Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Marc Višic

Intégrales premières analytiques des équations différentielles paraboliques non linéaires et du système des équations de Navier-Stokes. Applications à la théorie des solutions statistiques et à d'autres problèmes

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1974-1975), p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___1_1_0>

INTÉGRALES PREMIÈRES ANALYTIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARABOLIQUES NON LINÉAIRES ET DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES. APPLICATIONS À LA THÉORIE DES SOLUTIONS STATISTIQUES ET À D'AUTRES PROBLEMES.

par Marc VIŠIC

Les exposés reposent sur les travaux récents de M. VIŠIC et A. FOURSIKOV [2], [3].

1. - INTÉGRALES PREMIÈRES ANALYTIQUES

1.1. - Cas non périodique

Soit

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \mathcal{A}(\mathcal{D})U + f(\mathcal{D}^{\gamma}U) \tag{1.1}$$

où $|\gamma| \leqq \sigma$, $U = (U^1(t,x),\ldots,U^p(t,x))$, $\mathcal{D}_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$,

$$\mathcal{D}U = (\mathcal{D}_1 U,\ldots,\mathcal{D}_n U) \ , \ \gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \ , \ |\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$$

un système parabolique, possédant les propriétés suivantes :
$\mathcal{A}(\xi) = (\mathcal{A}_{i,j}(\xi))_{i,j=1,\ldots,p}$ est une matrice dont les éléments $\mathcal{A}_{ij}(\xi)$ sont des polynomes d'ordre $\leqq m$:

$$\mathcal{A}_{ij}(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqq m} a^{i,j}_{\alpha}\, \xi^{\alpha} \ , \ \xi = (\xi^1,\ldots,\xi^n) \tag{1.2}$$

on suppose que :

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) > c(1+|\xi|)^m \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n \ , \ c > 0 \tag{1.3}$$

où les $\lambda_j(\xi)(j = 1,\ldots,p)$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}(\xi)$;
l'opérateur non linéaire

$$f(\mathcal{D}^{\gamma}U) = \sum_{k=2}^{\infty} C_k(\mathcal{D}^{\gamma}U) \tag{1.4}$$

est la somme d'une série d'opérateurs différentiels homogènes d'ordre k :

$$(C_k(t\mathcal{D}^{\gamma}U) = t^k\, C_k(\mathcal{D}^{\gamma}U)) \ ,$$

et d'ordre différentiel σ $(|\gamma| \leqq \sigma)$. Plus exactement :

$$C_k(\mathcal{D}^{\gamma}U) = (C^1_k(\mathcal{D}^{\gamma}U),\ldots,C^p_k(\mathcal{D}^{\gamma}U)) \ ,$$

où

$$C^{\ell}_k(\mathcal{D}^{\gamma}U) = \sum_{j_1=1}^{p} \ldots \sum_{j_k=1}^{p} \ \sum_{|\alpha_{j_1}|\leqq\sigma} \ldots \sum_{|\alpha_{j_k}|\leqq\sigma} c^{\ell}_k(j_1,\ldots,j_k;\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_k})\mathcal{D}^{\alpha_{j_1}}U^{j_1}\ldots\mathcal{D}^{\alpha_{j_k}}U^{j_k} \tag{1.5}$$

Si on remplace chaque fonction $\mathcal{D}^{\alpha_j}U^j$ par un nombre $Z_{\alpha_j} \in \mathbb{C}$ on déduit de l'opérateur (1.4) la fonction :

$$f(Z) = f(..,Z_{\alpha_j},..) = (f^1(Z),..,f^p(Z)) \quad .$$

<u>On suppose que les fonctions</u> $f^{\ell}(Z)$ $(\ell = 1,..,p)$ <u>sont holomorphes dans un polydisque</u>

$$(1.6) \qquad |Z_{\alpha_j}| < R \quad \text{où} \quad R > 0$$

Pour simplifier l'écriture on suppose à partir de ce moment, que $p = 1$, c'est-à-dire que (1.1) est une équation. La généralisation pour le cas d'un système est presque évidente [3].

Soit $v(\xi) = \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$ la transformée de Fourier de la fonction $u(x)$

$$(1.7) \qquad v(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix.\xi} u(x)dx \quad , \quad x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$$

Par V_s on désigne l'espace de Banach des fonctions $u(x)$, pour lesquelles la norme

$$(1.8) \qquad \|u\|_s = \int (1+|\xi|)^s |v(\xi)| d\xi \quad , \quad \text{où} \quad v(\xi) = \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$$

est finie. On désigne aussi par V_s l'espace des fonctions $v(\xi) = \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$, correspondant à $u(x)$, (la norme $\|v(\xi)\|_s$ est définie aussi par (1.8)) .

Il sera utile de considérer la transformée de Fourier de l'équation (1.1). On remarque que :

$$(1.9) \qquad \mathcal{F}_{x \to \xi} (\mathcal{D}^{\alpha_1} u(x) \ldots \mathcal{D}^{\alpha_k} u(x)) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \iint \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_k^{\alpha_k} v(\eta_1) \ldots v(\eta_k) e^{-ix.(\xi-\eta_1-\ldots-\eta_k)} d\eta_1 \ldots d\eta_k dx$$

$$= \iint \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_k^{\alpha_k} v(\eta_1) \ldots v(\eta_k) \delta(\xi-\eta_1-\ldots-\eta_k) d\eta_1 \ldots d\eta_k$$

ou $\delta(\xi)$ est la fonction de Dirac.

De (1.5) et (1.9) il résulte :

$$\mathcal{F}_{x \to \xi} c_k(\mathcal{D}^{\gamma} u) = \iint \delta(\xi-\eta_1-\ldots-\eta_k) c_k(\eta_1,\ldots,\eta_k;v) d\eta_1 \ldots d\eta_k$$

où on a posé :

$$c_k(\eta_1,\ldots,\eta_k;v) =$$

(1.10) $$\sum_{|\alpha_1|\leq\sigma}\cdots\sum_{|\alpha_k|\leq\sigma} c_k(\alpha_1,\ldots\alpha_k)\eta_1^{\alpha_1}\ldots\eta_k^{\alpha_k}v(\eta_1)\ldots v(\eta_k)=C_k(\eta_1\ldots,\eta_k)v(\eta_1)\ldots v(\eta_k)$$

D'après (1.9) et (1.10) on a :

(1.11) $$\mathcal{F}_{x\to\xi}(f(\mathcal{D}^\gamma u)) = H(\xi,v) = \sum_{k=2}^{\infty}\int\delta(\xi-\eta_1-\ldots-\eta_k)c_k(\eta_1,\ldots,\eta_k;v)d\eta_1\ldots d\eta_k$$

Donc, appliquant la transformation de Fourier à chaque membre de l'équation (1.1), on obtient

(1.12) $$\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t} = -\,a(\xi)V(t,\xi) + H(\xi,V(t,.))$$

où $H(\xi,V(t,.))$ est définie par (1.11) ;

(1.12) est une équation integro-différentielle avec un paramètre $\xi\in R^n$. En un certain sens, l'équation (1.12) est équivalente à l'équation (1.1).

On va maintenant introduire la notion d'intégrale première analytique de l'équation (1.12).

Une fonctionnelle $\Psi(v(.))$, définie dans la boule $B_a^s = \{v(\xi)\,|\,\|v(.)\|_s < a\}$ est dite analytique, si pour chaque $v\in B_a^s$, a lieu le développement suivant

(1.13) $$\Psi(v) = \sum_{r=o}^{\infty}\Psi_r(v) \quad , \quad \text{où} \quad \Psi_o(v) = \Psi_o = \text{constante}$$

et

(1.13') $$\Psi_r(v) = \int\Psi_r(\eta_1,\ldots,\eta_r)v(\eta_1)\ldots v(\eta_r)d\eta_1\ldots d\eta_r$$

avec $$\Psi_r(\eta_1,\ldots,\eta_r)\in\mathcal{L}(R^{rn}) .$$

On peut toujours supposer que

(1.13") $$\Psi_r(\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_r}) = \Psi(\eta_1,\ldots,\eta_r) \quad ,$$

où $(i_1,\ldots,i_r)$ est une permutation arbitraire de $(1,\ldots,r)$. Posons

(1.14) $$[\Psi_r]_s = \operatorname*{vrai\ sup}_{\eta_1,\ldots\eta_r}\frac{|\Psi(\eta_1,\ldots,\eta_r)|}{\prod_{j=1}^{r}(1+|\eta_j|)^s}$$

S'il existe des constantes $\mathcal{B}$ et γ_1 telles que

(1.14) $$[\Psi_r]_s \leqq \mathcal{B}\gamma_1^r ,$$

la série (1.13) est convergente pour $\|v\|_s < \gamma_1^{-1}$.

On dira que <u>la fonctionnelle</u> $\Psi(v(.))$ <u>appartient à la classe</u> $\mathfrak{A}(B_a^s)$, <u>si pour tout</u> $v \in B_a^s$ <u>a lieu le développement</u> (1.13), <u>et si les coefficients</u>

$$\Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r)$$

<u>satisfont les estimations</u> (1.14') <u>avec</u> $\gamma_1 = a^{-1}$.

DÉFINITION. - <u>La fonctionnelle</u> $\Phi(t,v(.))$ <u>dépendant de</u> t , $(t_o < t < t_1)$, <u>sera appelée l'intégrale première de l'équation</u> (1.12), <u>si pour chaque solution</u> $V(t,\xi)$ <u>de cette équation, telle que</u> $V(t,.) \in V_s, t_o < t < t_1$; <u>on a</u> :

$$\Phi(t,V(t,.)) = \text{constante}$$

on va calculer l'équation que doivent vérifier les intégrales premières. Supposons que $\Phi(t,v)$ soit une intégrale première dans le domaine $\Omega = ((t_o,t_1),B_a^s)$, différentiable au sens de Frechet, et de plus ayant une dérivée variationnelle

$$\frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)} ,$$

c'est-à-dire :

(1.15) $$d\Phi(t,v) = \frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial t}\,dt + \int \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)}\,\delta v(\xi)d\xi$$

Pour chaque solution $V(t,\xi)$ de l'équation (1.12) on a :

(1.16) $$0 = \frac{d\Phi(t,V(t,.))}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \int \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)}\,\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi = \\ = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \int \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)}\,\alpha(\xi)V(\xi)d\xi + \int \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)}\,H(\xi,V(t,.))d\xi$$

On dira que (1.16) est une équation aux dérivées variationnelles du premier ordre. Nous allons montrer que le problème de Cauchy, pour cette équation est bien posé.

Comme les coefficients de (1.16) ne dépendent pas de t , on peut prendre pour instant initial n'importe quelle valeur de t , par exemple $t = 0$; on se donne donc

(1.17) $$\Phi|_{t=o} = \Psi(v)$$

On montrera que le problème (1.16), (1.17) est bien posé pour $t < 0$.

THÉORÈME 1.1. - On suppose que $\mathfrak{a}(\xi)$ et f vérifient les conditions (1.3), (1.6) et que la fonctionnelle $\psi(v) \in \mathfrak{A}(B^s_{\rho_1})$.

Alors il existe une fonctionnelle $\Phi(t,v)$ ayant les propriétés suivantes :

a. Il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour chaque $t \leq 0$, la fonctionnelle

$$\Phi(t,v) \in \mathfrak{A}(B^s_\rho)$$

b. Soit $\Phi_r(t,\eta_1,\dots,\eta_r)$ les fonctions obtenues en développant $\Phi(t,v)$ ((1.13')).

Il existe des constantes $C > 0$ et $\gamma > 0$ dépendant de $\mathfrak{a}(\xi)$ et de $f(Z)$, mais ne dépendant pas de t , telles que

$$(1.18) \qquad [\Phi_r(t,.)]_s \leq C\gamma^r \quad , \quad \gamma^{-1} > \rho \quad , \; -\infty < t < 0$$

c. La fonctionnelle $\Phi(t,v)$ vérifie la condition initiale (1.17)

d. Dans la boule B^{s+m}_ρ de V_{s+m} , la fonctionnelle $\Phi(t,v)$ vérifie l'équation (1.16) et est différentiable au sens de (1.15)

e. La solution $\Phi(t,v)$ du problème (1.16), possédant les propriétés a - d est unique.

DÉMONSTRATION : Rappelons que la dérivée variationnelle d'une fonctionnelle polynômiale $\Psi_r(v)$ est définie par :

$$(1.19) \quad \frac{\delta\Psi_r(v)}{\delta v(\xi)} = \sum_{\ell=1}^{r} \int \Psi^r(\eta_1,\dots,\eta_{\ell-1},\xi,\eta_{\ell+1},\dots,\eta_r)\, v(\eta_1)..v(\hat{\eta}_\ell)..v(\eta_r)d\eta_1..d\hat{\eta}_\ell..d\eta_r$$

où $v(\hat{\eta}_\ell)$ (resp. $d\hat{\eta}_\ell$) signifie que l'on doit supprimer $v(\eta_\ell)$ (resp. $d\eta_\ell$) .

Supposons qu'il existe $\Phi(t,v)$ vérifiant les propriétés a - d ; alors d'après a. :

$$(1.19') \qquad \Phi(t,v) = \sum_{r=0}^{\infty} \Phi_r(t,v) \quad , \quad \Phi_0(t,v) = \Phi_0(t) \quad .$$

En remplaçant $\Phi(t,v)$ par cette série dans l'équation (1.16) on obtient :

$$\frac{\partial\Phi_0(t)}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Phi_1(t,v)}{\partial t} - \int \frac{\delta\Phi_1(t,v)}{\delta v(\xi)}\, \mathfrak{a}(\xi)v(\xi)d\xi = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial\Phi_r(t)}{\partial t} - \int \frac{\delta\Phi_r(t,v)}{\delta v(\xi)} a(\xi)v(\xi)d\xi + \tag{1.20}$$

$$+ \sum_{k=2}^{r} \int \frac{\delta\Phi_{r-k+1}(t,v)}{\delta v(\xi)} \left(\int \delta(\xi-\eta_1-\ldots-\eta_k)c_k(\eta_1,\ldots,\eta_k,v)\, d\eta_1\ldots d\eta_k\right)d\xi = 0$$

Nous avons utilisé (1.11) pour $H(\xi,v)$. D'après (1.19) on a :

$$\int \frac{\delta\Phi_r(t,v)}{\delta v(\xi)} a(\xi)v(\xi)d\xi = \int\left(\sum_{\ell=1}^{r} a(\eta_\ell)\right)\Phi_r(t,\eta_1,\ldots,\eta_r)v(\eta_1)\ldots v(\eta_r)d\eta_1\ldots d\eta_r \quad ,$$

(1.21)

$$\int \frac{\delta\Phi_{r-k+1}(t,v)}{\delta v(\xi)} \left(\int \delta(\xi-\eta_1\ldots-\eta_k)c_k(\eta_1\ldots,\eta_k;v)d\eta_1\ldots d\eta_k\right)d\xi =$$

$$= \int \sum_{\ell=1}^{r+1-k} c_k(\eta_\ell,\ldots\eta_{\ell+k-1})\, \Phi_{r-k+1}(t,\eta_1,\ldots\eta_\ell+\ldots+\eta_{\ell+k-1},\ldots,\eta_r)v(\eta_1)\ldots v(\eta_r)d\eta_1\ldots d\eta_r$$

On déduit de (1.20), (1.21) :

$$\Phi^\circ(t) = \text{constante} \;,\; \int \left(\frac{\partial\Phi_1(t,\eta_1)}{\partial t} - a(\eta_1)\Phi_1(t,\eta_1)\right)v(\eta_1)d\eta_1 = 0 \quad ,$$

$$\int \left(\frac{\partial\Phi_r(t,\eta_1,\ldots\eta_r)}{\partial t} - \left(\sum_{\ell=1}^{r} a(\eta_\ell)\right)\Phi_r(t,\eta_1,\ldots,\eta_r) + \right. \tag{1.22}$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{r}\sum_{\ell=1}^{k} c_k(\eta_\ell,\ldots,\eta_{\ell+k-1})\Phi_{r-k+1}(t,\eta_1,\ldots\eta_\ell+\ldots+\eta_{\ell+k-1},\ldots\eta_r)\right)v(\eta_1)\ldots v(\eta_r)d\eta_1\ldots d\eta_r = 0$$

D'après la deuxième égalité on a :

$$\frac{\partial\Phi_1(t,\eta_1)}{\partial t} - a(\eta_1)\Phi_1(t,\eta_1) = 0 \quad , \tag{1.23}$$

car $v(\eta_1)$ est une fonction arbitraire de B^{s+m}_ρ .

Pour déduire de (1.22) une équation analogue à (1.23), on aura besoin des propositions suivantes

PROPOSITION 1.1. - <u>Soit</u> $K(\eta_1\ldots,\eta_r) \in \mathcal{L}^\infty(R^r)$ <u>une fonction symétrique par rapport aux</u> η_j ,

(1.24) <u>si</u> $\forall v(\xi) \in B^s_\delta$, $s \geq 0$, $\int K(\eta_1,\ldots,\eta_r)v(\eta_1)\ldots v(\eta_r)d\eta_1\ldots d\eta_r = 0$

alors $$K(\eta_1,..,\eta_r) = 0 \quad \text{presque partout dans } R^r$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'appliquer l'opérateur

$$\delta^r/\delta v(\xi_1)..\delta v(\xi_r)$$

à (1.24).

PROPOSITION 1.2. - Soit $K(\eta_1..,\eta_r)$ une fonction telle que la norme $[K]_s$ soit finie. Alors il existe une fonction $SK(\eta_1,..\eta_r)$ symétrique par rapport aux η_j , et vérifiant l'égalité

$$(1.25)\quad \int K(\eta_1,..\eta_r)v(\eta_1)..v(\eta_r)d\eta_1..d\eta_r = \int SK(\eta_1,..\eta_r)v(\eta_1)..v(\eta_r)d\eta_1..d\eta_r$$

Pour chaque fonction $F(\eta_1,..,\eta_r)$ symétrique par rapport à η_j et bornée on a :

$$(1.26)\quad \underset{\eta_1,..,\eta_r}{\text{vrai sup}}|F(\eta_1,..\eta_r)SK(\eta_1,..\eta_r)| \leqq \underset{\eta_1,..,\eta_r}{\text{vrai sup}}|F(\eta_1,..\eta_r)K(\eta_1,..\eta_r)|$$

On pose :

$$(1.27)\quad SK(\eta_1,..,\eta_r) = \frac{1}{r!}\sum_{(\ell_1,..\ell_r)\in L} K(\eta_{\ell_1},..,\eta_{\ell_r})$$

où L est l'ensemble des permutations de $(1,..,r)$. La démonstration résulte de cette formule.

Suite de la démonstration du théorème 1.1. - Si on suppose que les $\Phi_r(t;\eta_1,..,\eta_r)$ dépendent symétriquement des η_j , on déduit de (1.22) et des propositions 1.1, 1.2 :

$$(1.28)\quad \frac{\partial\Phi_r(t;\eta_1,..\eta_r)}{\partial t} - \sum_{\ell=1}^{r}\alpha(\eta_\ell))\Phi_r(t;\eta_1,..\eta_r) = G_r(t,\eta_1,..\eta_r) \quad , \quad \forall r \geqq 2$$

$$(1.29)\quad G_r(t;\eta_1,..,\eta_r) =$$

$$= -\sum_{k=2}^{r} S[\sum_{\ell=1}^{k} c_k(\eta_\ell,..,\eta_{\ell+k-1})\Phi_{r-k+1}(t;\eta_1,..,\eta_\ell+..+\eta_{\ell+k-1},..,\eta_r)]$$

où S est l'opérateur de symétrisation par rapport aux variables $\eta_1,..\eta_r$ défini par (1.27).

Puisque G_r ne dépend que des Φ_k pour $k < r$, on peut résoudre successivement les équations (1.29) en tenant compte de la condition initiale (1.17) c'est-à-dire en demandant :

$$\Phi_r\big|_{t=0} = \Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r) \tag{1.30}$$

où $\Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r)$ sont les coefficients de $\psi(v)$.

On trouve :

$$\Phi_o(t) = \Psi_o \quad , \quad \Phi_1(t,\eta_1) = e^{a(\eta_1)t}\,\Psi_1(\eta_1)$$

$$\Phi_r(t;\eta_1\dots,\eta_r) = e^{\sum\limits_{\ell=1}^{r} a(\eta_\ell)t}\Big(\Psi_r(\eta_1,\dots\eta_r) + \tag{1.31}$$

$$+\int_o^t e^{-\sum\limits_{\ell=1}^{r} a(\eta_\ell)\tau}\, G_r(\tau;\eta_1,\dots\eta_r)d\tau\Big) \quad , \quad r \geqq 2$$

Nous allons démontrer la convergence de la série (1.17) ; pour tout $r \geqq 2$ on a l'inégalité :

$$\frac{|G_r(t;\eta_1,\dots,\eta_r)|}{\prod\limits_{j=1}^{r}(1+|\eta_j|)^s\sum\limits_{j=1}^{r}\mathrm{Re}\, a(\eta_j)} \leqq$$

(1.32)

$$\leqq \frac{\sum\limits_{k=2}^{r}\ \underset{\eta_1,\dots,\eta_r}{\text{vrai sup}}\ S\sum\limits_{\ell=1}^{k}|c_k(\eta_\ell,\dots,\eta_{\ell+k-1})||\Phi_{r+1-k}(t;\eta_1,\dots,\eta_\ell+\dots+\eta_{\ell+k-1},\dots,\eta_r)|}{\prod\limits_{j=1}^{r}(1+|\eta_j|)^s\sum\limits_{j=1}^{r}\mathrm{Re}\, a(\eta_j)}$$

D'après (1.10) on a :

$$|c_k(\eta_1,\dots\eta_k)| \leqq \sum_{|\alpha_1|\leqq\sigma}\dots\sum_{|\alpha_k|\leqq\sigma}|c_k(\alpha_1,\dots,\alpha_k)||\eta_1^{\alpha_1}|\dots|\eta_k^{\alpha_k}| \tag{1.32'}$$

$$\leqq C_1 M^k\prod_{j=1}^{k}(1+|\eta_j|)^\sigma$$

Nous avons utilisé ici l'hypothèse d'analycité (1.6) qui a pour conséquence l'existence de constantes C_1 et M telles que

$$|c_k(\alpha_1,\dots\alpha_k)| \leqq C_1 M^k$$

Alors en utilisant la proposition 1.2 on voit que le deuxième membre de (1.32) est inférieur ou égal à :

$$C_2 \sum_{k=2}^{r} M^k[\Phi_{r+1-k}(t,.)]_s \ \underset{\eta_1,\dots,\eta_r}{\text{vrai sup}} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(1+|\eta_\ell+\dots+\eta_{\ell+k-1}|)^s}{\prod_{j=\ell}^{\ell+k-1} (1+|\eta_j|)^{s-\sigma} \sum_{j=1}^{r} (1+|\eta_j|)^m} \tag{1.33}$$

On déduit de l'inégalité :

$$(1+|\eta_\ell+\dots+\eta_{\ell+k-1}|) \leqq (1+|\eta_\ell|)\dots(1+|\eta_{\ell+k-1}|)$$

que (1.33) est inférieur ou égal à

$$C_2 \sum_{k=2}^{r} M^k[\Phi_{r+k-1}(t,.)]_s \ \underset{\eta_1,\dots,\eta_r}{\text{vrai sup}} \frac{\sum_{\ell=1}^{r-k+1} (1+|\eta_\ell+\dots+\eta_{\ell+k-1}|)^\sigma}{\sum_{j=1}^{r} (1+|\eta_j|)^m} \tag{1.34}$$

De l'inégalité

$$(1+|\eta_\ell+\dots+\eta_{\ell+k-1}|)^\sigma \leqq k^\sigma \sum_{j=\ell}^{\ell+k-1} (1+|\eta_j|)^m$$

il résulte que (1.34) est inférieur ou égal à

$$C_2 \sum_{k=2}^{r} M^k[\Phi_{r-k+1}]_s \ k^{\sigma+1} \tag{1.35}$$

On a ainsi démontré ((1.32)-(1.35)) l'inégalité :

$$\underset{\eta_1,\dots,\eta_r}{\text{vrai sup}} \frac{|G^r(t;\eta_1,\dots,\eta_r)|}{\prod_{j=1}^{r} (1+|\eta_j|)^s \sum_{\ell=1}^{r} \operatorname{Re} \alpha(\eta_\ell)} \leqq C_o \sum_{k=2}^{r} \lambda^k[\Phi_{r-k+1}]_s \tag{1.36}$$

où :
$$C_o\lambda^k \geqq C_2 \ M^k \ k^{\sigma+1} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ .$$

D'après (1.31) et (1.36) on a :

$$[\Phi_r(t,.)]_s \leqq$$

$$\leqq [\Psi_r(.)]_s + \underset{\eta_1,\dots,\eta_r}{\text{vrai sup}}\Big(-\int_o^t \frac{d}{d\tau} e^{\operatorname{Re} \sum_{\ell=1}^{r} \alpha(\eta_\ell)(t-\tau)} \frac{|G^r(\tau;\eta_1,\dots,\eta_r)|}{\prod_{j=1}^{r} (1+|\eta_j|)^s \sum_{\ell=1}^{r} \operatorname{Re} \alpha(\eta_\ell)} d\tau\Big) \leqq$$

$$\leqq [\Psi_r(.)]_s + C \sum_{k=2}^{r} \lambda^k \ . \sup_{t\leqq\tau\leqq 0} [\Phi_{r-k+1}(\tau,.)]_s \quad , \quad t < 0 \quad ,$$

et par conséquent :

$$(1.37)\qquad \sup_{T\leq t\leq 0}\ [\Phi_r(t,.)]_s \leq [\Psi_r(.)]_s + C_o \sum_{k=2}^{r} \lambda^k \sup_{T\leq t\leq 0}\ [\Phi_{r-k+1}(t,.)]_s$$

Supposons que l'estimation (1.18) soit déja établie pour $r \leq N-1$. D'après (1.14') et (1.37) on a :

$$\sup_{T\leq t\leq 0}\ [\Phi_N(t,.)]_s \leq \mathcal{D}\gamma_1^N + C_o \sum_{k=2}^{N} \lambda^k\, C\, \gamma^{N-k+1} \quad , \quad (\gamma_1 = \rho_1^{-1})$$

Pour γ assez grand, le membre de droite est inférieur ou égal à $C\gamma^N$. En effet, ceci a lieu, si

$$(1.38)\qquad \mathcal{D}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^N + C_o\, C \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^\ell < C$$

et pour γ grand (1.38) est satisfait. On peut donc établir par récurrence l'estimation (1.18). La série (1.19) est par conséquent absolument convergente et les assertions a et b du théorème sont établies. L'assertion c est évidemment vérifiée ((1.30)). L'assertion d se démontre de manière analogue (cf[2]). L'unicité de la solution analytique du problème de Cauchy (1.16), (1.17) résulte de l'unicité des solutions des équations ordinaires (1.28), vérifiant les données initiales (1.30).

1.2. - Cas périodique.

Les résultats du paragraphe précédent se généralisent dans le cas où on a des conditions de périodicité sur les solutions de (1.1) :

$$(1.39)\ U(t;x^1,..,x^k+2\pi,..,x^n) = U(t;x^1,...,x^k,..,x^n),\ (k=1,..,n) \quad , \quad x^j\in R\ ,(j=1,..,n)$$

La transformation de Fourier que l'on utilisera dans ce cas est la suivante :

$$(1.40)\qquad v(\eta) = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} .. \int_0^{2\pi} e^{-i\eta.x} u(x)dx = \mathcal{F}_{x\to\eta}\, u(x) \quad , \quad \eta \in \mathbb{Z}^n$$

L'équation duale de (1.1) est alors obtenue par la formule (1.12) où $\xi \in \mathbb{Z}^n$ et :

$$(1.41)\qquad H(\xi,v) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\eta_1 ..\eta_k} \delta(\xi-\eta_1-..-\eta_k) C_k(\eta_1,...,\eta_k) v(\eta_1)..v(\eta_k)$$

où

$$\delta(\xi) = 0 \ \text{ si } \ \xi \neq 0 \quad , \quad \delta(\xi) = 1 \ \text{ si } \ \xi = 0 \quad ; \quad \xi,\eta_i \in \mathbb{Z}^n$$

L'espace V_s dans lequel on se place et l'espace des fonctions $v(\xi)$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ telles que

(1.42) $$\|v(\xi)\|_s = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1+|\xi|)^s |v(\xi)| < +\infty$$

Une fonctionnelle $\psi(v(.))$ appartient à $\mathfrak{A}(B^s_a), (B^s_a = \{v(\xi) \mid \|v(\xi)\|_s < a\}$ si :

(1.43) $$\psi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\eta_1,\ldots,\eta_r} \Psi_r(\eta_1,\ldots,\eta_r) v(\eta_1)..v(\eta_r) \quad , \quad \eta_i \in \mathbb{Z}^n$$

avec

(1.43') $$[\Psi_r(.)]_s = \sup_{\eta_1,\ldots\eta_r \in \mathbb{Z}^n} \frac{|\Psi_r(\eta_1,\ldots,\eta_r)|}{\prod_{j=1}^{r} (1+|\eta_j|)^s} \leq C\,\gamma_1^r \quad , \quad (\gamma_1 = a^{-1})$$

Il est clair que si (1.43') est satisfait, alors la série (1.43) est convergente dans la boule B^s_a où $a = \gamma_1^{-1}$.

On a démontré dans [3] le résultat suivant :

LEMME 2.1. - <u>Si la série</u> (1.43) <u>est convergente dans la boule</u> $B^s_{\rho^{-1}}$ <u>et si</u> $\psi(v)$ <u>est bornée dans chaque boule</u> $B^s_{(\rho+\varepsilon)^{-1}}$, $\varepsilon > 0$, <u>alors pour chaque</u> $\delta > 0$ <u>il existe une constante</u> C_δ <u>telle que</u> :

$$[\Psi_r]_s \leq C_\delta (\rho e+\delta)^r$$

L'équation des intégrales premières $\Phi(t,v(\xi))$ est la suivante :

(1.44) $$\frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial t} + \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \frac{\delta\Phi}{\delta v(\xi)} (-\mathcal{a}(\xi)v(\xi) + H(\xi,v(.))) = 0$$

avec la condition initiale

(1.44') $$\Phi|_{t=0} = \Psi(v)$$

THÉORÈME 1.1'. - <u>On a l'analogue du théorème</u> 1.1 <u>si on remplace</u> v <u>par</u>

$$v(\xi) \quad , \quad \xi \in Z^n \quad ,$$

<u>et l'intégrale</u> $\int ..d\eta_1..d\eta_r$ <u>par la somme</u> $\sum_{\eta_1,\ldots,\eta_r}$; $(\eta_i \in \mathbb{Z}^n)$.

1.3. - Cas des systèmes.

Dans [3], on a démontré le théorème 1.1 pour des systèmes paraboliques au sens de Petrovski ([1]) et pour le système des équations de Navier-Stokes. Ce dernier système n'est pas du type parabolique, et il est nécessaire de faire quelques remarques supplémentaires pour obtenir la démonstration d'un théorème analogue au théorème 1.1.

Les équations de Navier-Stokes sont les suivantes :

$$\frac{\partial U^i(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U^j U^i}{\partial x^j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta U^i \quad (i=1,2,3) \quad x = (x^1, x^2, x^3) \tag{1.45}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U^j}{\partial x^j} = 0 \tag{1.46}$$

où $U(t,x) = (U^1(t,x), U^2(t,x), U^3(t,x))$ est le vecteur de la vitesse, p la pression, ν le coefficient de la viscosité.

Il existe une grande quantité de travaux mathématiques, consacrés à l'étude des équations de Navier-Stokes. Les travaux classiques de J. Leray au cours des années trente furent les premiers. Dans les années cinquante et soixante sont apparus d'importants travaux dans cette direction de Ladyzenskaja, Lions et d'autres auteurs.

On suppose que dans (1.44) toutes les fonctions sont périodiques avec 2π pour période ((1.39)). D'une façon bien connue on peut exclure de (3.1) la fonction $p(t,x)$, et par transformation de Fourier on trouve le système suivant :

$$\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t} = - \nu|\xi|^2 V(t,\xi) + \sum_{\eta_1,\eta_2} \delta(\xi-\eta_1-\eta_2) c(\eta_1+\eta_2)(V(t,\eta_1), V(t,\eta_2)) = 0 \tag{1.47}$$

$$- i \sum_{j=1}^{3} \xi^j V^j(t,\xi) = 0$$

où $V(t,\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi} U(t,x)$, $c(\xi)(v_1,v_2)$ est l'opérateur bilinéaire en v_1 et v_2, à valeurs dans R^3 défini par

$$\begin{gathered} c(\xi)(v_1,v_2) = (c^1(\xi)(v_1,v_2), c^2(\xi)(v_1,v_2), c^3(\xi)(v_1,v_2)) , \\ c^k(\xi)(v_1\ v_2) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} c^k_{j\ell}(\xi) v_1^j v_2^\ell , \end{gathered} \tag{1.47'}$$

(1.47') $c_{j\ell}(\xi) = i(\xi^j \delta_{k\ell} - \dfrac{\xi^k \xi^j \xi^\ell}{|\xi|^2})$, ($\delta_{k\ell}$ est le symbole de Kronecker).

Pour $\xi = 0$, le tenseur $c^k_{j\ell}$ est égal à 0 . On a :

$$\sum_{j,k,\ell} |c^k_{j\ell}(\xi)|^2 = \sum_{j,k,\ell} |\xi^j|^2 |\delta_{k\ell} - \frac{\xi^k \xi^\ell}{|\xi|^2}|^2 =$$

$$= |\xi|^2 \sum_{k,\ell} (\delta_{k\ell} - 2\,\delta_{k\ell} \frac{\xi^k \xi^\ell}{|\xi|^2} + \frac{|\xi^k|^2 |\xi^\ell|^2}{|\xi|^4}) = 2|\xi|^2$$

On a donc :

(1.48) $\|c(\xi)\| \leq \sqrt{2}|\xi|$ (où $\|\ \|$ est la norme des opérateurs dans R^3)

Il est suffisant d'étudier le problème de Cauchy (1.47) avec les données :

(1.48') $$V(t,\xi)_{|t=0} = v(\xi)$$

En effet il est bien connu que si la condition d'incompressibilité

$$\sum_{j=1}^{3} \xi^j v^j(\xi) = 0$$

est satisfaisante au moment $t = 0$, elle sera satisfaite par la solution $V(t,\xi)$ pour chaque $t > 0$.

Nous allons construire les intégrales premières du système (1.47). Elles sont les solutions de l'équation :

(1.49)
$$\frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial t} - \sum_{\xi} < \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)} , \nu|\xi|^2 v(\xi) > +$$
$$+ \sum_{\xi} < \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v(\xi)} , \sum_{\eta_1,\eta_2} \delta(\xi-\eta_1-\eta_2) c(\eta_1+\eta_2)(v(\eta_1),v(\eta_2)) > = 0$$

où par exemple

$$< \frac{\delta\Phi}{\delta v(\xi)} , v(\xi) > = \sum_{j=1}^{3} \frac{\delta\Phi(t,v)}{\delta v^j(\xi)} \cdot v^j(\xi)$$

On se donne la condition initiale

(1.50) $$\Phi|_{t=0} = \Psi(v) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_r} \Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r)(v(\eta_1),\dots,v(\eta_r))$$

où les coefficients Ψ_r sont les fonctionnelles r-linéaires sur $R^3 \times\cdot\cdot\times R^3$ (r-fois) :

(1.51) $$\Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_2)(v(\eta_1),\dots,v(\eta_r)) = \sum_{k_1=1}^{3} \cdot\cdot \sum_{k_r=1}^{3} \Psi_r(\eta_1,\cdot\cdot\eta_r;k_1,\cdot\cdot k_r) v^{k_1}(\eta_1)\cdot\cdot v^{k_r}(\eta_r)$$

On suppose que Ψ_r satisfait la condition de symétrie suivante :

$$\Psi_r(\eta_{j_1},\cdot\cdot\eta_{j_r})(v(\eta_{j_1}),\dots,v(\eta_{j_r})) = \Psi_r(\eta_1,\cdot\cdot\eta_r)(v(\eta_1),\dots,v(\eta_r))$$

où $(j_1,\dots,j_r)$ est une permutation de $(1,\dots,r)$ quelconque.

On cherche une solution analytique en v, $\Phi(t,v)$ du problème (1.49), (1.50).

Introduisons l'espace V_s des fonctions $v(\xi) = (v^1(\xi),v^2(\xi),v^3(\xi))$, telles que :

$$\|v(\xi)\|_s = \sum_{\xi} (1+|\xi|)^s \|v(\xi)\| < \infty \quad \text{où} \quad \|v(\xi)\| = \Big(\sum_{j=1}^{3} |v^j(\xi)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

On muni V_s de la norme $\| \ \|_s$.

Les normes des coefficients Ψ_r sont définies par :

$$\|\Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r)\| = \Big(\sum_{j_1=1}^{3} \cdot\cdot \sum_{j_r=1}^{3} | \Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r;j_1,\cdot\cdot j_r)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$[\Psi_r]_s = \sup_{\eta_1,\dots,\eta_r} \frac{\|\Psi_r(\eta_1,\dots,\eta_r)\|}{\prod_{j=1}^{r} (1+|\eta_j|)^s}$$

Il est clair que si

(1.52) $$[\Psi_r]_s \leq \mathcal{B}\gamma_1^r \quad , \quad \gamma_1 > 0$$

alors la série (1.50) est convergente dans $B_a^s \subset V_s$, où $a = \gamma_1^{-1}$.

On désigne par $\mathfrak{A}(B_a^s)$ la classe des fonctionnelles $\Psi(v)$, analytiques dans B_a^s , dont les coefficients Ψ_r satisfont aux estimations (1.52) avec $\gamma_1 = a^{-1}$.

THÉORÈME 1.2. - <u>On se donne une fonctionnelle</u> $\Psi(v) \in \mathfrak{M}(B^s_{\rho_1})$, $s \geq 0$. <u>Alors il existe une solution</u> $\Phi(t,v)$ <u>vérifiant les assertions</u> a)-e) <u>du théorème</u> 1.1, <u>avec des changements évidents</u>.

La démonstration est la même que celle du théorème 1.1. En effet, on cherche $\Phi(t,v)$ de la forme

$$\Phi(t,v) = \sum_{r=o}^{\infty} \sum_{\eta_1,\ldots,\eta_r} \Phi_r(t;\eta_1,\ldots,\eta_r)(v(\eta_1),\ldots,v(\eta_r)) \tag{1.53}$$

La substitution de cette série dans (1.49), (1.50) donne successivement :

$$\Phi_o = \Psi_o \quad , \quad \Phi_1(t,\eta) = e^{\nu|\eta|^2 t} \, \Psi_1(\eta) \quad ,$$

$$\Phi_r(t,\eta_1,\ldots,\eta_r)(\cdot,\ldots,\cdot) = e^{\nu \sum_{\ell=1}^{r} |\eta_\ell|^2 t} \Psi_r(\eta_1,\ldots,\eta_r)(\cdot,\ldots,\cdot) + \tag{1.54}$$
$$+ \int_o^t e^{\nu \sum_{\ell=1}^{r} |\eta_\ell|^2 (t-\tau)} G_r(\tau;\eta_1,\ldots,\eta_r)(\cdot,\ldots,\cdot)d\tau$$

où $G_r(\tau;\eta_1,\ldots,\eta_r)$ est la forme r-linéaire suivante :

$$G_r(t;\eta_1,\ldots,\eta_r) = \tag{1.55}$$
$$= S\sum_{\ell=1}^{r} \Phi_{r-1}(t,\eta_1,\ldots,\eta_\ell+\eta_{\ell+1},\ldots,\eta_r)(v(\eta_1),\ldots,c(\eta_\ell+\eta_{\ell+1})(v(\eta_\ell),v(\eta_{\ell+1})),\ldots,v(\eta_r))$$

où S est l'opérateur de symétrisation par rapport à $(\eta_1,\ldots,\eta_r)$.

Nous allons seulement indiquer les changements à effectuer dans la démonstration du théorème 1.1. Utilisant le fait que l'opérateur $c(\xi) = 0$ pour $\xi = 0$, on déduit de (1.54) que $G_r(t,0,\ldots,0) = 0, \ r \geq 2$. Alors

$$|\Phi_r(t;0,\ldots,0)| = \Psi_r(0,\ldots,0) \tag{1.56}$$

Si au moins un des vecteurs $\eta_1,\ldots,\eta_r$, $\eta_i \in \mathbb{Z}^n$ est différent de 0 , on déduit en utilisant (1.48) comme en (1.32) - (1.37), que :

$$\frac{\|G_r(t;\eta_1,\ldots,\eta_r)\|}{\sum_{j=1}^{r}(1+|\eta_j|)^s \cdot \nu \cdot \sum_{j=1}^{r}|\eta_j|^2} \leqq$$

(1.57) $$\leqq [\Phi_{r-1}]_s \cdot \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{\|c(\eta_\ell+\eta_{\ell+1})\|(1+|\eta_\ell+\eta_{\ell+1}|)^s}{(1+|\eta_\ell|)^s(1+|\eta_{\ell+1}|)^s \cdot \nu \cdot \sum_{j=1}^{r}|\eta_j|^2}$$

$$\leqq \frac{2\sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{r}|\eta_\ell|}{\nu\sum_{j=1}^{r}|\eta_j|^2}[\Phi_{r-1}]_s \quad , \quad \eta_i \neq 0$$

On a $|\eta| \leqq |\eta|^2$ si $\eta \in Z^n$ donc

(1.58) $$(1.57) \leqq \frac{2\sqrt{2}}{\nu}[\Phi_{r-1}]_s$$

On déduit de (1.54), (1.57), (1.58), comme dans la démonstration du théorème 1.1 que

$$\sup_{T\leqq t\leqq 0}[\Phi_r(t,.)]_s \leqq [\Psi_r]_s + \frac{2\sqrt{2}}{\nu}\sup_{T\leqq t\leqq 0}[\Phi_{r-1}]_s$$

La fin de la démonstration est la même que pour le théorème 1.1.

2. - DÉPENDANCE ANALYTIQUE-FONCTIONNELLE DES SOLUTIONS EN FONCTION DES DONNÉES INITIALES

Dans ce paragraphe on construit directement la solution de l'équation (1.12) dépendant des données initiales d'une manière analytique fonctionnelle. On montre ensuite que cette solution coïncide avec celle que l'on peut obtenir en utilisant une intégrale première analytique de l'équation (1.12).[1]

2.1. - Équation transformée

L'équation parabolique (1.1) (p=1) est équivalente à l'équation (1.12) :

(2.1) $$\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t} = -\alpha(\xi)V(t,\xi) + H(\xi,V(t,.))$$

où $V(t,\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}U(t,x)$.

[1] Afin de simplifier l'écriture, on se place dans le cas périodique. Tous les résultats de ce chapitre se démontrent de la même manière avec des changements évidents dans le cas non périodique.

Soit

(2.2) $$V\big|_{t=0} = v(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}U(0,x) \quad , \quad \xi \in R^n$$

la condition initiale correspondante.
La résolution du problème (2.1), (2.2) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale suivante :

(2.3) $$V(t,\xi) = e^{-\mathcal{Q}(\xi)t}\, v(\xi) + \int_0^t e^{-\mathcal{Q}(\xi)(t-\tau)}\, H(\xi,V(\tau,.))d\tau$$

On cherche la solution $V(t,\xi)$ de l'équation (2.3) sous la forme d'une série dé - pendant des données initiales de manière analytique-fonctionnelle :

(2.4) $$V(t,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\zeta_1,\dots,\zeta_k} B_k(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)v(\zeta_1)\dots v(\zeta_k)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que les coefficients B_k dépendent symétriquement des variables $\zeta_1,\dots,\zeta_k$. Pour abréger l'écriture on désigne par

$$B_k(t,\xi,\bar\zeta)v(\bar\zeta)$$

l'expression $B_k(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)v(\zeta_1)\dots v(\zeta_k)$

On pose :

(2.5) $$|B_k(.,.;\bar\zeta)|_s = \sum_{\xi}(1+|\xi|)^s \sup_{0\leq t\leq 0} |B_k(t,\xi;\bar\zeta)|$$
$$[B_k]_s = \sup \frac{|B_k(.,.;\bar\zeta)|_s}{\prod_{j=1}^{k}(1+|\zeta_j|)^s}$$

Il est clair que si on a :

(2.6) $$[B_k]_s \leq E\gamma^k \quad , \quad E > 0 \quad , \quad \gamma > 0 \quad , \quad k \in Z_+$$

alors la série (2.4) est convergente dans B_a^s , $a < \gamma^{-1}$.

THÉORÈME 2.1.- On suppose que $\|v(\xi)\|_s \leq a$ $(s \geq \sigma)$ où a est un nombre assez petit, et que $\alpha(\xi)$ et $f(Z)$ vérifient (1.3) et (1.6). Alors il existe une solution $V(t,s)$ du problème (2.1), (2.2) ou de l'équation (2.3), dépendant de $v(\xi)$ de manière analytique-fonctionnelle. Les coefficients B_k satisfont aux estimations (2.6), et la solution $V(t,\xi)$ vérifie

(2.7)
$$\sup_{0 \leq t < +\infty} \|V(t,.)\|_s \leq 2E\gamma a$$

La solution $V(t,\xi)$ est unique dans la classe de fonctions admettant le développement (2.4) dans une boule de V_s .

DEMONSTRATION : La substitution de $V(t,\xi)$ par la serie (2.4) dans l'équation (2.3) donne :

(2.7')
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\bar{\zeta}} B_k(t,\xi,\bar{\zeta})v(\bar{\zeta}) =$$

$$= e^{-\alpha(\xi)t}v(\xi) + \int_0^t e^{-\alpha(\xi)(t-\tau)} H(\xi, \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\bar{\zeta}} B_k(\tau,\xi,\bar{\zeta})v(\bar{\zeta})\, d\tau$$

D'après (1.11) on a

$$H(\xi, \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\bar{\zeta}} B_k(\tau,\xi,\bar{\zeta})v(\bar{\zeta}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{\eta_1 \ldots \eta_\ell} \delta(\xi-\eta_1-\ldots-\eta_\ell).C_\ell(\eta_1,\ldots,\eta_\ell).$$

$$.(\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{\zeta_1 \ldots \zeta_{k_1}} B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,\ldots,\zeta_{k_1})v(\zeta_1)\ldots v(\zeta_{k_1}))\ldots$$

$$\ldots(\sum_{k_\ell=1}^{\infty} \sum_{\omega_1 \ldots \omega_{k_\ell}} B_{k_\ell}(\tau,\eta_\ell;\omega_1,\ldots,\omega_{k_\ell}).v(\omega_1)\ldots v(\omega_{k_\ell}))$$

En identifiant dans (2.7) les termes de même degré en v on obtient

$$\sum_{\zeta_1} B_1(t,\xi,\zeta_1)v(\zeta_1) = e^{-\alpha(\zeta)t}v(\xi)$$

$$\sum_{\bar\zeta} B_k(t,\xi,\bar\zeta)v(\bar\zeta) = \int_0^t e^{-a(\xi)(t-\tau)} \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\eta_1..\eta_\ell} \delta(\xi-\eta_1-\dots-\eta_\ell). \tag{2.8}$$

$$\cdot \sum_{\substack{k_1+..+k_\ell=k \\ kj\geq 1}} C_\ell(\eta_1,\dots,\eta_\ell) \sum_{\zeta_j:.\zeta_k} B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,\dots,\zeta_k)\dots$$

$$..B_{k_\ell}(\tau,\eta_\ell,\zeta_{k_1+..+k_{\ell-1}+1},\dots,\zeta_k)v(\zeta_1)..v(\zeta_k)$$

En appliquant à (2.8) l'opérateur S_ζ de symétrisation par rapport aux variables $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ et en utilisant la proposition 1.1, on déduit de (2.8) :

$$B_k(t,\xi,\bar\zeta) = \int_0^t e^{-a(\xi)(t-\tau)} \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_\ell} \delta(\xi-\eta_1-\dots-\eta_\ell). \tag{2.8'}$$

$$\cdot S_\zeta \sum_{k_1+..+k_\ell=k} C_\ell(\eta_1,\dots,\eta_\ell) B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,\dots)\cdot\dots B_{k_\ell}(\tau,\eta_\ell;\dots,\zeta_k)d\tau$$

D'aprés (2.8) on a

$$B_1(t,\xi,\bar\zeta_1) = e^{-a(\xi)t}\, \delta(\xi-\bar\zeta_1).$$

$$|B_k(t,\xi,\bar\zeta)| \leq \int_0^t e^{-c^2(1+|\xi|)^m(t-\tau)} \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_\ell} \delta(\xi-\eta_1-\dots-\eta_\ell). \tag{2.9}$$

$$\cdot|S \sum_{k_1+..+k_\ell=k} C_\ell(\eta_1,\dots,\eta_\ell)(B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,\dots)\dots B_{k_\ell}(\tau,\eta_\ell;\dots,\zeta_k))|d\tau$$

$$\leq \frac{C}{(1+|\xi|)^m} \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_\ell} \delta(\xi-\eta_1-\dots-\eta_\ell) \sup_{0\leq\tau\leq t} |S \sum_{k_1+..+k_\ell=k} C_\ell(\eta_1,\dots,\eta_\ell)$$

$$B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,..)\dots.|$$

En multipliant (2.9) par $(1+|\xi|)^s$, en sommant sur ξ et en prenant le sup pour $t \geq o$ on obtient

(2.10) $$|B_k(\cdot,\cdot;\bar{\zeta})|_s \leq c \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_\ell} (1+|\eta_1+\dots+\eta_\ell|)^{s-m}.$$

$$\cdot \sup_{t\geq 0} |S \sum_{k_1+\dots+k_\ell=k} C_\ell(\eta_1,\dots,\eta_\ell) B_{k_1}(t,\eta_1;\zeta_1,\dots)\dots B_{k_\ell}(t,\eta_\ell;\dots\zeta_k)|$$

$$\leq C' \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_\ell} (1+|\eta_1+\dots+\eta_\ell|)^{s-m} M^\ell \prod_{j=1}^{\ell} (1+|\eta_j|)^{\sigma}.$$

$$\cdot \sup_{t\geq 0} S_\zeta |B_{k_1}(t,\eta_1;\zeta_1,\dots)\dots B_{k_\ell}(t,\eta_\ell;\dots,\zeta_k)|$$

où on a utilisé (1.32').Il est clair que

$$(1+|\eta_1+\dots+\eta_\ell|)^{s-m} \prod_{j=1}^{\ell} (1+|\eta_j|^{\sigma} \leq \prod_{j=1}^{\ell} (1+|\eta_j|)^{s_1}$$

où $s_1 = \max(\sigma, s-m+\sigma)$. Alors d'après (2.10)

(2.11) $$|B_k(\cdot,\cdot;\bar{\zeta})|_s \leq C' \sum_{\ell=2}^{k} M^\ell \sum_{\eta_1\dots\eta_\ell} \prod_{j=1}^{\ell} (1+|\eta_j|)^{s_1}.$$

$$\cdot \sum_{k_1+\dots+k_n=k} S_\zeta \sup_{t\geq 0} |B_{k_1}(t,\eta_1;\zeta_1,\dots)|\dots|B_{k_\ell}(t,\eta_\ell;\dots,\zeta_k)|$$

Comme l'opérateur S s'applique aux variables ζ_j, il commute avec la sommation sur k_j et en utilisant le fait que $s_1 \leq s$, on déduit de (2.11).

(2.12) $$|B_k(\cdot,\cdot;\bar{\zeta})|_s \leq C_2 \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{k_1+\dots+k_\ell=k} M^\ell |B_{k_1}(\cdot,\cdot;\zeta_1,\dots)|_s \dots |B_{k_\ell}(\cdot,\cdot;\dots\zeta_n)|_s$$

En divisant (2.12) par $\prod_{j=1,\dots,k} (1+|\zeta_j|)^s$ et en prenant le $\sup_{\zeta_1,\dots,\zeta_k}$ de (2.12), on obtient

(2.13) $$[B_k]_s \leq C_2 \sum_{\ell=2}^{k} M^\ell \sum_{k_1+\dots+k_\ell=k} [B_{k_1}]_s \dots [B_{k_\ell}]_s$$

On va démontrer les estimations (2.6). Introduisons les nombres

(2.14) $$Q_1 = [B_1]_s,\quad Q_k = C_2 \sum_{\ell=2}^{k} M^\ell \sum_{k_1+\dots+k_\ell=k} Q_{k_1}\dots Q_{k_\ell}$$

On vérifie, sans peine, par recurrence, que $[B_k]_s \leq Q_k (k=1,2,\dots)$.

Il suffit donc de démontrer, que

(2.15) $$Q_k \leq E\gamma^k$$

Posons $$\lambda(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j t^j$$

Alors les relations récurrentes (2.14) sont équivalentes à l'équation suivante pour $\lambda(t)$:

(2.16) $$G(t,\lambda) = \lambda - Q_1 t - C_2 \sum_{\ell=2}^{\infty} M^{\ell}\lambda^{\ell} = 0$$

La fonction $G(t,\lambda)$ est analytique en t et λ, pour $|\lambda| < M^{-1}$, et vérifie les égalités :

$$G(t,\lambda)\Big|_{\substack{t=0\\ \lambda=0}} = 0, \qquad {\partial G}/{\partial\lambda}\Big|_{\substack{t=0\\ \lambda=0}} = 1$$

Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une solution $\lambda=\lambda(t)$ unique de l'équation (2.16), égale à 0 pour $t=0$, analytique dans un voisinage de 0.

Il est clair que les coefficients Q_k de $\lambda(t)$ vérifient (2.15), pour E et γ convenables.

Designons par :

$$|||V(t,\xi)|||_s = \sum_{\xi} (1+|\xi|)^s \sup_{t\geq 0}|V(t,\xi)|$$

D'après (2.4) et (2.6) on a

$$|||V(t,\xi)|||_s \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\bar\zeta} |B_k(\cdot,\cdot;\bar\zeta)|_s |v(\zeta_1)|\dots|v(\zeta_k)| \leq$$

(2.17) $$\leq \sum_{k=1}^{\infty} [B_k]_s ||v||_s^k \leq E \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k ||v||_s^k$$

Alors pour $||v||_s < a$, $a < \gamma^{-1}$ la dernière série est convergente, et pour a assez petit

(2.18) $$|||V(t,\xi)|||_s \leq 2 E \gamma a$$

Choisissons a tel que $2E\gamma a < 1$. Alors, d'après (1.32') et (1.11)

$$|||\ H(\xi, V(t,.))|||_{s-\sigma} \leq C_1 \sum_{k=2}^{\infty} M^k |||V(t,\xi)|||_s^k < +\infty$$

On voit alors sans peine, que la substitution de la série (2.4) dans (2.3) donne des series absolument convergentes pour $||v(\xi)||_s < a$ et il est clair que $V(t,\xi)$ est la solution de (2.3). Comme

$$\sup_{t\leq 0} ||\, V\,(t,.)||_s \leq |||V(t,\xi)|||_s ,$$

on déduit (2.7) de (2.17) . On démontre sans peine, que la solution $V(t,\xi)$ de l'équation (2.3) vérifie (2.1) et (2.2). ([3]).

2.2. Equation initiale

D'après (2.4) on peut calculer le developpement correspondant de la solution $U\,(t,x)$ de l'équation (1.1) avec comme donnée initiale $U_{|\,t=o} = u(x)$.

En effet d'après (2.17).

$$\sum_{k=1} \sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_k} |B_k(.,.,\zeta_1,..;\zeta_k)|_s |v(\zeta_1)|..|v(\zeta_k)| < +\infty$$

En appliquant à (2.4) l'opérateur $F_{\xi\to x}$, on obtient

(2.19)
$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_k} L_k(t,x;\zeta_1,\ldots,\zeta_k)v(\zeta_1)..v(\zeta_k)$$

où
$$U(t,x) = F_{\xi\to x}\, V(t,\xi), L_k(t,x,\zeta_1,..) = F_{\xi\to x} R_k(t,\xi;\zeta_1,..)$$

On déduit de (2.6) que

$$|L_k(t,x;\zeta_1,\ldots,\zeta_k)| \leq C \prod_{J=1}^{k} (1+|\zeta_j|)^s$$

Alors, d'après l'égalité de Parseval généralisée , on a

(2.20)
$$\sum_{\zeta_1,\ldots,\zeta_k} L_k(t,x;\zeta_1,\ldots,\zeta_k)v(\zeta_1)..v(\zeta_k) =$$

$$= \int_o^{2\pi} .. \int_o^{2\pi} G_k\,(t,x;y_1,\ldots,y_k)u(y_1)..u(y_k)dy_1..dy_k$$

Les G_k sont en général des distributions et il faut considérer la dernière intégrale comme la valeur de la distribution G_k pour la fonction $u(y_k)$ appartenant à V_s . On déduit alors de (2.19) et (2.20)

(2.21)
$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_o^{2\pi} \int_o^{2\pi} G_k(t,x;y_1,\ldots,y_k)u(y_1)..u(y_k)dy_1..dy_k$$

Cette série est convergente pour $t \geqq 0$ et $||u||_s < a$. On a donc le

THEOREME 2.1'. - <u>Sous les conditions du théorème 2.1 la fonction</u> $U(t,x)$ <u>peut-être développée en série analytique fonctionnelle par rapport à</u> $u(x) = U(t,x)|_{t=0}$ <u>convergente pour</u> $t \geqq 0$ <u>et</u> $||u||_s < a$

2.3 Opérateur S_t

Soit S_t l'opérateur d'évolution associé à (2.1), c'est à dire

$$S_t v(\xi) = V(t,\xi) \ , \ v(\xi) = V(t,\xi)|_{t=0} \tag{2.22}$$

où $V(t,\xi)$ est la solution de (2.1).

On suppose que $v(\xi) \in B_a^s$, où a est choisi comme dans le théorème 2.1. Soit $\Psi(v)$ une fonctionnelle analytique dans $B_{\rho_1}^s, \rho_1 > 2E\gamma \cdot a$, soit $\Phi(-t,v), t > 0$ la solution de l'équation (1.44), satisfaisant à

$$\Phi(0,v) = \Psi(v) \ , \ v \in B_\delta^{s+m} \tag{2.23}$$

où δ est choisi comme dans le théorème 1.1'. Sans perte de généralité on peut supposer que $\delta = 2E\gamma a$ (on prend a assez petit)

THEOREME 2.2. - <u>Pour</u> $v \in B_a^s$ <u>on a</u>

$$\Phi(-t,v) = \Psi(S_t v) \tag{2.24}$$

<u>c'est à dire que</u> $\Psi(S_t v)$ <u>coincide avec l'intégrale première correspondante</u>

Demonstration : Supposons d'abord que $v \in B_a^{s+m}$. Alors d'après le théorème 1.1, d, $\Phi(-t,v)$ est différentiable au sens de Frechet, et d'après [2],

$$V(t,\xi) \in C^1(0 \leq \tau \leq t; V_s) \ .$$

Alors pour $0 \leqq \tau \leqq t$:

$$\frac{d}{d\tau} \Phi(-t+\tau, V(\tau,.)) = \frac{\partial \Phi(-t+\tau, V(\tau,.))}{\partial \tau} + \tag{2.25}$$

$$+ \sum \frac{\partial \Phi(-t+\tau, V(\tau,.))}{\partial v(\xi)} \frac{\partial V(\tau,\xi)}{\partial \tau}$$

Substituant à $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ son expression tirée de l'équation (2.1), on vérifie que

$$\frac{d\,\Phi(-t+\tau, V(\tau,.))}{d\,\tau} = 0, 0 \leq \tau \leq t .$$

On en déduit que $\Phi(-t+\tau\ , V(\tau,.)) =$ Const, $0 \leq \tau \leq t$.

On a donc

$$\Phi\ (-t, V(0,.)) = \Phi\ (0, V(t,.)) = \Psi(S_t v(.)) \tag{2.25'}$$

On démontre par continuité que (2.25') a lieu pour $v \in B_a^s$ ([2]).

2.4 Utilisation de l'équation des intégrales premières.

On peut obtenir le développement (2.4) à l'aide des intégrales premières. En effet soit $\Phi_\xi(-t,v)$ la solution de l'équation des intégrales premières (1.44)

($t > 0$, $v \in B_\delta^s$) vérifiant

$$\Phi_\xi(0,v) = \Psi_\xi(v) = v\ (\xi) \tag{2.26}$$

Notons que $\psi_\xi(v)$ est alors une fonctionnelle linéaire et donc analytique dans tout l'espace V_s .

PROPOSITION 2.1 - Si on pose $V(t,\xi) = \Phi_\xi(-t,v)$ la fonction $V(t,\xi)$ est la solution de l'équation (2.1) vérifiant les données initiales :

$$V(0,\xi) = v\ (\xi)$$

En effet d'après (2.24) on a

$$\Phi_\xi(-t,v) = \Psi_\xi(S_t v) = V(t,\xi).$$

D'après le théorème 11 on peut développer Φ_ξ en série analytique - fonctionnelle de v :

$$\Phi_\xi(-t,v) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_r} \Phi_r(-t,\xi;\eta_1,\dots,\eta_r) v(\eta_1)\dots v(\eta_r)$$

où les noyaux sont définis en un point ξ par les formules (1.31) . Il faut remarquer que les coéfficients $\Phi_r(-t,\xi;\ \eta_1,\dots,\eta_r)$ coincident avec les coéfficients

$B_r(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_r)$ de (2.4) parce que le développement de $V(t,\xi)$ en série analytique-fonctionnelle est unique. Mais les formules recurrentes par lesquelles sont définis ces coefficients sont différentes. Il y a des problèmes, comme nous le verrons plus loin, où il est plus commode d'utiliser les formules (1.31) définissant

$\Phi_r(t,\xi;\eta_1,\dots,\eta_r)$, que les formules (2.8') définissant $B_r(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_r)$.

2.5 Cas des équations de Navier-Stokes.

Tous les résultats de ce paragraphe se généralisent au cas des systèmes paraboliques et des équations de Navier-Stokes. Le système de Navier-Stokes (1.47) avec les données initiales (1.48') est équivalent au système des équations intégrales suivantes

(2.26)
$$V(t,\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t} v(\xi) +$$
$$+ \int_0^t e^{-\nu|\xi|^2(t-\tau)} \sum_{\eta_1,\eta_2} \delta(\xi-\eta_1-\eta_2) c(\eta_1+\eta_2)(v(\tau,\eta_1),v(\tau,\eta_2))d\tau$$

On cherche une solution $V(t,\xi) = (V^1(t,\xi), V^2(t,\xi), V^3(t,\xi))$ de ce système qui soit une fonctionnelle analytique des données initiales

$$V_{|t=0} = v(\xi) :$$

c'est à dire :

(2.27)
$$V(t,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\zeta_1,\dots,\zeta_k} B_k(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)(v(\zeta_1),\dots,v(\zeta_k))$$

où

$$B_k(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)(.)=(B_k^1(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)(.),\dots,B_k^3(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)(.))$$

$$B_k^{\ell}(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)(w_1,\dots,w_k) =$$

$$\sum_{j_1=1}^{3} \dots \sum_{j_k=1}^{3} B_k^{\ell}(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k;j_1,\dots,j_k) w_1^{j_1} \dots w_k^{j_k}$$

Donc $B_k(t,\xi,\zeta_1,\dots,\zeta_k)(.)$ est un opérateur k-linéaire à valeurs danc $\mathbb{C}^3$:

$$B_k(t,\xi,\zeta_1,\dots,\zeta_k) : [\mathbb{C}^3]^k \to \mathbb{C}^3 :$$

On suppose que

$$B_k(t,\xi,\zeta_{j_1},\dots,\zeta_{j_k}) v(\zeta_{j_1}),\dots,v(\zeta_{j_k}) = B_k(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)(v(\zeta_1),\dots,v(\zeta_k))$$

où $(j_1,\dots,j_k)$ est une permutation quelconque de $(1,\dots,k)$

On désigne par

$$||B_k(.,.,\zeta_1,\dots,\zeta_k)||_s = \sum_{\xi} \sup_{0\leq t<+\infty} || B_k(t,\xi;\zeta_1,\dots,\zeta_k)||(1+|\xi|)^s$$

$$[B_k]_s = \sup_{\zeta_1,\dots,\zeta_k} \frac{||B_k(.,.;\zeta_1,\dots,\zeta_k)||}{\prod_{j=1}^{k} (1+|\zeta_j|)^s}$$

THEOREME 2.3 - Soit $v(\xi)\in B^s_a$, $a < \frac{\nu}{4\sqrt{2}}$ $(s \geqq 0)$.

Alors il existe une solution $V(t,\xi)$ du système (2.26) qui pour chaque $t>0$, se développe en série (2.27) . Pour chaque $b > \frac{4\sqrt{2}}{\nu}$, il existe une constante E telle que

(2.28) $$[B_k]_s \leqq E\, b^k$$

La solution $V(t,\xi)$ vérifie l'estimation

(2.29) $$\sup_{t\geqq 0} \| V(t,.)\|_s < 2a$$

Pour $s \geqq 1$, $V(t,\xi)$ est la solution du problème de Cauchy (1.47),(1.48') (au sens classique).

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.1. Substituant la serie (2.27) dans (1.47), on obtient

$$B_1(t,\xi,\zeta) = e^{-\nu|\xi|^2 t}\,\delta(\xi-\zeta)\,E$$

où E désigne l'identité, Pour $k>1$, si on note

$$B_k(t;\xi,\zeta_1,..,\zeta_k) = B_k(t,\xi;\bar{\zeta})$$

on obtient

(2.30) $$B_k(t,\xi,\bar{\zeta})\,(.,..,.) = \int_0^t e^{-\nu|\xi|^2(t-\tau)} \sum_{\eta_1,\eta_2} \delta(\xi-\eta_1-\eta_2).$$

$$\circ S_{\zeta_1,\dots,\zeta_k} \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1\geqq 1,k_2\geqq 1}} C(\eta_1,\eta_2)(B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,..),B_{k_2}(\tau,\eta_2;..\zeta_k))(.,..,.)d\tau$$

où S est l'opérateur de symétrisation en $\zeta_1,\dots,\zeta_k$,

$$C(\eta_1,\eta_2)(B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,..,\zeta_{k_1}),B_{k_2}(\tau,\eta_2;\zeta_{k_1+1},..,\zeta_k))v(\zeta_1),..,v(\zeta_k)=$$

$$= c(\eta_1+\eta_2)(B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,..,\zeta_{k_1})(v(\zeta_1),..,v(\zeta_{k_1})),$$
$$B_{k_2}(\tau,\eta_2;\zeta_{k_1+1},..,\zeta_k)(v(\zeta_{k_1+1}),..,v(\zeta_k)))$$

On remarque, que $B_k(t,\xi,\bar{\zeta})|_{\xi=0} = 0$ pour $k>1$. En effet pour $\xi=0$ la somme en η_1,η_2 dans (2.30) est prise pour $\eta_1+\eta_2=0$. Mais d'après (1.47'),(1.47") l'opérateur $c(\eta_1+\eta_2)$ est nul. On déduit de (2.30) que :

(2.31)
$$\sup_{t\geq 0} \|B_k(t,\xi;\bar{\zeta})\| \leq \frac{1}{\nu|\xi|^2} \sum_{\eta_1,\eta_2} \delta(\xi-\eta_1-\eta_2)\cdot$$

$$\cdot \sup_{t\geq 0} \|S \sum_{k_1+k_2=k} c(\eta_1+\eta_2)(B_{k_1}(\tau,\eta_1;\zeta_1,\ldots); B_{k_2}(\tau,\eta_2;\ldots,\zeta_k))\|, \xi \neq 0$$

Pour $\xi = 0$ le membre de droite est égal à 0, car $c(\eta_1+\eta_2)=0$ pour $\eta_1+\eta_2=0$.

En multipliant (2.31) par $(1+|\xi|)^s, s \geq 0$, et en sommant en ξ, on obtient

$$\|B_k(\cdot,\cdot;\bar{\zeta})\|_s \leq \frac{1}{\nu} \sum_{\eta_1,\eta_2} (1+|\eta_1+\eta_2|)^s\cdot$$

$$\cdot \sup_{t\geq 0} \| S \sum_{k_1+k_2=k} c(\eta_1+\eta_2)(B_{k_1}(t,\eta_1;\zeta_1,\ldots), B_{k_2}(t,\eta_2;\ldots\zeta_k))\| \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\nu} \sum_{\eta_1,\eta_2} (1+|\eta_1|)^s(1+|\eta_2|)^s\cdot$$

$$\cdot \sum_{k_1+k_2=k} \sup_{t\geq 0} \|B_{k_1}(t,\eta_1;\zeta_1,\ldots)\|\cdot\|B_{k_2}(t,\eta_2;\ldots,\zeta_k)\|$$

La suite de la démonstration coincide avec la fin de la démonstration du théorème 2.1

Les points 2,3,4,5 se généralisent au cas des équations de Navier-Stokes d'une façon évidente

3. - FONCTIONS DE CORRELATION DE LA SOLUTION STATISTIQUE

3.1. Developpement pour l'équation transformée

Soit $\mu_o(dv)$ une mesure de probabilité, définie sur la tribu des ensembles $\omega \subset V_s$. La solution statistique de l'équation 2.1 (ou(1.1)) est ([4],[5]) la mesure $\mu_t(dv)$, dépendant de t, vérifiant

$$(3.1) \qquad \mu_t(\omega) = \mu_o(S_t^{-1}\omega)$$

où S_t est l'opérateur d'évolution en t, défini au §2, $S_t^{-1}\omega = \{v \in V_s : S_t v \in \omega\}$. Dans le cas où l'opérateur S_t est défini seulement dans une boule B_a^s *), nous définissons la solution statistique $\mu_t(\omega)$ comme la mesure vérifiant

$$(3.2) \qquad \mu_t(\omega) = \mu_o\,(S^{-1}\,(\omega \cap Q_t)), \quad \text{où} \quad Q_t = S_t B_a^s$$

au §2 on a démontré que l'opérateur parabolique (1.1) (où(2.1)), satisfaisant aux conditions du théorème 2.1, il existe un opérateur d'évolution S_t, défini dans la boule B_a^s avec a convenable. On en déduit que si on considère un mesure initiale $\mu_o(dv)$ ayant son support dans la boule B_a^s, il existe une solution statistique au sens de (3.2), ayant son support dans B_ρ^s où $\rho = 2\,E\,\gamma\,a$. (d'après (2.7) $S_t B_a^s \subset B_\rho^s$).

Dans les applications, les fonctions de correlation de la solution statistique $\mu_t(dv)$, jouent un rôle important. On va donner des formules qui relient les fonctions de correlation de la solution $\mu_t(dv)$ et celles de la mesure initiale $\mu_o(dv)$.

Théorème 3.1. -<u>Soit</u> $\mu_o(d\omega)$ <u>une mesure dont le support est contenu dans</u> B_a^s , <u>et</u> $\mu_t(d\omega)$ <u>la solution statistique correspondante</u>. <u>Soit</u> $\Phi(-t,v)$ $(t>0)$ <u>la solution analytique du problème de Cauchy</u> (1.44),(1.44'), <u>qui se développe en série</u> (1.53), <u>convergente dans</u> B_a^s, <u>et où la donnée initiale</u> $\Psi(v) = \Phi(-t,v)|_{t=0}$ <u>est une fonctionnelle analytique dans</u> $B_{\rho_1}^s$ où $\rho_1 = 2\,E\,\gamma\,a$.(<u>comme dans le théorème 2.1</u>). <u>Alors</u> l'identité suivante a lieu :

$$(3.3) \qquad \int \Psi(v)d\mu_t(dv) = \int \Phi(-t,v)\mu_o(dv)$$

---

*) Dans ce paragraphe , B_a^s désigne la boule fermée

$$B_a^s = \{v \in V_s,\ ||v||_s \leq a\}$$

En effet d'après (2.24) , $\Phi(-t,v) = \Psi(S_t v)$. Alors il suffit de faire la substitution $v_1 = S_t v$ dans la dernière intégrale de (3.3).

On appelle

$$(3.4) \qquad M_t(\xi_1,..,\xi_k) = \int v(\xi_1)..v(\xi_k)\mu_t(dv)$$

la fonction de correlation d'ordre k de la mesure $\mu_t(dv)$ ou le moment d'ordre k de la mesure.

THEOREME 3.2. <u>Soit</u> $\mu_o(\omega)$ <u>et</u> $\mu_t(\omega)$ <u>comme dans le théorème</u> 3.1, <u>et</u> $\Phi(-t,\xi_1,..,\xi_k;v)$ <u>la solution analytique de l'équation</u> (1.44) <u>avec la condition initiale</u> :

$$(3.5) \qquad \Phi(0,\xi_1,..,\xi_k;v) = \Psi(v) = v(\xi_1)...v(\xi_k)$$

<u>Alors pour</u> $t > 0$ <u>on a</u>

$$(3.6) \qquad M_t(\xi_1,..,\xi_k) = \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{\eta_1,...,\eta_k} \Phi_r(-t,\xi_1,..,\xi_k;\eta_1,...,\eta_r)M_o(\eta_1,..,\eta_r)$$

<u>où</u> $\Phi_r(-t,\xi_1,....,\xi_k;\eta_1,..\eta_r)$ <u>sont les coéfficients du développement en</u> v <u>de la fonctionnelle</u> $\Phi(-t,\xi_1,..,\xi_k,v)$, <u>qui sont définis par les formules</u> (3.5) <u>et</u> $M_o(\eta_1,..,\eta_r)$ la fonction de correlation d'ordre r de la mesure $\mu_o(\omega)$.

<u>Démonstration</u> Pour simplifier l'écriture notons

$$(\xi_1,..,\xi_k) = \overline{\xi}(k);(\eta_1,..,\eta_k) = \overline{\eta}(k) \quad ; \quad v(\eta_1)..v(\eta_k) = v(\overline{\eta}(k))$$

Soit

$$(3.7) \qquad \Phi(-t,\overline{\xi}(k);v) = \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{\overline{\eta}(r)} \Phi_r(-t,\overline{\xi}(k);\overline{\eta}(r))v(\overline{\eta}(r))$$

le développement de la solution Φ de l'équation (1.44) , vérifiant (3.5) . Alors, on déduit de (3.5) que

$$\Phi_r(0,\overline{\xi}(k),\overline{\eta}(r)) = 0 \quad \text{pour } r \neq k ,$$

$$\Phi_k(0,\overline{\xi}(k),\overline{\eta}(k)) = \delta(\eta_1-\xi_1)...\delta(\eta_k-\xi_k)$$

(δ symbole de Kronecker). D'après la formule analogue à (1.31) on voit que la sommation dans (3.6) commence à $r = k$, car $\Phi_r(\ ) = 0$ pour $r < k$. En remplacant dans le membre de gauche de (3.3), $\Phi(-t,v)$ par l'expression (3.5) et dans le membre de droite $\Phi(-t,v)$ par l'expression (3.7), on obtient (3.6) . La série (3.6) est absolument convergente si la mesure $\mu_o(\omega)$ a son support dans B_a^s .

En effet, pour $||v||_s < a_1 < \gamma^{-1}$,

$$\sum_r \sum_{\eta_1,\dots,\eta_r} |\Phi_r(-t,\bar{\xi}(k),\bar{\eta}(r))M_o(\eta_1,\dots,\eta_r)| \leqq$$

$$\leqq \sum_r \sum_{\eta_1,\dots,\eta_r} \frac{|\Phi_r(-t,\bar{\xi}(k),\bar{\eta}(r)|}{\prod_{j=1}^{r}(1+|\eta_j|)^s} \int \prod_{j=1}^{r}(1+|\eta_j|)^s |v(\eta_1)|\dots|v(\eta_r)|\mu_o(\omega)$$

$$\leqq C\sum_r \gamma^r . a_1^r < \infty$$

3.2 Développement pour l'équation initiale

Des développements analogues à (3.6) ont lieu pour les fonctions de corrélation de la solution statistique de l'équation initiale

(3.8) $$\mathcal{H}_t(x_1,\dots,x_r) = \int \mu(x_1)..u(x_r)\tilde{\mu}_t(du)$$

où $\tilde{\mu}_t(du) = \mu_t(dv), t \geqq 0$, si du et dv sont les éléments correspondants par la transformation de Fourier $\ddot{F}$ ($F_{x\to\xi} u(x) = v(\xi)$).

En appliquant $F_{\xi_1\to x_1},\dots,F_{\xi_k\to x_k}$ à (3.6) on obtient

$$\mathcal{H}_t(x_1,\dots,x_k) = \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_r} \Lambda_r(-t,x_1,\dots,x_k;\eta_1,\dots,\eta_r)M_o(\eta_1,\dots,\eta_r)$$

où $$\Lambda_r(-t,x_1,\dots,x_k;\eta_1,\dots,\eta_r) = F_{\xi_1\to x_1}..F_{\xi_k\to x_k}\Phi_r(-t,\xi_1,\dots,\xi_k;\eta_1,\dots,\eta_r)$$

D'après l'égalité de Parseval (généralisée), on a

(3.8') $$\mathcal{H}_t(x_1,\dots,x_k) = \sum_{r=k}^{\infty} \int_o^{2\pi}\dots\int_o^{2\pi} K_r(-t,x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_r)M_o(y_1,\dots,y_r)dy_1..dy_r$$

où $K_r(\ ) = F^{-1}_{\eta_1\to y_1}..F^{-1}_{\eta_r\to y_r}\Lambda_r(\ )$ sont en général des distributions (comme en 2.2)

THEOREME 3.3. - Sous les hypothèses du théorème 3.2 la fonction de corrélation $\mathcal{H}_t(x_1,\dots,x_k)$ se développe pour chaque $t \geqq 0$ en série (3.8) par rapport aux fonctions de corrélation $\mathcal{H}_o(y_1,\dots,y_r)$ de la mesure initiale

3.3 Fonctionnelle caractéristique

Elle est définie par la formule suivante

(3.9) $$\chi(t,w(.)) = \int \exp\,(i\sum_{\xi} v(\xi).w(\xi))\mu_t(dv)$$

où $v(\xi) \in V_s$ et $w(\xi)$ est une fonction arbitraire sur Z^n, dont la norme suivante est finie :

$$[w]_s = \sup_{\eta} \frac{|w(\eta)|}{(1+|\eta|)^s}$$

La fonctionnelle caractéristique $\chi(t,w)$ est la solution de l'équation de Hopf [4].

THEOREME 3.4. -Sous les hypothèses du théorème 3.1 la fonctionnelle caractéristique $\chi(t,w)$ de la solution stastistique $\mu_t(dv)$ peut être développée en serie absolument convergente

(3.10) $$\chi(t,w) = \Phi_{o,w}(-t) + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\eta_1,\dots,\eta_r} \Phi_{r,w}(-t,\eta_1,\dots,\eta_r)\, M_o(\eta_1,\dots,\eta_r)$$

où $\Phi_{r,w}(-t,\eta_1,\dots,\eta_r)$ sont les coefficients du développement de la fonctionnelle analytique dans B^s_a, $\Phi_w(-t,v)$ solution de l'équation (1.44) , vérifiant

$$\Phi_w(o,v) = \exp\,(i\sum_{\xi} v(\xi)w(\xi)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\,(\sum_{\xi} v(\xi)w(\xi))^n$$

Les coefficients $\Phi_{r,w}(-t,\eta_1,\dots,\eta_r)$ sont définis par les équations (1.28) et les données initiales :

$$\Phi_{r,w}(o,\eta_1,\dots,\eta_r) = \frac{i^r}{r!}\, w(\eta_1)..w(\eta_r)K(\eta_1,\dots,\eta_r)$$

où $K(\eta_1,\dots,\eta_r)w(\eta_1)..w(\eta_r)$ est le coefficient de $v(\eta_1)..v(\eta_r)$ dans $(\sum_{\xi} v(\xi)w(\xi))^r$

Pour la démonstration il suffit décrire $\Phi(o,v) = \exp i\sum_{\xi} v(\xi)w(\xi)$ dans (3.3) et le membre de gauche de (3.3) devient $\chi(t,w)$. Dans le membre de droite de (3.3) on a $\Phi(-t,v) = \Phi_w(-t,v)$, vérifiant l'énoncé du théorème. Le résultat de l'intégration de la fonctionnelle $\Phi_w(-t,v)$ par la mesure $\mu_o(d\omega)$ coincide avec le membre de droite de (3.10).

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] J.G. PIETROVSKI. Sur le problème de Cauchy pour les systèmes linéaires des équations aux dérivées partielles dans le domaine des coefficients non analytiques, Bull. de l'Université de Moscou, 1:7 (1938) 1-72.

[2] M.I. VISIK et A.V. FOURSIKOV. Intégrales premières analytiques des équations paraboliques non linéaires et leurs applications Mathemat. Sbornik 92 (134) : 3 (11) (1973), 347-372.

[3] M.I. VISIK et A.V. FOURSIKOV. Intégrales premières analytiques des systémes des équations aux dérivées partielles paraboliques au sens de Pietrovski, et leurs applications, Ouspekhi Math. Nauk N° 2 (1974).

[4] E. HOPF. Statistical hydrodinamics and functional calculus, J. Rational Mech. Anal. V.1 (1952) 87-123.

[5] C. FOIAS. Les solutions statistiques des équations d'évolution non linéaires, Mathématique 17 : 3 (1973) 90-113.

[6] V.I. TATARSKI. Applications des méthodes de la théorie des quantas au problème de turbulence dégénérée, Journ. Exper. Theor. Phys. 42, N° 5 (1962), 1386-1396.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER