Robert Berzin
Jean Vaillant

# Paramétrix du problème de Cauchy pour un système faiblement hyperbolique à caractéristiques multiples

*Séminaire Jean Leray*, nº 1 (1973-1977), exp. nº 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1977___1_A5_0>

# PARAMETRIX DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UN SYSTÈME FAIBLEMENT HYPERBOLIQUE A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

par Robert BERZIN et Jean VAILLANT

## 1. Notations et hypothèses :

$h = (h^A_B(x,D))$ désigne un opérateur différentiel matriciel d'ordre $\leq t$, $\mathcal{C}^\infty$ $t \geq 1$, $1 \leq A \leq m$, $1 \leq B \leq m$, $x \in [0,T] \times X'$, $T > 0$, $X'$ variété compacte $\mathcal{C}^\infty$, de dimension $n$.
On notera $((x^0, x^1, \ldots, x^n), (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n))$ les coordonnées locales de $(x, \xi) \in T^*(X)$.
$(H^A_B(x,\xi))$ est le symbole principal de $h$ au sens suivant : pour chaque $x$ $H^A_B(x,\xi)$ est le symbole principal de $h^A_B$ si celui-ci est d'ordre $t$, $0$ sinon et dét $(H^A_B(x,\xi))$ n'est pas identiquement nul.

1) On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\sigma$, et des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $x$, polynômiales en $\xi$ et irréductibles sur $\mathbb{R}$ pour tout $x$, $H_0, H_1, \ldots, H_\sigma$, telles que pour tout $x \in X$ :

$$\text{dét}(H^A_B(x,\xi)) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} (H_s(x,\xi))^{\mu_s}$$

Le degré de $H_s(x,\xi)$ est constant et égal à $\tau_s$, et on posera $\tau' = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s$.

2) On pose $H(x,\xi) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x,\xi)$; on suppose que $H$ est strictement hyperbolique par rapport à $N = (\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n+1})$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$,

$H(x, \xi_0, \eta') = 0$ admet pour $\eta'$ réel, $\eta' \neq 0$, $\tau'$ racines distinctes réelles $(\xi^\rho_0(x,\eta'))$, $1 \leq \rho \leq \tau'$.

3) Pour $x$ fixé, $\mathcal{O}_s$ désigne l'anneau localisé de $\mathbb{R}[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ par

* a paraître au Bulletin des Sciences Mathématiques

rapport à l'idéal engendré par $H_s$. Dans $\mathcal{O}_s$, si $\sim$ désigne l'équivalence des matrices :

$$(H^A_B) \sim \begin{pmatrix} H_s^{q_1(s)} & & & 0 \\ & H_s^{q_2(s)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s^{q_m(s)} \end{pmatrix},$$

$q_1(s) \geq q_2(s) \geq \ldots \geq q_m(s)$ .

On fait l'hypothèse que $q_1(s)$ reste constant quand $x$ varie. Ces hypothèses sont du type de celles faites par J. Vaillant dans ([9]) et ([10]).

4) $A'^B_A$ désigne le cofacteur d'ordre $(m-1)$ de $H^A_B$ dans le symbole principal de $h$,

$$A'^B_A = \prod_{s=o}^{s=\sigma} H_s^{q_2(s)+\ldots+q_m(s)} \cdot A^B_A \ .$$

On peut vérifier que les $A^B_A$ sont des fonctions régulières en $(x,\xi)$. On vérifie que :

$$K^A_C = \sum_{B=1}^{B=m} H^A_B\, A^B_C = \prod_{s=o}^{s=\sigma} H_s^{q_1(s)} \cdot \delta^A_C$$

$\delta^A_C$ désigne le symbole de Kronecker.

On suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^B_C)$ de symbole principal $(A^B_C)$ vérifiant :

$$h \circ \mathcal{A} = k = (k^A_C) = \sum_{B=1}^{B=m} h^A_B\, \mathcal{A}^B_C = \sum_{r=o}^{r=\tau} \ell_r (h_o)^{[\alpha_o - r]_+} \ldots (h_\sigma)^{[\alpha_\sigma - r]_+} ,$$

$\ell_r$ opérateur différentiel matriciel, $(h_s)$ opérateur différentiel de symbole principal $H_s$, $[\alpha_s - r]_+ = \mathrm{Max}(0, \alpha_s - r)$, $\ell_o$ matrice identique, $\tau$ = ordre de $k$, $\alpha_s = q_1(s)$, de telle façon que :

$$\text{ordre } \Big(k - \sum_{\rho=o}^{\rho=r} \ell_\rho\, (h_o)^{[\alpha_o - \rho]_+} \ldots h_\sigma^{[\alpha_\sigma - \rho]_+}\Big) < \tau - r \ .$$

On pourra remarquer que $k^A_A$ est, pour tout $1 \leq A \leq m$, bien décomposable au sens défini par J.C. De Paris ([3]).

On a aussi :

$$K^C_B = \sum_{A=1}^{A=m} A^C_A\, H^A_B$$

et on suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}'^C_A)$

de symbole principal $(A_A^C)$ de telle sorte que $k' = \mathcal{A}' \circ h$ possède une décomposition du genre précédent.
Ces hypothèses sont celles qu'utilise D. Gourdin dans la note (6) et dans (11).

## II. Développements asymptotiques et problème de Cauchy asymptotique.

### 1) Développements asymptotiques.

Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $f_j$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (ou une distribution) vérifiant : $f'_j = f_{j-1}$.
Soit $K_o$ un facteur $H_s$ et $k_o$ un opérateur différentiel de partie principale $K_o$. On pose $\nu_o = q_1(s)$.
On a (11) :

$$k = \sum_{r=o}^{r=\bar{\tau}} \dot{\ell}_r \, k_o^{[\nu_o - r]_+} \quad .$$

On cherche, pour tout point $x_o$ de $X$ une solution formelle non nulle de la forme :

$$z = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Z^j \times f_j \circ \varphi$$

où $\varphi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ réelle caractéristique pour $k_o$ dans un voisinage $V$ de $x_o$, telle que $\operatorname{grad}\varphi(x_o) \neq 0$

$$Z^j = (Z^{C,j}) \in \mathcal{C}^\omega(V) \quad , \; Z^{C,j} = 0 \;\text{ si }\; j < 0 \;;$$

$z$ vérifie donc $k(z) = 0$.
On obtient :

$$k(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{r=\bar{\tau}} \mathcal{K}^r(\varphi) \left[ Z^{\bar{\tau}+j-r} \right] \times f_j \circ \varphi$$

$\mathcal{K}^r(\varphi)$ est un opérateur matriciel d'ordre $\leqslant r$ dépendant de $\varphi$ et de $k$ et $\mathcal{K}^{r,A}(\varphi) = 0$ si $0 \leqslant r \leqslant \nu_o - 1$. On obtient pour : $\bar{\tau} + j = \nu_o$,

$$\sum_{r=o}^{r=\nu_o} \mathcal{L}_r(\varphi)\,[\mathcal{T}(\varphi)]^{\nu_o - r}\,[Z^o] = 0 \;;$$

Si $A \neq C$ $\dot{\mathcal{L}}^A_{0,C}(\varphi) = 0$ et $\dot{\mathcal{L}}^A_{0,A}(\varphi) \neq 0$. $\tau(\varphi)$ est l'opérateur bicaractéristique associé à $k_o$ ; $\mathcal{L}_r(\varphi)$ est d'ordre 0. On obtient $Z^o$ en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre $\nu_o$ le long des bicaractéristiques relatives à $\varphi$. $Z^j$, $j > 0$, s'obtient en intégrant un système d'équations différentielles ayant même premier membre que le précédent et un second membre dépendant de $Z^\ell$, $\ell < j$, de $\varphi$ et de l'opérateur $k$.

2) Problème de Cauchy asymptotique.

$x^o = 0$, par exemple est un hyperplan non caractéristique pour $k$ ; $\psi(x')$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $W$ voisinage de 0, de gradient non nul ; $x' = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Pour simplifier la présentation, on supposera $\alpha_s = 1$, si $s \geq 1$. On cherche des solutions formelles $z_\rho$ de la forme :

$$z_\rho = \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} Z_\rho^j \times f_{j+1-\alpha_o} \circ \varphi^\rho$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq \tau_o \\ \alpha_o - 1 & \text{si } \tau_o < \rho \leq \tau' \end{cases}$$

chaque $\varphi^\rho$ vérifie l'équation caractéristique relative à $H$ et est telle que : $\varphi^\rho(0,x') = \psi(x')$ , dans un voisinage V de l'origine et que :

$$\frac{\partial}{\partial x_o} \varphi^\rho(0,x') = \xi_o^\rho(x', \text{grad}\ \psi(x')) .$$

On se donne des fonctions données de Cauchy $B_\tau^j$ , $\mathcal{C}^\infty$ dans W ; les $z_\rho$ doivent vérifier les données de Cauchy :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^\tau \left(\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} z_\rho\right)\Bigg|_{x^o=o} = \sum_{j=-\tau}^{\infty} B_\tau^j \times f_j \circ \Psi , \quad 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}-1 .$$

On identifie les différents coefficients des $f_j$ dans les deux membres et on trouve sur $x_o = 0$ .

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^p Z_\rho^o = 0 \qquad 0 \leq p \leq \alpha_o - 2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^p Z_\rho^1 = 0 \qquad 0 \leq p \leq \alpha_o - 3$$

$$\vdots$$

$$Z_\rho^{\alpha_o - 2} = 0 \qquad \text{et :}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \sum_{p=o}^{p=\alpha_o-1} C_\tau^p (\xi_o^\rho)^{\tau-p} \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^p Z_\rho^{\alpha_o-1-p}(0,x') + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau Z_\rho^{\alpha_o-1}(0,x') = B_\tau^{-\tau}$$

$0 \leq \tau \leq \bar{\tau}-1$ (on conviendra que $C_\tau^p = 0$ si $p > \tau$).

Le déterminant du système [3] :

$$\left| \begin{matrix} \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0^\rho}\right)^p [\xi_0^\rho]^\tau & [\xi_0^\rho]^\tau \\ 1 \leq \rho \leq \tau_0 & \rho > \tau_0 \\ 0 \leq p \leq \alpha_0 - 1 & \end{matrix} \right| \quad \text{est non nul}$$

et on peut déterminer les conditions initiales permettant de résoudre de façon unique le problème de Cauchy asymptotique dans V.

## III. Proposition

En utilisant une méthode analogue à celle employée par Hörmander et Duistermaat (4) et par J. Chazarain (2) on construit une paramétrix pour le système

**Proposition**

Pour $t^0 \in [0,T]$, $0 \leq \mu \leq \bar{\tau}-1$, $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}-1$, il existe des opérateurs matriciels :

$$F_{\mu,\rho}(t^0) \in I^{-\frac{1}{4} - \mu + \alpha_0 - 1 - \beta(\rho)}(X, X', C_\rho(t^0))$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq \tau_0 \\ \alpha_0 - 1 & \text{si } \rho > \tau_0 \end{cases}$$

vérifiant : $kF_{\mu,\rho}(t^0) \equiv 0$ (modulo un opérateur à noyau $C^\infty$)

$$\gamma_\tau \left[ \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(t^0) \right] \equiv \delta_{\tau,\mu} \, I,$$

$\delta_{\tau,\mu}$ symbole de Krönecker, I opérateur identique, $\gamma_\tau$ opérateur de trace sur $x^0 = t^0$ de $D_0^\tau$, $C_\rho(t^0)$ relation canonique homogène décrite à partir d'une fonction de phase $\varphi^\rho$ associée à $\xi_0^\rho$.

On cherche $F_{\mu,\rho}(t^0)$ sous forme de développements asymptotiques

$$F_{\mu,\rho}(t^0) \sim \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} F_{\mu,\rho}^j(t^0) \quad \text{vérifiant :}$$

$$k\Big(\sum_{j<\ell} F_{\mu,\rho}^j(t^0)\Big) \in I^{\bar{\tau} - \frac{1}{4} - \mu - \ell - 1 + \beta(\rho)}(X, X', C_\rho(t^0)), \quad \ell \in \mathbb{N}^*$$

$$\gamma_\tau\Big(\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} \sum_{j<\alpha_0+\ell} F_{\mu,\rho}^j\Big) - \delta_{\tau,\mu} I \in L^{-\mu+\tau-(\ell+1)}(X'), \quad \ell \in \mathbb{N} .$$

On aura localement :

$$\left[F^{j}_{\mu,\rho}(t^{o})\,u\right](x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\varphi^{\rho}(x,\eta')}\,B^{j}_{\mu,\rho}(x,\eta')\,\hat{u}(\eta')\,d\eta'$$

$$u\in C^{\infty}_{o}(X',\Omega_{1/2}) \quad \text{et} \quad B^{j}_{\mu,\rho}\in S^{-\mu-j+(\alpha_{o}-1)}$$

Les symboles $B^{j}_{\mu,\rho}$ se déterminent par intégration d'un système d'équations différentielles d'ordre $\alpha_{o}$ ou d'ordre 1 comme au (II 1)) ; les traces sur $x^{o} = t^{o}$ s'obtiennent comme II 2).

On pose $E_{\mu}(t^{o}) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(t^{o})$ .

IV Théorème

Le problème de Cauchy sous les hypothèse de I :

$$k u = f \qquad f = (f^{A}) \ , \ f^{A}\in C^{\infty}(X,\Omega_{1/2})$$

$$D^{\tau}_{o}\,u\Big|_{x^{o}=t^{o}} = g_{\tau} \ , \ g_{\tau} = (g^{A}_{\tau}),\ g^{A}_{\tau}\in C^{\infty}(X',\Omega_{1/2}) \ , \ t^{o}\in[0,T]$$

admet une solution unique $u\in C^{\infty}(X,\Omega_{1/2})$ .

On suit la démonstration de (2). On explicite les opérateurs à noyau $C^{\infty}$ de la proposition.

On a en effet :

$$\begin{cases} k\,E_{\mu}(t^{o}) = R_{\mu}(t^{o}) & \text{opérateur à noyau } \mathcal{C}^{\infty} \text{ de } X' \text{ dans } X. \\ \gamma_{\tau}E_{\mu}(t^{o}) = R_{\tau,\mu}(t^{o}) + \delta_{\tau,\mu}\,I, & R_{\tau,\mu}(t^{o}) \text{ opérateur à noyau } \mathcal{C}^{\infty} \text{ de } X' \text{ dans } X'. \end{cases}$$

$$0\leq\tau\leq\bar{\tau}-1, \qquad 0\leq\mu\leq\bar{\tau}-1 .$$

On se ramène à des opérateurs $G_{\mu}$ et $Q_{\mu}$ vérifiant :

$$\begin{cases} k\,G_{\mu}(t^{o}) = Q_{\mu}(t^{o}) & \text{opérateur à noyau } \mathcal{C}^{\infty} \text{ de } X' \text{ dans } X. \\ \gamma_{\tau}\,G_{\mu}(t^{o}) = \delta_{\tau,\mu}\,I & . \end{cases}$$

On associe à $G_{\bar{\tau}-1}$ un opérateur $G$, au noyau $\mathcal{C}^{\infty}$ de $Q_{\bar{\tau}-1}$ un opérateur $T$ vérifiant :

$$\begin{cases} k\,G = I - T \\ \gamma_{\tau}\,G = 0 & . \end{cases}$$

On prouve que $I - T$ admet un inverse $T'$ (en utilisant un lemme de Volterra) qui vérifie :

$$\begin{cases} k\ G\ T' = I \\ \gamma_\tau\ G\ T' = 0\ . \end{cases}$$

La solution au problème de Cauchy est donnée par :

$$u = \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\tau}-1} G_\tau[g_\tau] + G \circ T' \left[ f - \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\tau}-1} Q_\tau\ [g_\tau] \right] .$$

Pour montrer que $u$ est unique, on prouve que la distribution $u$ vérifiant :

$$\begin{cases} ku = 0 \\ D_0^\tau\ u\Big|_{x^0=t^0} = 0 \end{cases}$$

est unique en utilisant les propriétés de l'adjoint de $k$ et le théorème de Holgrem .

## V. Théorème

L'opérateur $h$ satisfaisant les hypothèses de I, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} hv = f & f = (f^A),\ f^A \in \mathcal{E}^\infty(X, \Lambda_{1/2}) \\ D_0^\tau\ v\Big|_{x^0=t^0} = \dot{g}_\tau & \dot{g}_\tau = (\dot{g}_\tau^A)\ ,\ \dot{g}_\tau^A \in \mathcal{E}^\infty(X', \Lambda_{1/2})\ ,\ 0 \leq \tau \leq t-1. \end{cases}$$

admet une solution $v \in \mathcal{E}^\infty(X, \Lambda_{1/2})$ unique.

On prend pour cela : $v = (v^B)$, avec $v^B = \sum_C a_C^B\ u^C$ , où $u = (u^C)$ est la fonction construite par le théorème IV.
On montre que la connaissance des $t$ traces de $v$ permet de déterminer les $\bar{\tau}$ traces de $u$ sur $x^0 = t^0$ et de construire $u$.
L'unicité de $v$ se déduit par un procédé analogue à celui utilisé dans IV.

# BIBLIOGRAPHIE


(1) R. BERZIN-J. VAILLANT : Comptes rendus, t.283, série A, 1976, p.485.

(2) J. CHAZARAIN : Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, n°1, 1974, p.173-202.

(3) J.C. DE PARIS : J. Math. Pures et Appl. , 51, 1972, p.231-256.

(4) J.J. DUISTERMAAT et L. HÖRMANDER : Acta Math., 128, 1972. p. 183-269

(5) J. LERAY et OHYA : Systèmes linéaires hyperboliques non stricts, Colloque de Liège, 1964, C.N.R.B.

(6) D. GOURDIN : Comptes rendus, 282, série A, 1976, p.1105.

(7) L. HÖRMANDER :Acta. Math., 127, 1971 p. 79-183

(8) V.M. PETKOV : Equations et systèmes à caractéristiques multiples, Université Paris VI, Analyse numérique, 1975.

(9) J. VAILLANT : J. Math. Pures et Appli., 50, 1971, p.25-51.

(10) J. VAILLANT : Ann. Inst. Fourier, tome 15, fasc. 2, 1965. p. 225-311

(11) D. GOURDIN : A paraître Journal of Math. of Kyoto University.

(12) Y. CHOQUET : J. Math. Pures et Appli. t 45, 1966, p. 371-386



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER