Jean Michel Lasry
Raoul Robert

Acyclicité de l'ensemble des trajectoires d'une équation différentielle multivoque

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1973-1977), exp. nº 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1977___1_A4_0>

ACYCLICITE DE L'ENSEMBLE DES TRAJECTOIRES D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE MULTIVOQUE.

par Jean Michel LASRY et Raoul ROBERT.

Soit E l'équation différentielle multivoque : $\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t))$, $x(o) = y$. Nous nous proposons de montrer que sous les hypothèses usuelles qui assurent l'existence d'une solution de E , l'ensemble $\mathcal{E}(y)$ de ces solutions est acyclique pour la cohomologie de Čech. Ce résultat va nous permettre, via une notion de degré topologique convenable pour certains couples de fonctions, d'établir des résultats d'existence de solutions périodiques et des théorèmes d'accessibilité en théorie du controle.

<u>Notations</u> Pour la suite, Γ désignera une multi-application à valeurs convexes compactes non vides de R^n dans R^n semi-continue supérieurement [1] et bornée (i.e. $\Gamma(R^n)$ borné) . τ est un nombre strictement positif fixé.
Par solution de E , nous entendons toute fonction absolument continue x de $[o, \tau]$ dans R^n telle que $x(o) = y$ et $\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t))$ pour presque tout t dans $[o, \tau]$.

Enfin H^* désigne le foncteur cohomologie de Čech à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.

§ 1. LE THEOREME D'ACYCLICITE.

Ce paragraphe est consacré à l'énoncé et à la démonstration abrégée du théorème suivant.

THEOREME 1.1. Avec les notations précédentes, la multi-application $y \to \mathcal{E}(y)$ de R^n dans $C(o, \tau ; R^n)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes <u>acycliques</u> non vides. De plus si B est borné dans R^n , $\mathcal{E}(B)$ est compact dans $C(o, \tau ; R^n)$.

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, donnons quelques conséquences immédiates.

COROLLAIRE 1.2. Pour tout $y \in R^n$, l'ensemble des états accessibles à partir de

---

[1] c'est à dire : pour tout ouvert Ω de R^n , $\{x \mid \Gamma(x) \subset \Omega\}$ est ouvert.

y , $A(y) = \{ x(\tau) \mid x \in \mathcal{C}(y) \}$ est un compact connexe non vide, la multi-application A est semi-continue supérieurement et si B est borné, $\overline{A(B)}$ est compact. Dans le théorème 1.1. nous avons fait l'hypothèse que Γ est définie sur tout l'espace et que Γ est bornée. Ces hypothèses ne sont restrictives qu'en apparence : les hypothèses qui assurent l'existence de solutions permettent en général de se ramener au cas où Γ est bornée et partout définie . Pour préciser cette idée, donnons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.3. Soit Γ une multi-application de $[o , \tau] \times R^n$ dans R^n , semi-continue supérieurement, à valeurs convexes compactes non vides. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$a \in R^n$, $t \in [o , \tau]$ et $b \in \Gamma(t , a)$ impliquent $\|b\| \leq \alpha + \beta \|a\|$.

Pour tout $y \in R^n$, soit $\mathcal{C}(y)$ l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle multivoque :

$$\begin{cases} x : [o , \tau] \to R^n \quad \text{absolument continue,} \quad x(o) = y \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t , x(t)) \quad \text{pour presque tout} \quad t \in [o , \tau] \end{cases}$$

Alors la multi-application $y \to \mathcal{C}(y)$ de R^n dans $C(o , \tau ; R^n)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes acycliques non vides.

REMARQUE 1.4. Comme on peut le voir sur des exemples simples, l'ensemble $A(y)$ des états accessibles à partir de y n'est généralement pas acyclique .

REMARQUE 1.5. Dans le cas particulier où Γ est une fonction continue, le théorème 1.1. se réduit à un résultat obtenu avec des méthodes différentes par ARONSZAJN [1]. Dans le cas d'une équation différentielle multivoque, la connexité de l'ensemble des états accessibles a été établie par KIKUCHI [4]. La connexité de l'ensemble des trajectoires a été démontrée par VALADIER [7] .

On étend facilement le théorème 1.1. au cas d'équations différentielles multivoques sur les variétés.

Soit V une variété compacte de dimension n et de classe $\mathcal{C}^2$. On note $T_v V$ l'espace tangent à V au point $v \in V$ et TV le fibré tangent à V. Il existe au moins un plongement $\Phi : V \to R^k$ pour k assez grand. On dira qu'une fonction $x : [o , \tau] \to V$ est lipschitzienne si $\Phi \circ x$ est lipschitzienne. Cette définition ne dépend pas du plongement choisi. La fonction x possède alors une dérivée $\dot{x}(t) \in T_{x(t)} V$ pour presque tout $t \in [o , \tau]$.

Pour tout $v \in V$ et tout $t \in [o, \tau]$, on se donne un connexe compact non vide, $\Gamma(t, v)$, dans l'espace tangent $T_v V$ au point v. On suppose que :

$$G = \{ (t, (v, \xi)) \in [o, \tau] \times TV \mid \xi \in \Gamma(t, v) \}$$

est un compact de $[o, \tau] \times TV$.

THEOREME 1.6. Pour tout $v \in V$, l'ensemble $\mathcal{E}(v)$ des solutions de l'équation différentielle multivoque :

$$\begin{cases} x \in \text{Lip}(o, \tau ; V), \; x(o) = v \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [o, \tau] \end{cases}$$

est un compact acyclique non vide de $C(o, \tau ; V)$. En outre, $v \to \mathcal{E}(v)$ est une multi-application semi-continue supérieurement de V dans $C(o, \tau ; V)$.

Démonstration :

Par plongement on suppose $V \subset R^k$, on applique alors le théorème 1.1. à un prolongement convenable de Γ à R^k.

Démonstration du Théorème 1.1.

Cette démonstration se décompose en trois étapes :

- On construit une suite Γ_n de multi-applications d'un type particulier qui converge vers Γ (lemme 1.7)
- On démontre le théorème pour les multi-applications Γ_n
- On passe à la limite.

LEMME 1.7. Soit X un espace métrique compact, G une multi-application semi-continue supérieurement à valeur dans les convexes compacts non vides de R^n. Alors il existe une suite G_n de multi-applications semi-continues supérieurement de X dans R^n telle que :

(1) $\forall x \in X, \forall n \in N : G(x) \subset G_n(x)$

(2) $\forall x \in X, \forall n \in N : G_{n+1}(x) \subset G_n(x)$

(3) $\forall x \in X$, la suite $G_n(x)$ converge vers $G(x)$ pour la distance de Hausdorff.

(4) les $G_n(x)$ sont de la forme $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\, C_i$ où $C_1, \dots, C_p$ désignent p convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ et φ_i une partition continue de l'unité sur X .

Pour la démonstration de ce lemme on pourra consulter [5] ou [6].

REMARQUE 1.8. Ultérieurement nous appliquerons le lemme 1.7. avec $X = \bar{B}(o, r)$ dans $\mathbb{R}^n$. On peut alors utiliser des partitions lipschitziennes de l'unité définies sur $\mathbb{R}^n$ tout entier .

Montrons maintenant le résultat pour le type particulier de multi-applications intervenant dans le lemme 1.7.

PROPOSITION 1.9. Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 1.1. En outre, on suppose que Γ est de la forme :

$$\Gamma(a) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(a)\, C_i \quad \text{pour tout} \quad a \in \mathbb{R}^n$$

où les C_i sont des convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, et où $\varphi_1, \dots \varphi_p$ est une partition de l'unité composée de fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$.

Même conclusion que le théorème 1.1.

<u>Démonstration de la proposition</u> 1.9.

Notons B_C l'ensemble des fonctions mesurables de $[o, \tau]$ dans $C_1 \times \dots \times C_p$. C'est un convexe compact pour la topologie $\sigma(L_1(o, \tau ; \mathbb{R}^{np}), L_\infty(o, \tau ; \mathbb{R}^{np}))$.

Pour tout $u(u_1, \dots, u_p)$ appartenant à B_C , la fonction $f : [o, \tau] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$f(t, a) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(a)\, u_i(t)$ est lipschitzienne par rapport à a , mesurable par rapport à t .

L'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x(o) = y \quad \text{et pour presque tout} \quad t \in [o, \tau] \\ \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x(t))\, u_i(t) \end{cases}$$

admet donc une solution et une seule. On note $\psi(u, y)$ cette solution .

On voit sans peine que l'application ψ est continue de $B_C \times R^n$ dans $C\,(o\,,\tau\,;\,R^n)$, où B_C est muni de la topologie faible $\sigma\,(L_1\,,L_\infty)$ et $C\,(o\,,\tau\,;\,R^n)$ de la topologie de la convergence uniforme. De plus, à l'aide du théorème de selection mesurable de Von Neumann, on établit facilement que tout y de R^n on a : $\mathcal{C}(y) = \psi\,(B_C\,,y)$.

Fixons nous $y \in R^n$; montrons que $\mathcal{C}(y)$ est un compact non vide acyclique. Soit Λ l'application de B_C dans $\mathcal{C}(y)$ définie par $\Lambda\,(u) = \psi\,(u\,,y)$. Λ est continue et surjective. Comme B_C est un compact non vide, il en résulte que $\mathcal{C}(y)$ est un compact non vide.

Pour tout $x \in \mathcal{C}(y)$ l'image réciproque $\Lambda^{-1}(x)$ est un convexe et donc acyclique. Donc, d'après le théorème de Vietoris-Begle (voir par exemple Spanier [9] théorème 6.9.15), l'homomorphisme Λ^* de $H^q\,(\mathcal{C}(y))$ dans $H^q\,(B_C)$ est un isomorphisme pour tout $q \geqq 0$. Comme B_C est convexe, B_C est acyclique.

Donc $\mathcal{C}\,(y)$ est acyclique.

Le reste de la démonstration de la proposition 1.9. est immédiat .

Passons maintenant à la dernière étape de la démonstration du théorème 1.1.

Soit $\bar{B}\,(o\,,r_o)$ une boule fermée de R^n. Il suffit de montrer les propriétés énoncées dans le théorème 1.1. pour la restriction de $\mathcal{C}$ à $\bar{B}\,(o\,,r_o)$. Soit r un réel positif tel que $\Gamma\,(R^n) \subset \bar{B}\,(o\,,r)$.

Soit $y \in \bar{B}\,(o\,,r_o)$ et $x \in \mathcal{C}(y)$; on a $\|x\,(o)\| \leqq r_o$ et $\|\dot{x}\|_\infty \leqq r$.

On en déduit, d'après le théorème d'Ascoli, que $\mathcal{C}\,(B\,(o\,,r_o))$ est relativement compact et que $\|x\,(t)\| \leqq r_o + r\,\tau$ pour tout $t \in [o\,,\tau]$.

On applique le lemme 1.7. avec $X = \bar{B}\,(o\,,r_o + r\,\tau)$ et avec $G =$ restriction de Γ à X. On trouve ainsi une suite G_n de multi-applications qui vérifient les conditions (1,2,3,4) du lemme 1.7. En outre on peut supposer que les fonctions φ_i qui interviennent dans la propriété (4) sont Lipschitziennes et définies sur R^n de telle sorte que Γ_n définie par :

$$\Gamma_n\,(a) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_{i,n}\,(a)\; C_{i\,,n}$$

Coïncide avec G_n sur X .

On sait de plus qu'on peut construire les C_i du lemme 1.7. de façon à ce que $C_i \subset \bar{B}(o, r)$ si $G(X) \subset \bar{B}(o, r)$; et donc $\Gamma_n(a) \subset \bar{B}(o,r)$ pour tout a et tout n .

Il en résulte que les solutions de

$$(E_n) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in \Gamma_n(x(t)) \\ x(o) = y \end{cases}$$

vérifient $\|x\|_\infty \leq r_o + r\tau$.

D'après la proposition 1.9. l'équation (E_n) admet un ensemble de solutions $\mathcal{C}_n(y)$ qui est un compact acyclique non vide et la multi-application $y \to \mathcal{C}_n(y)$ de $\bar{B}(o, r_o)$ dans $C(o, \tau ; R^n)$ a un graphe fermé . D'autre part on a trivialement $\mathcal{C}_{n+1}(y) \subset \mathcal{C}_n(y)$. Il en résulte que $\bigcap_{n \in N} \mathcal{C}_n(y)$ est un compact non vide qui est acyclique (voir Spanier [9]). De plus le graphe de la multi-application $y \to \bigcap \mathcal{C}_n(y)$ est fermé. Pour achever la démonstration du théorème 1.1. , on vérifie sans peine que

$$\mathcal{C}(y) = \bigcap_{n \in N} \mathcal{C}_n(y) .$$

§ 2 DEGRE TOPOLOGIQUE POUR CERTAINS COUPLES DE FONCTIONS

Dans [3], S. Eilenberg et D. Montgomery définissent le nombre de Lefschetz d'un couple (φ, ψ) où φ est topologiquement monotone (voir définition ci après). En s'inspirant de cette méthode on obtient sans difficultés un degré topologique pour certains couples (φ, ψ) en dimension finie. On passe ensuite à la dimension infinie par un procédé analogue à celui utilisé pour définir le degré de Leray et Schauder des fonctions. Dans [8] B.Calvert définit de façon voisine mais dans un langage différent un indice de coïncidence des couples.

Donnons directement la définition et les principales propriétés du degré pour les couples en dimension infinie. Nous renvoyons à [5] , [6] pour exposé détaillé.

<u>Définition 2.1</u>. Soit X et Y des espaces topologiques. On dira qu'une application $\varphi : X \to Y$ est topologiquement monotone si φ est continue, surjective et si $\varphi^{-1}(y)$ est acyclique pour tout $y \in Y$.

<u>Définition 2.2</u>. Nous appellerons <u>d-quintuple</u> la donnée de $(X, E, \Omega, \varphi, \psi)$ où:

(i) X est un espace topologique métrisable non vide.

(ii) E est un espace de Banach réel.

(iii) Ω est un ouvert non vide de E.

(iv) φ est une application topologiquement monotone de X sur $\bar{\Omega}$ qui de plus est propre (i, e. l'image réciproque de tout compact est compacte).

(v) ψ est une application continue de X dans E telle que $\psi(X)$ soit relativement compact.

Pour tout d-quintuple $(X, E, \Omega, \varphi, \psi)$ et tout point $a \in E$ tel que :

(vi) $x \in X$ et $\varphi(x) \in \partial\Omega$ impliquent $\varphi(x) - \psi(x) \neq a$ on définit un entier noté $d(a, [\varphi, \varphi-\psi], \Omega)$ qui vérifie les principales propriétés suivantes.

THEOREME 2.3.

(1) Si $\varphi = Id$, on a $d(a, [\varphi, \varphi-\psi], \Omega) = d(a, I-\psi, \Omega)$ où le deuxième membre désigne le degré de Leray et Schauder.

(2) $d(a, [\varphi, \varphi-\psi], \Omega) \neq 0$ implique $a \in (\varphi-\psi)(X)$.

(3) Si $a \in \Omega$, $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = +1$
Si $a \notin \Omega$, $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = 0$

(4) <u>Invariance par homotopie</u>.

Soit $(X, E, \Omega, \varphi_t, \psi_t)$ une famille de d-quintuples pour $t \in [o, 1]$, tels que a vérifie (vi) pour tout $t \in [o, 1]$ et les applications $(t, x) \to \varphi_t(x)$, $(t, x) \to \psi_t(x)$ soient continues, la premiere étant propre et $\{\psi_t(x)\}$ étant relativement compact dans E.

On a alors :

$$d(a, [\varphi_o, \varphi_o - \psi_o], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \varphi_1 - \psi_1], \Omega).$$

§ 3 APPLICATIONS

Voici deux applications typiques qui reposent sur les résultats des paragraphes précédents.

THEOREME 3.1. Soit τ un réel strictement positif et Γ une multi-application de $[o, \tau] \times R^n$ dans R^n bornée, semi-continue supérieurement, à valeurs convexes compactes non vides. Soit Ω un ouvert borné non vide de R^n, $\partial\Omega$ sa frontière . Soit $a \in \Omega$. On suppose que :

$$\begin{cases} x : [o , \tau] \to R^n \text{ absolument continue, } & x(o) \in \partial\Omega \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) & \text{pour presque tout } t \in [o , \tau] \end{cases}$$

implique $x(t) \neq a$ pour tout $t \in [o , \tau]$.

Alors l'équation :

$$\begin{cases} x \text{ absolument continue de } [o , \tau] \text{ dans } R^n, \; x(o) \in \Omega, \; x(\tau) = a \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in [o , \tau] \end{cases}$$

admet une solution.

DEMONSTRATION :

Soit X l'ensemble des solutions x de l'équation

$$\begin{cases} x(o) \in \bar{\Omega} \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in [o , \tau] \end{cases}$$

Soit $\varphi : X \to \bar{\Omega}$ l'application définie par $\varphi(x) = x(o)$. L'espace X est un compact de $C(o , \tau ; R^n)$ et l'application φ est topologiquement monotone d'après le corollaire 1.3.

Pour tout $t \in [o , \tau]$, soit ψ_t l'application de X dans R^n définie par $\psi_t(x) = x(t)$. D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a : $\varphi(x) \in \partial\Omega$ implique $\psi_t(x) \neq a$ pour tout $t \in [o , \tau]$. Donc d'après les propriétés du degré (théorème 2.3) on a :

$$d(a, [\varphi, \psi_\tau], \Omega) = d(a, [\varphi, \psi_o], \Omega) = d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = +1 .$$

D'où $a \in \psi_\tau(X)$, c'est à dire : il existe une solution x telle que $x(o) \in \Omega$ et $x(\tau) = a$.

Donnons maintenant un résultat d'existence de solutions périodiques d'équations différentielles multivoques sur une variété. les notations sont celles du théorème 1.6.

THEOREME 3.2. Si la caractéristique d'Euler-Poincaré de V, $\chi(V)$, est non nulle , il existe, pour tout θ, $0 < \theta \leq \tau$, une solution x de l'équation :

$$\begin{cases} x \in \mathrm{Lip}\,(o\,,\tau\;;\;V)\;,\; x\,(o) = x\,(\theta) \\ \dot{x}\,(t) \in \Gamma\,(t\,,x(t)) \quad \text{pour presque tout} \quad t \in [o\,,\tau] \end{cases}$$

DEMONSTRATION

Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des solutions de l'équation:

$$\begin{cases} x \in \mathrm{Lip}\,(o\,,\tau\,;V) \\ \dot{x}\,(t) \in \Gamma\,(t\,,x\,(t)) \quad \text{pour presque tout} \quad t \in [o\,,\tau] \end{cases}$$

on a $\mathfrak{X} = \bigcup_{v \in V} \mathcal{C}(v)$ et donc $\mathfrak{X}$ est un compact de $C\,(o\,,\tau\;;\;V)$.

Sur $\mathfrak{X}$ on définit, pour $t \in [o\,,\tau]$, la fonction

$$\varphi_t : \mathfrak{X} \to V \quad \text{par} \quad \varphi_t\,(x) = x\,(t)\ .$$

D'après le théorème 1.6. la fonction φ_o est topologiquement monotone, et donc, suivant Eilenberg-Montgomery [3] on peut définir le nombre de Lefschetz du couple $(\varphi_o\,,\varphi_\theta)$:

$$\Lambda\,(\varphi_o\,,\varphi_\theta) = \sum\,(-1)^i \ \text{trace}\ [\ (\varphi_o^*)_i^{-1}\,(\varphi_\theta^*)_i\ ].$$

Comme, d'autre part, il est immédiat que φ_θ et φ_o sont homotopes, on a :

$$\Lambda\,(\varphi_o\,,\varphi_\theta) = \Lambda\,(\varphi_o\,,\varphi_o) = \chi\,(V)\ .$$

Donc si $\chi\,(V) \neq 0$, φ_o et φ_θ ont une coïncidence ; c'est à dire il existe $x \in \mathfrak{X}$ tel que $x\,(o) = x\,(\theta)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN : Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles. Annals of Math. Vol 43, N° 4 oct 1942 .

[2] A. CELLINA : Multi-valued differential equations. University of Maryland, Technical note B N 574 , Sept. 1968.

[3] S. EILENBERG et D. MONTGOMERY : Fixed point theorems for multi-valued transformations. Amer. Journ. of Math. 58 (1964) 214-222.

[4] N. KIKUCHI : On some fundamental theorems of contingent equations in connection with the control problems. Publi. R.I.M.S Kyoto Univ. ser. A 3 (1967) 177 - 201 .

[5] J.M. LASRY et R.ROBERT : Analyse non linéaire multivoque ; à paraître.

[6] R. ROBERT : thèse;à paraître .

[7] M. VALADIER : Communication personnelle non publiée.

[8] B.D. CALVERT : The local fixed point index for multi-valued transformations in a Banach space. Math. Ann. 190, 119-128 (1970) .

[9] E. SPANIER : Algebraic Topology, Mac Graw-Hill Inc. (1966) .