M.

Démonstration :

Si $x \in bM$, on a $\nu x = x$ et d'après (1), on a

$$<\hat{\beta}(x), n_x> = <\beta(x), d\nu(x) n_x> = - <\beta(x), n_x>$$

donc $\beta = \hat{\beta}$ entraîne $\beta_n = 0$

Soit $\beta = \beta_1 dx_1 + \,..\, + \beta_n dx_n$ une décomposition de β dans une carte au voisinage du bord telle que dx_n corresponde à la normale au bord

$$(d\beta)_n = \left(\frac{\partial\beta_1}{\partial x_n} - \frac{\partial\beta_n}{\partial x_1}\right) dx_n \wedge dx_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial\beta_n}{\partial x_{n-1}}\right) dx_n \wedge dx_{n-1}$$

La relation $\beta = \hat{\beta}$ entraîne $\beta_i(x) = \hat{\beta}_i(\nu x)$, donc $\frac{\partial\beta_i}{\partial x_n} = 0$ pour $i = 1, \ldots, r-1$

Comme $\beta_n = 0$ au bord, on a $\frac{\partial\beta_n}{\partial x_i} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, donc $d\beta_n = 0$ au bord

LEMME 3.III

Si une forme β sur V vérifie $\hat{\beta} = -\beta$, on a $\beta_t = 0$ et $(\delta\beta)_t = 0$ au bord de M

Démonstration : - Pour l'opération $*$, voir [19]

$$\text{Si } \hat{\beta} = -\beta \text{ alors } \widehat{*\beta} = *\beta$$

En effet

$$< \widehat{*\beta}(x), h> = < (*\beta)(\nu x), \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x).h>$$

$$= \epsilon < \beta(\nu x), * \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x).h >$$

où $\epsilon = \pm 1$; or $* \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x).h = -d\nu(x)(*h)$

donc $< \beta(\nu x), * \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x)h > = - < \beta(\nu x), d\nu(x)(*h) >$

$= < \beta(x), *h >$ car $\hat{\beta} = -\beta$

or $< \beta(x), *h > = \epsilon < *\beta(x), h >$

donc $\widehat{*\beta} = *\beta$

On utilise alors les résultats du lemme 2.

LEMME 2 bis - III

Soit f une fonction définie sur le fibré des repères $O(V)$ qui est équivariante et à valeurs dans $\overset{p}{\wedge} E$

Si f vérifie $\nu^* f = f$, on a $f(r)$ est orthogonal à $F_{p,r}$ et $df(r)(rel\, n)$ appartient à $F_{p,r}$ pour les repères r au dessus du bord de M ;

C'est a dire, on a $P(r)f(r) - Q(r)df(r)(rel\, n) = 0$.

Démonstration : (cas d'une 1 - forme)

Au bord $\nu(r) = g.r$ où g est la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base} \quad (r^{-1}(n_x) , e_{i_1} ,\dots, e_{i_{n-1}})$$

Avec l'équivariance, on a $f(\nu r) = g.f(r)$

et $g.f(r) = f(r)$ entraîne $f(r)$ est orthogonal au sous-espace $F_{1,r}$ engendré par $r^{-1}(n_x)$

$$\text{alors} \quad d(\nu^* f)(r) = df(\nu r)\, d\nu(r)$$

$$\text{comme} \quad d\nu(r)(\mathrm{rel}\, n_x) = -\mathrm{rel}\, n_x , \quad \text{on a}$$

$$-df(\nu r)(\mathrm{rel}\, n_x) = df(r)(\mathrm{rel}\, n_x)$$

$$\text{donc} \quad (I + g)\, df(r)\, (\mathrm{rel}\, n_x) = 0$$

$$\text{et} \quad df(r)(\mathrm{rel}\, n_x) \in F_{1,r}$$

2 - Le processus réfléchi sur la variété M

Le processus X_s^+ sur la variété M est construit en doublant la variété M [14,15], puis en prenant le processus X_s de diffusion sur "la variété doublée" et en faisant une réflection de X_s sur le bord, quand X_s touche le bord.

Le semi-groupe du processus réfléchi X_s^+ s'obtient de la façon suivante : Etant donné une fonction f, continue sur M, on prolonge sur V en posant $f(\nu x) = f(x)$ si $x \in M$;

On désigne par f_1 le prolongement de f et on définit le semi-groupe sur V par

$$P_t^+ f_1(x_o) = \tfrac{1}{2} [\, P_t f_1(x_o) + P_t f_1(\nu x_o) \,]$$

On notera $P_t^+ f$ sa restriction à M

$$P_t^+ f_1 \quad \text{vérifie} \quad P_t^+ f_1 (x_o) = P_t^+ f_1(\nu x_o) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial P_t^+}{\partial n} f(x_o) = 0$$

si x_o appartient au bord de M.

LEMME 4.III

Le temps de vie de X_s^+ est infini

Démonstration :

Soit $\xi(\omega)$ le temps de vie de X_s^+

$$P_x(t < \xi(\omega)) = p^+(t,x,M) = \tfrac{1}{2}\,[p(t,x,V) + p(t,\nu x,V)] = 1$$

3 - Les semi-groupes de Spencer [16] opérant sur les formes.

Soit T_t le semi-groupe opérant sur les formes définies sur V et correspondant à l'opérateur $\square$ de Hodge.

a) Si β est une forme sur M, on la prolonge sur V en posant

$< \hat{\beta}(x),h > = < \beta(\nu x),d\nu(x).h >$

On note β_1 le prolongement ; β_1 vérifie $\hat{\beta}_1 = \beta_1$

On définit

$$\mathcal{T}_t^+ \beta_1(h) = \tfrac{1}{2}\,[T_t \beta_1 + \widehat{T_t \beta_1}]$$

et $T_t^+ \beta$ est défini comme la restriction à M de $\mathcal{T}_t^+ \beta_1$

Le semi-groupe T_t^+ correspond aux opérateurs M_s de [16, p. 12]

b) De la même façon, le semi-groupe correspondant aux opérateurs L_s de [16, p. 12] est obtenu comme suit :

on prolonge sur V une forme β définie sur M, en posant

$$< \beta_2(x),h > = - < \beta(\nu x),d\nu(x)h >$$

et $T_t^- \beta$ est la restriction à M de $\tfrac{1}{2}\,[T_t \beta_2 - \widehat{T_t \beta_2}]$

LEMME 5.III

Les semi-groupes T_t^+ et T_t^- sont reliés par $*T_t^+ = T_t^- *$

Démonstration:

$$*T_t^+\beta = \tfrac{1}{2}[*T_t\beta_1 + \widehat{*T_t\beta_1}]$$

or

$$< \widehat{*T_t\beta_1}(x), h > = \epsilon < T_t\beta_1(x), *h > \quad \text{où} \quad \epsilon = \pm 1$$

$$= \epsilon < T_t\beta_1(\nu x) \ , d\nu(x)(*h) >$$

comme

$$d\nu(x)(*h) = *d\nu(x).h$$

$$< \widehat{*T_t\beta_1}(x), h > = - < *T_t\beta_1(\nu x), d\nu(x)h >$$

$$= - < \widehat{*T_t\beta_1}(x), h >$$

$$< *T_t^+\beta(x), h > = \tfrac{1}{2} [< *T_t\beta_1(x), h > - < \widehat{*T_t\beta_1}(x), h >]$$

or

$$*T_t = T_t*$$

et

$$*(\beta_1) = (*\beta)_2 \quad \text{d'où le résultat.}$$

<u>Remarque</u> : Les semi-groupes T_t^+ et T_t^- ne sont pas "conservatifs", c'est à dire si on leur associe un processus, il y a un "killing" de ce processus sur le bord de M. En effet si h est un vecteur normal au bord dans l'espace tangent à M en un point du bord bM, $\mathcal{T}_t^+\beta_1(h) = 0$

et si h est un vecteur dans l'espace tangent au bord bM

$$\mathcal{T}_t^-\beta_2(h) = 0$$

On étudiera ce Killing au (§ V, n° 3).

4 - <u>Les semi-groupes réfléchis sur O(M)</u>

On note P_t le semi-groupe sur O(V) défini par le générateur infinitésimal Λ correspondant à l'opérateur de De Rham Hodge sur V. [12] . On a $P_t f_\pi = f_{T_t\pi}$.

On va définir les deux semi-groupes P_t^+ et P_t^- sur O(M) qui correspondent aux semi-groupes du § 3 par les relations

$$f_{T_t^+\pi} = P_t^+ f_\pi \quad \text{et} \quad f_{T_t^-\pi} = P_t^- f_\pi$$

Soit f une fonction équivariante définie sur O(M) et à valeurs dans $E = \mathbb{R}^n$.

1) On la prolonge en une fonction définie sur $O(V)$ et à valeurs dans E, en posant

$$f_1(r) = f(d\nu(p(r))or) \quad \text{si} \quad r \in O(V-M)$$

On note f_1 le prolongement ; f_1 vérifie $\nu^* f_1 = f_1$

On définit le semi-groupe $\mathcal{P}_t^+$ sur $O(V)$ par

$$\mathcal{P}_t^+ f(r) = \tfrac{1}{2}\left[P_t f_1(r) + P_t f_1(\nu r)\right] \text{ et}$$

on prend sa restriction à $O(M)$ notée P_t^+

Remarquons que quand on prolonge $P_t^+ f$ par la méthode (1) ci dessus, on a

$$(P_t^+ f)_1 = \mathcal{P}_t^+ f.$$

$\mathcal{P}_t^+ f$ satisfait les conditions du lemme 2 bis et la forme différentielle qui lui correspond satisfait les conditions du lemme 2

[On "réfléchit" les composantes tangentielles et on "absorbe" les composantes normales]

2) On prolonge f en une fonction sur $O(V)$ à valeurs dans E, en posant $f_2(r) = -f(d\nu(p(r))or) = -f(\nu r)$. Le prolongement f_2 vérifie $f_2(\nu r) = -f_2(r)$.

On définit le semi-groupe $\mathcal{P}_t^-$ sur $O(V)$ par $\mathcal{P}_t^- f(r) = \frac{1}{2}\left[P_t f_2(r) - P_t f_2(\nu r)\right]$ et on prend sa restriction sur $O(M)$ notée P_t^-. Si on prolonge $P_t^- f$ par la méthode (2) ci-dessus, on a

$$(P_t^- f)_2 = \mathcal{P}_t^- f$$

[On "réfléchit" les composantes normales et on "absorbe les composantes tangentielles]

IV. - TEMPS LOCAL

1 - Le temps local au bord de M [6,8,15]

C'est la limite de la moyenne du temps de séjour du processus X_s dans une bande de largeur ρ autour du bord quand ρ tend vers zéro.

Sous forme précise, si on pose

$$D_\rho = \{x \in M \mid \text{ distance } (x, bM) < \rho\}$$

alors

$$\tau(t) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \int_0^t 1|_{D_\rho}(X_s^+)\, ds$$

$\tau(t)$ est une fonctionnelle de Markov croissante qui croit seulement quand le processus X_s^+ touche le bord et $d\tau$ est une mesure qui a pour support un parfait de dimension de Hausderff 1/2 [9,p.50 et 17]

On pose

$$\tau^{-1}(t) = \sup \{s \mid \tau(s) \leq t\}$$

et on considère le processus $Y_u = X^+_{\tau^{-1}(u)}$

Alors Y_u est un processus qui vit sur le bord et son générateur infinitésimal est obtenu de la façon suivante [15 ; 8]

On se donne une fonction φ sur bM ; on note $H\varphi$ la fonction dans M qui est harmonique à l'intérieur de M et qui coïncide avec φ au bord de M. On pose $A\,\varphi = \frac{\partial}{\partial n} H\varphi$. Alors A est le générateur infinitésimal de Y_u.

V. - CAS PLAT - SOLUTION DU PROBLEME DE SPENCER - LE SEMI-GROUPE ASSOCIE - THEOREME D'ANNULATION - LA FONCTIONNELLE $\mathcal{L}(s)$

Dans § III, on a déterminé le semi-groupe P_t^+ [16] qui satisfait $\Lambda P_t^+ f = \frac{\partial}{\partial t} P_t^+ f$ dans M

et au bord $P(r)P_t^+f(r) - Q(r)d(P_t^+f)\ (r)(\mathrm{rel}\, n) = 0$

On va donner une autre expression de ce semi-groupe en construisant le processus associé.

Pour cela, on cherche à déterminer une forme π telle que $\square\,\pi = 0$ dans M et $\pi_n = \theta_n$; $(d\pi)_n = (d\theta)_n$ au bord de M .

c'est à dire

$$(1)\qquad \begin{cases} \Lambda\, f_\pi(r) = 0 \quad \text{dans } M \\ \text{et} \quad P(r)f_\pi(r) - Q(r)df_\pi(r)(\mathrm{rel}\, n) = \psi(r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{au bord de } M \end{cases}$$

1. - Cas d'une variété plate - Solution du problème (1)

Soit $r_o(x)$ un repère donné. Tout repère $r(x)$ s'écrit $r(x) = g(x)r_o(x)$ où $g(x) \in O(n)$.

Si f est une fonction équivariante définie sur $O(M)$, $f(r) = g(x)^{-1}f(x)$ où on a posé $f(x) = f(r_o)$

Si $r(x)$ est le repère $(f_1(x),.., f_n(x))$ et $r_o(x)$ est le repère $(e_1(x),..,e_n(x))$, les formules de changement de repère sont les suivantes :

$$f(r) = \pi_1(x)f_1(x) + . . + \pi_n(x)f_n(x)$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, \pi_i(x)e_j(x) = \sum_j \varphi_j(x)e_j(x)$$

Si $\pi_n(x) = 0$, on a $df_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \pi_i}{\partial n}(x)\, f_i(x)$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1,..n}}^{n-1} g_{ij} \frac{\partial \pi_i}{\partial n} e_j$$

et $$\pi_i = g_{ij}^{-1} \varphi_j$$

Choisissons un repère $r_o(x)$ tel que $\Delta_{O(M)}f(r) = 0$ si et seulement si $f(x) = (\varphi_1(x),.., \varphi_n(x))$ où $(\varphi_1,.., \varphi_n)$ sont des applications de M dans R vérifiant $\Delta \varphi_i = 0$ pour $i = 1,.. n$.

Soit P la matrice de projection sur le n-ième vecteur $\vec{e}_n$ de $\mathbf{R}^n$ et $Q = I - P$.

Pour un repère r tel que $r^{-1}(n_x) = \vec{e}_n$, on a $P(r) = P$ et $Q(r) = I - P$.

Dans un tel repère, les conditions frontières sont

$$P(r)f(r) - Q(r)\, df(r)(\text{rel}\, n) = \psi(r)$$

c'est à dire

$$(\alpha) \qquad P \,.\, g(x)^{-1}f(x) - Q \frac{\partial}{\partial n} g(x)^{-1}f(x) = g(x)^{-1}\, \psi(x)$$

En multipliant par $g(x)$ et en posant $P(r_o) = P(x)$, on a

$$(\beta) \qquad P(x)f(x) - Q(x)g(x)\frac{\partial}{\partial n}[g(x)^{-1}f(x)] = \psi(x)$$

c'est à dire $\qquad P(r_o)f(r_o) - Q(r_o)\, df(r_o)(\mathrm{rel}\, n) = \psi(r_o)$

On peut supposer que $\frac{\partial}{\partial n} g(x)^{-1} = 0$, il suffit de prendre un prolongement convenable "à l'intérieur" de $g(x)^{-1}$ et les conditions (β) deviennent

$$(\gamma) \qquad P(x)f(x) - Q(x)\frac{\partial}{\partial n} f(x) = \psi(x)$$

On a ramené le problème (1) à celui étudié dans [2] [Théorème 4-4]

On remonte l'expression [36 - Théorème 4-4 [1]]

$$f(x) = E_x\left[\int_0^{+\infty} \mathcal{A}(s)\,\psi(X_s^+)\tau(ds)\right] - E_x\left[\int_0^{+\infty} d\mathcal{A}(s)\,\psi(X_s^+)\right]$$

En posant

$\psi(r) = P(r)\, f_\theta(r) - Q(r)df_\theta(r)(\mathrm{rel}\, n)$ et en utilisant les relations [2]

$$\mathcal{A}(s)P(r_s^+) = 0 \quad \text{et} \quad d\mathcal{A}(s)Q(r_s^+) = 0$$

On obtient

$$(\delta) \qquad - f(r) = E_r\left[\int_0^{+\infty} \mathcal{A}(s)df_\theta(r_s^+)(\mathrm{rel}\, n)\tau(ds)\right] + E_r\left[\int_0^{+\infty} d\mathcal{A}(s)f_\theta(r_s)\right]$$

(δ) donne la solution du problème (1)
[Théorème 5.5 - [1]]

<u>Remarques</u>

1) Comme $\mathcal{A}(0) = \mathrm{id}$ et $\lim\limits_{s \to +\infty} \mathcal{A}(s)h = 0$, on obtient la formule (δ) "en gros" en intégrant la différentielle stochastique $d(\mathcal{A}(s)f_\theta(r_s^+))$

En effet

$$-f_\theta(r) = E_r\left[\int_0^{+\infty} d(\mathcal{R}(s) f_\theta(r_s^+))\right]$$

2) On obtient en utilisant $\mathcal{R}(s)$ des théorèmes d'annulation faisant intervenir la courbure du bord.
Des théorèmes de ce type sont obtenus dans [18], par exemple proposition 3.2.p.133 (ii), par des méthodes différentes.

THÉORÈME (d'annulation) 1 - V

Dans le cas plat, pour un domaine borné, il n'y a pas de formes harmoniques "tangentielles" [18] autres que zéro, c'est à dire $\square\pi = 0$ et $\tau_n = (d\pi)_n = 0$ entraînent $\pi = 0$.

Démonstration:

cela résulte immédiatement de $\lim\limits_{s\to+\infty} \mathcal{R}(s)h = 0$ et de la formule (δ)

Pour un domaine borné tel que le 2ème tenseur fondamental du bord par rapport à la normale au bord définit une forme définie négative en tout point [18 p. 90], on peut déduire le théorème 1-V de la proposition 3.2 p. 133 (ii) de [18]

- Remarque sur le processus associé aux conditions frontières

$\frac{\partial f}{\partial n}(x) + R(x)f(x) = \psi(x)$ où $R(x)$ est antisymétrique

La solution de

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta f = 0 \text{ dans } M \\ \text{et } \dfrac{\partial f}{\partial n}(x) + R(x)\, f(x) = \psi(x) \quad \text{au bord} \\ \qquad f(x) = f(r_o(x)) \end{cases}$$

est [15,2]

$$f(x) = E_x\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(* \int_0^s R(X_u^+)\tau(du)\right).\,\psi(X_s^+)\tau(ds)\right]$$

où $Z_s = \exp(* \int_0^s R(X_u^+)\tau(du))$ est solution de l'équation différentielle matricielle.

$$d\,Z_s = Z_s\, R(X_s^+)\,\tau(ds) \quad \text{et} \quad Z_0 = id$$

$R(X_s^+)$ est antisymétrique $(R + R^* = 0)$ entraîne que $Z_s\, Z_s^* = id$

en effet

$$Z_s d Z_s^* + d Z_s \quad Z_s^* = (Z_s R^*(X_s^+) Z_s^* + Z_s R(X_s^+) Z_s^*)\tau(ds) = 0$$

donc Z_s est une matrice orthogonale ; si $\psi(X_s^+) = \psi(r_o(X_s^+))$

alors, $Z_s \cdot \psi(r_o(X_s^+)) = \psi(Z_s^{-1} \cdot r_{o,s}) = \psi(r_s^+)$ où on a posé $r_s^+ = r_o(X_s^+) \circ Z_s^{-1}$

La solution de (2) est alors

$$f(r) = E_r \left[\int_o^{+\infty} \psi(r_s^+)\tau(ds) \right]$$

et la projection $p(r_s^+) = X_s^+$.

2. - Cas d'une variété plate - Le semi-groupe associé aux conditions frontières

$$p(r)\ f(r) - Q(r)\ df(r)(\mathrm{rel}\ n) = 0$$

THÉORÈME 2.V

$$P_t^+ f(r) = E_r [\mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+)] \qquad \underline{\text{où}} \qquad r_s^+ = (X_s^+, g)$$

$$\underline{\text{si}} \qquad r = (x, g)$$

Démonstration :

Comme $\mathcal{A}(r_t^+)$ ne varie que sur le bord, pour un point x à l'intérieur de M et r un repère au dessus de x,
on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{E_r [\mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+)] - f(r)}{t} = \Lambda f(r)$$

il suffit de vérifier (1) $P(r)P_t^+ f(r) = 0$ et

(2) $$Q(r) d(P_t^+ f)(r)(\mathrm{rel}\ n) = 0$$

(1) résulte de $$\mathcal{A}(X_s^+) \circ P(X_s^+) = 0$$

Pour (2), on utilise le lemme 2 bis III, n° 1,

$$E_{d\nu\ (p(r)) or} [\mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+)] = P_t^+ f(r).$$

3. - La forme multiplicative de $\mathcal{A}(s)$

- Obtention à partir du système intégral (T')

Dans [2], on a montré que

$$\mathcal{A}(s) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{A}_\epsilon(s) \quad \text{où} \quad \mathcal{A}_\epsilon(s) \text{ est définie par}$$

$$\frac{d\mathcal{A}_\epsilon(s)}{d\tau(s)} = - \frac{P(X_s^+)}{\epsilon} \mathcal{A}_\epsilon(s)$$

est solution du système intégral (T')

$$(T') \qquad \left\{ \mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(0)Q_o - \int_o^{r(s)} \mathcal{A}(u)dO_u \, P \, O^{-1}_{r^{-1}(u)} \right.$$

$$\text{où} \quad r(s) = \sup \{\text{supp } d\tau \cap [o,s[\, \}$$

On a :

$$(T'') \qquad \mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(o) \, Q_o - \sum_{T < j_k^+ < s} \Delta \mathcal{A}(j_k^+)$$

c'est à dire que le problème (1) correspond à un problème de Dirichlet qui s'étale dans le temps.

Par exemple $P(x)$ étant la projection sur la normale au point x, et $Q(x)$ la projection sur le plan tangent au bord, au point x, faire opérer $\mathcal{A}(s)$ sur un vecteur $\vec{V}$, revient à promener ce vecteur parallèlement le long de la trajectoire du processus réfléchi et à "tuer" sa composante normale à chaque fois que le processus touche le bord.

Si on "discrétise" le temps, $\mathcal{A}(s)$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{A}(s) = Q_T \, Q_{T_1} \ldots Q_{T_n} \quad \text{pour} \quad T_n < s \leq T_{n+1}$$

où $T, T_1, \ldots, T_n$ sont les temps consécutifs où le processus X_s^+ touche le bord.

Ceci conduit à chercher une expression de $\mathcal{A}(s)$ sous la forme de limite de produits.

Nous utiliserons les remarques suivantes sur le temps local.

Soit $R(\omega) = \text{supp } d\tau(\omega)$, le complémentaire de $R(\omega)$ est réunion dénombrable d'intervalles contigus disjoints $R(\omega)^c = \bigcup_k J_k$

D'après [9,17], $R(\omega)$ est de dimension de Hausdorff 1/2 et pour presque toute trajectoire ω dans Ω, la mesure 1/2-dimensionnelle de Hausdorff de $R(\omega)$ est nulle :

$\Lambda^{\frac{1}{2}} R(\omega) = 0 \qquad dP(\omega)$ p.s

Pour toute suite (δ_p) qui tend vers 0, il existe un recouvrement <u>fini</u> de $R(\omega) \cap [\,0,s]$ par des ensembles de longueur inférieure à δ_p

$$R(\omega) \cap [\,0,s\,] = \bigcup_n A_n^{\delta_p}$$

et tels que
$$\lim_{\delta_p \to 0} \sum |A_n^{\delta_p}|^{\frac{1}{2}} = 0$$

On peut supposer les ensembles du recouvrement $B_{\delta_p} = \bigcup_n A_n^{\delta_p}$ contigus et les recouvrements B_{δ_p} emboîtés

En effet B_{δ_p} étant construit, on construit $B_{\delta_{p+1}}$ en prenant des recouvrements de $A_n^{\delta_p}$ pour tout n.

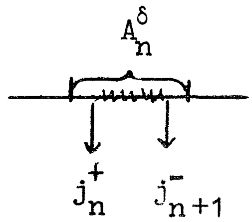
On appellera une telle famille de recouvrements B_{δ_p}, une famille adaptée à la suite (δ_p).

Soit T le premier temps de sortie du processus X_s^+ de la variété M

Pour un recouvrement B_δ, on pose

$$j_n^+ = \inf \; \{ \operatorname{supp} d\tau \cap A_n^\delta \}$$

$$j_{n+1}^- = \sup \; \{ \operatorname{supp} d\tau \cap A_n^\delta \}$$



alors (j_n^-, j_n^+) est un des contigus constituant la réunion $\bigcup_n J_n = R(\omega)^c$ soit $E[\delta,s]$ l'ensemble des intervalles J_n associés au recouvrement $B_\delta(\omega)$ comme ci dessus et tels que $J_n \subset [\,T,s]$.

On ordonne les ensembles J_n qui appartiennent à $E[\delta,s\,]$ en ordre croissant et on forme le produit fini

$$\mathcal{A}_\delta = Q(X_T)\, Q(X_{j_1^+}) \dots Q(X_{j_r^+})(\omega)$$

$$= Q(X_T) \prod_{J \in E(\delta,s)(\omega)} Q(X_{j^+}) \quad \text{où} \quad j^+ = \sup J$$

LEMME 1 . V.

<u>Soit</u> δ_p <u>une suite qui tend vers zéro</u> et (B_{δ_p}) <u>une famille de recouvrements adaptés à</u> (δ_p) <u>alors</u> $\|\mathcal{A}_{\delta_p}(s)\|$ <u>décroit quand</u> δ_p <u>tend vers zéro</u>

Démonstration :

$$\|Q_1 Q_2 \dots Q_n\| \geq \|Q_1 Q' Q_2 \dots Q_n\|$$

Lorsque $Q_1, Q', \dots Q_n$ sont des projecteurs.

<u>Remarque</u>

on pose $$\tilde{Q}_j = Q(X_{j^-})\, Q(X_{j^+})$$

et on considère le produit

$$\tilde{\mathcal{A}}_\delta = Q(X_T)\, \tilde{Q}_{j_1} \dots \tilde{Q}_{j_r} \quad \text{où} \quad (j_i^-, j_i^+) \in E[\delta, s]$$

$$= Q(X_T) \prod_{J \in E(\delta,s)} \tilde{Q}_j$$

Si $\lim\limits_{\delta_p \to 0} \mathcal{A}_{\delta_p}$ existe, alors $\lim\limits_{\delta_p \to 0} \tilde{\mathcal{A}}_{\delta_p}$ existe et la limite est la <u>même</u>. En effet, si on fixe j^-, il existe une suite j_m^+ qui tend en croissant vers j^- et $Q(X_{j_m^+})$ tend vers $Q(X_{j^-})$

<u>Ainsi</u>

$$\lim_{m \to +\infty} Q(X_{j_m^+})\, Q(X_{j^-}) = \lim_{m \to +\infty} Q(X_{j_m^+})$$

THÉORÈME 3 - V.

<u>Pour toute suite</u> (δ_p) <u>qui tend vers zéro et tout recouvrement</u> B_{δ_p} <u>adapté, on approche la solution du système</u> (T') <u>par</u> $\lim\limits_{\delta_p \to 0} \mathcal{A}_{\delta_p}(s)$.

Démonstration :

Soit δ et l'ensemble des contigus J de $E[\delta,s]$

on les ordonne :

Si s est tel que $s = r(s)$ le système (T) s'écrit

$$\begin{cases} Y_1(s) = 0 \\ Y_2(s) - Y_2(0) = \int_o^s Y_u\, O_u^{-1}\, dO_u \,.\, Q = \int_o^s Z_u\, dO_u \,.\, Q \end{cases}$$

avec $Y_u\, O_u^{-1} = Z_u$

On a :

$$Y_2(s) - Y_2\,(0) = \int_0^T Z_u\, dO_u \,.\, Q + \int_T^s Z_u\, dO_u \,.\, Q$$

$$= Z_T\,(O_T - O_o)\; Q + \int_T^s Z_u\, dO_u \,.\, Q$$

or

$$Y_2(0) = Z_T\, O_o\, Q$$

$$Y_2(s) = Z_T\, O_T\, Q + \int_T^s Z_u\, dO_u \,.\, Q$$

comme $\quad s = r(s) \;;\; Z_s = Y_2(s)\,.\, O_s^{-1}$

donc $\quad Z_s = Z_T\, Q_T + \left(\int_T^s Z_u\, dO_u \,.\, Q\right) O_s^{-1}$

$$+ Z_T\, O_T\, Q\, (O_s^{-1} - O_T^{-1})$$

Si $\quad j_{k-1}^+ < s \leq j_k^-$

$$Y_2(s) = Y_2\,(j_{k-1}^+) + \int_{j_{k-1}^+}^s Z_u\, dO_u \,.\, Q$$

posons :

$$h(j_{k-1}^+, s\,) = \left(\int_{j_{k-1}^+}^s Z_u\, dO_u \,.\, Q\right) O_s^{-1} + Z_{j_{k-1}^+}\, O_{j_{k-1}^+}\, Q(O_s^{-1} - O_{j_{k-1}^+}^{-1}\,)$$

Alors

(4) $$Z_s = Z\,(j_{k-1}^+)\, Q_{j_{k-1}^+}\; h(j_{k-1}^+,s)$$

or $$Z_{j_{k-1}^+} = Z_{j_{k-1}^-}\,.$$

En remplaçant $Z_{j_{k-1}^-}$ par sa valeur dans (4), on obtient

$$Z_s = Z_T\, Q_T\, Q_j + \ldots Q_{j_{k-1}^+} + h(T,j_1^-)\, Q_{j_1^+} \ldots Q_{j_{k-1}^+} + \ldots$$
$$+ h(j_1^+,j_2^-)\, Q_{j_2^+} \ldots Q_{j_{k-1}^+} + \ldots + h(j_{k-1}^+,s)$$

Donc

$$E\,[\,|\mathcal{A}(s) - \mathcal{A}_\delta(s)|\,] \leq E\,[\sum_{j_p^-(\omega)\leq s} |h(j_p^+,j_{p+1}^-)|\,]$$

Or $$E\,[\,|h(s,t)|\,] \leq E\,[\,|h(s,t)|^2\,]^{\frac{1}{2}} \leq C\,(t-s)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout s et tout t, où C est constante, d'après l'inégalité de Cameron-Martin.

et $$R_\delta = \sum_{j^-(\omega)\leq s} (j_{p+1}^- - j_p^+)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

quand $\delta \to 0$

d'après [17]

LEMME 2 - V.

<u>Le processus</u> $\mathcal{A}(s)$ <u>n'est pas à variation bornée</u>

Démonstration :

Pour tout ω, et δ, considérons la mesure $d\mathcal{A}_\delta(s)$: $d\mathcal{A}_\delta(s)$ est une somme finie de mesures de Dirac

<u>En effet</u>

$$\mathcal{A}_\delta(s) = Q(X_T)\, Q(X_{j_1^+}) \ldots Q(X_{j_2^+})$$

si $$j_2^+ < s \leq j_{2+1}^+$$

et $$\delta = (j_1^+, \ldots j_k^+, \ldots$$

donc $$\int \varphi(s)\, d\mathcal{A}_\delta(s) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(j_{k-1}^+)\,[\,\mathcal{A}_\delta(j_k^+) - \mathcal{A}_\delta(j_{k-1}^+)\,]$$

$$\int \varphi(s) d\mathcal{J}_\delta(s) = \sum_k \varphi(j_{k-1}^+) \mathcal{J}_\delta(j_{k-1}^+) P(j_k^+).$$

$$= \sum_k \varphi\,(j_{k-1}^+) \mathcal{J}_\delta(j_{k-1}^+)\ [\ Q(j_{k-1}^+) - Q(j_k^+)\ ]$$

Montrons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et une fonction $\varphi(s)$ tel que $\| \int \varphi(s) d\mathcal{J}_\delta(s) \| \geqq \epsilon$.

on pose $\quad Q_\delta(s) = Q(j_k^+) \quad$ si $\quad j_{k-1}^+ < s \leqq j_k^+$

il suffit de trouver ψ tel que $\| \int \psi(s)\ dQ_\delta(s) \| > \epsilon$ puis on prendra $\varphi(s) = \psi(s)$

Soit φ tel que

$$\| \int \varphi(s)\ dQ_\delta(s) \| = \sum_k \| Q_\delta(j_k^+) - Q_\delta(j_{k-1}^+) \|$$

or $\quad E\,(\| Q_\delta(j_k^+) - Q_\delta(j_{k-1}^+) \|^2) \sim C\,E\,[(j_k^+ - j_{k-1}^+)$

$$| j_k^- - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}} \leqq | j_k^+ - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}} \leqq | j_k^+ - j_k^- |^{\frac{1}{2}} + | j_k^- - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_k | j_k^+ - j_k^- |^{\frac{1}{2}} \to 0$$

mais $\quad \sum_k | j_k^- - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}} \to +\infty.$

les sauts du processus suivent une loi de Poisson, $\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$ diverge [11,p. 90]

Donc la suite des mesures $d\mathcal{J}_\delta$ n'est pas vaguement bornée. On en conclut que $d\mathcal{J}$ n'est pas une mesure. L'expression (35') de la différentielle stochastique de $\mathcal{J}$ où le brownien intervient justifie le Lemme 2 - V.

Détermination de $\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{J}_\epsilon(s)$ dans les cas particuliers du $\frac{1}{2}$-plan et d'un polygône.

cas du $\frac{1}{2}$ - plan

Soit T le premier temps de sortie du $\frac{1}{2}$ - plan

si $s < T$, on pose $\mathcal{J}(s) = I$

si $s \geqq T$, on pose $\mathcal{J}(s) = Q(r_T)$

le problème $\Lambda\ \Phi = 0$ avec les données au bord $n\,\Phi$ et $nd\,\Phi$ se traduit de la façon suivante :

trouver n fonctions harmoniques $P_1, P_2, \dots P_n$ telle que pour P_n correspondant à la composante normale, on ait un problème de Dirichlet au bord et pour $P_1, \dots, P_{n-1}$ on ait au bord une donnée de Neumann.

Dans ce cas, la solution (A) se décompose de la façon suivante

$$-f(r) = \lim_{\epsilon \to o} E_r\left[\int_o^{+\infty} \exp * \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon}\, \tau\,(du) \,.\, \frac{P}{\epsilon}\, \varphi\,(r_s^+)\, \tau\,(ds) \right]$$

$$+ \lim_{\epsilon \to o} E_r\left[\int_o^{+\infty} \exp * \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon}\, \tau\,(du)\, \varphi\,(r_s^+)\, \tau\,(ds) \right]$$

Comme $P(r)$ est une matrice constante qui est la projection sur la normale au bord et $Q(r) = I - P(r)$ est la projection sur le bord, le premier terme est $- E_r\,(\varphi_n(X_T))$ où T est le premier temps de sortie du $\frac{1}{2}$ - plan et le deuxième terme est

$$E_r\left[\int_o^{+\infty} \varphi_t\,(X_s^+)\, \tau\,(ds) \right] \quad \text{où} \quad \varphi_n = f_\theta(r)$$

$$\varphi_t = - df_\theta\,(r)(\mathrm{rel}\, n)$$

<u>Cas d'un polygône</u>

La matrice $P(r)$ est constante par morceaux.

Soit T le premier temps de sortie du polygône, T_1 le premier temps où le processus change de coté, T_2 le deuxième temps où il change de côté, $T_3 \dots$

Pour $T \leq s < T_1$

$$\exp\left[* \int_{[o,s]} - \frac{P}{\epsilon}\,(r_u^+)\, \tau\,(du) \right] \varphi\,(r_s^+) = \exp - \frac{\tau(s)}{\epsilon} \,.\, \varphi_n\,(r_s^+) + \varphi_t\,(r_s^+)$$

$$= \left[\exp - \frac{\tau(s)}{\epsilon}\, P(r_s^+) + Q(r_s^+) \right] \varphi\,(r_s)$$

où $\quad Q(r_s^+) = I - P(r_s^+)$

Pour $\quad T_1 \leq s < T_2$

$$\exp * \int_{[o,s]} -\frac{P}{\epsilon}(r_u^+)\tau(du).\varphi(r_s^+) = \exp * \int_{[o,T_1]} -\frac{P}{\epsilon}(r_u^+)\tau(du).\exp * \int_{[T_1,s]} -\frac{P}{\epsilon}(r_u^+)\tau(du)\varphi(r_s^+)$$

$$= [\exp -\frac{\tau(T_1)}{\epsilon} . P(r_T^+) + Q(r_T^+)] \circ [\exp - \frac{\tau(s)-\tau(T_1)}{\epsilon} . P(r_{T_1}) + Q(r_{T_1})]$$

Pour $T_n \leq s < T_{n+1}$, on a :

$$\exp * \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) =$$

$$[\exp - \frac{\tau(T_1)}{\epsilon} . P(r_T^+) + Q(r_T^+)] \ldots [\exp - \frac{\tau(s)-\tau(T_n)}{\epsilon} P(r_{T_n}) + Q(r_{T_n})]$$

$$= \prod_{1\leq k\leq n} R(T_k) \quad \text{où} \quad R(T_k) = \exp - \frac{\tau(T_{k+1})-\tau(T_k)}{\epsilon} P(r_{T_k}) + Q(r_{T_k})$$

(A) se décompose en somme de deux termes, comme $T, T_1, \ldots T_n$ sont des points de croissance du temps local, on a pour le deuxième terme, si $T_n \leq s < T_{n+1}$

$$\mathcal{A}(r_s^+) = \lim_{\epsilon\to o} \exp * \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) = Q(r_T^+)\ldots Q(r_{T_n}^+)$$

Pour le premier terme, cela revient à calculer $d\mathcal{A}(r_s^+)$

Posons $A_i = \exp - \frac{(\tau(T_{i+1})-\tau(T_i))}{\epsilon} . P(r_{T_i}^+)$ et $B_i = Q(r_{T_i}^+)$

pour $T_n \leq s < T_{n+1}$, $\prod_{1\leq k\leq n} R(T_k) = \sum_{A,B} \alpha_1 \circ \alpha_2 \ldots \circ \alpha_n$ où $\alpha_i = A_i$ ou B_i

les termes de la forme

$$\alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_{n-1} \circ Q(r_{T_n}^+) \frac{P(r_s^+)}{\epsilon} \varphi(r_s^+) = 0 .$$

et les termes de la forme

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} \alpha_1 \circ \dots \circ A_j \circ \alpha_{j+1} \dots \exp - \frac{\tau(s)-\tau(T_n)}{\epsilon} P(r^+_{T_n}) . \frac{P(r^+_s)}{\epsilon} \varphi(r^+_s)\, \tau(ds)$$

tendent vers 0 quand $\epsilon \to 0$

donc il reste seulement le terme

$$\lim_{\epsilon \to o} \int_{T_n}^{T_{n+1}} Q(r^+_T) \dots Q(r^+_{T_{n-1}}) \exp - \frac{\tau(s)-\tau(T_n)}{\epsilon} . \frac{P(r^+_s)}{\epsilon} \varphi(r^+_s)\, \tau(ds)$$

$$= - Q(r^+_T) \dots Q(r^+_{T_{n-1}}) P(r^+_{T_n}) \varphi(r^+_{T_n})$$

et la solution (A) est

$$\text{(B)} \qquad - \sum_n E_r [Q(r^+_T) \dots Q(r^+_{T_{n-1}}) P(r^+_{T_n}) . \varphi(r^+_{T_n})] + E_r [\int_o^{+\infty} \mathcal{A}(r^+_s)\, \varphi(r^+_s)\, \tau(ds)]$$

pour $\qquad T_n \leq s < T_{n+1}$, $\mathcal{A}(r_s) = Q(r^+_T) \dots Q(r_{T^+_n})$

$\mathcal{A}(r_s)$ est une fonctionnelle à sauts, calculons

$$\int d\mathcal{A}(r_s) . A_s = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{A}(r_{T_{n+1}}) - \mathcal{A}(r_{T_n})]. A_{T_n}$$

or $\qquad \mathcal{A}(r_{T_{n+1}}) - \mathcal{A}(r_{T_n}) = \mathcal{A}(r_{T_n}) [Q(r^+_{T_{n+1}}) - I] = - \mathcal{A}(r_{T_n}) P(r^+_{T_n})$

et (B) s'écrit

$$E_r [\int_o^{+\infty} d\mathcal{A}(r^+_s)\, \varphi(r^+_s)] + E_r [\int_o^{+\infty} \mathcal{A}(r_s)\, \varphi(r_s)\, \tau(ds)] .$$

c'est l'expression (δ) § V -1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. AIRAULT - Résolution stochastique d'un problème de Dirichlet - Neumann pour des fonctions à valeurs vectorielles : Comptes Rend. Acad. Sc. Paris t. 280. (24 Mars 1975) Serie A. p. 781 - 784

[2] H. AIRAULT - Pertubations singulières et solutions stochastiques de problèmes de D. Neumann-Spencer à paraître. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (fin 1975)

[3] R.H. CAMERON and W.T. MARTIN - Transformations of Wiener Integrals under Translations A.M. 45 386 - 396.(1944)

[4] P.E. CONNER - The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,40 (1954) p. 1151 - 1155.

[5] J.L. DOOB - Probability methods applied to the first boundary value problem. Proc. 3 rd. Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. II, 49 - 80 Univ. Calif. Press (1956)

[6] J.G. GALLAVOTTI and H.P. McKEAN - Boundary conditions for the heat equation in a Several dimensional region

[7] J. IBERO - Calcul différentiel stochastique intrinsèque sur un groupe de Lie C.R. Acad. Sc. Paris t. 280, 6janvier (1975) série A p.13 à p. 16.

[8] N. IKEDA - On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its applications to boundary value problems, Mem, Coll. Sci. Univ. Kyoto serie 33 (367 - 427) (1961) .

[9] K. ITO and H.P. Jr. McKEAN - Diffusion processes and their sample paths. Acad. Press New York.(1964).

[10] M. KAC. - On the distribution of certain Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 65 (1949) pp. 1-13.

[11] J.P. KAHANE - Random measures and random sets in harmonic Analysis . Advances in Probability Marcel Dekker 1971.

[12] P. MALLIAVIN - Formules de la moyenne. Calcul de perturbations et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques. Jour. of Funct. Anal. 17 (274 - 291) (1974) .

[13] P.A. MEYER - Intégrales Stochastiques (4 exposés) Séminaire de probabilités 1 (Stasbourg) lectures Notes in Math. 39 (1967) Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

[14] J. MUNKRES - Elementary differential Topology lectures given at Massassuchetts Institute of Technology (Fall 1961).

[15] K. SATO and T. UENO - Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. t.4, 1965 p. 529 - 605

[16] D.C. SPENCER - Les opérateurs de Green et Neumann sur les variétés ouvertes riemanniennes et Hermitiennes. (Conférences données au Collège de France) Février 1955.

[17] S.J. TAYLOR - The α - dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51 (1955) p. 265 . 274.

[18] K. YANO - Integral formulas in Riemannian geometry. Marcel Dekker 1970.

[19] G. DE RHAM - Varietes différentiables. Hermann (1960).