Jacques Robert

Problèmes variationnels fortement non linéaires

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1973-1977), exp. n° 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1977___1_A3_0>

PROBLEMES NA[illegible] [illegible]ES.

[illegible]

Le but de cet exposé est de donner quelques indications sur des résultats obtenus à Bes[illegible] au cours des dernières années, concernant des problèmes qu'on [illegible] appellera fortement non linéaires, ou de type exponentiel, pour les distinguer des problèmes précédemment étudiés, qu'on dira de type puissance. Ils concernent des équations intégrales (dont on ne parlera pas ici) et des équations ou inéquations aux dérivées partielles, stationnaires ou d'évolution.

Problèmes stationnaires.

Pour simplifier, on se contentera d'envisager les problèmes associés à une forme variationnelle du type:

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \varphi_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega} \varphi_o(u)\,v\,dx$$

où Ω est un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est lipschitzienne, et les applications φ_i $(i=o,1,\dots,n)$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, on pourrait considérer les cas suivants;

i) $\varphi_i : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$: $(x,u_o,u_1,\dots,u_n) \longrightarrow \varphi_i(x,u_o,u_1,\dots,u_n)$,

ii) des dérivées d'ordre supérieur interviennent.

De nombreux auteurs, parmi lesquels Visik, Browder, Leray-Lions, Hartmann-Stampacchia, [illegible], ont étudié le cas où chaque φ_i a une croissance à l'infini de type puissance, c'est-à-dire qu'il existe p, $1<p<+\infty$, $a_i>o$, et $b_i>o$ tels que l'on ait, pour tout $u\in\mathbb{R}$

$$(e_i) \qquad |\varphi_i(u)| \leq a_i + b_i\,|u|^{p-1}.$$

On vérifie aisément que si, pour chaque i, φ_i vérifie (e_i), l'opérateur Φ_i naturellement associé à φ_i applique continûment $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Il en résulte que, pour tout $u\in W^{1,p}(\Omega)$ l'application

$$Au : v \longrightarrow a(u,v)$$

est linéaire et continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. L'[illegible] des problèmes stationnaires as[illegible] à la forme a est alors une applicat[illegible] théorème suivant:

Théorème I : Soit V [illegible] ce de Banach réflexif, K un sous-ensemble de V, convexe et fermé, contenant 0, et A une application d'une partie de V dans V' vérifiant les hypothèses suivantes:

i) $D(A) = V$

ii) A est bornée

iii) Pour tout filtre borné $(u_i)_{i\in I}$, porté par V tel que

$u = \sigma(V,V')\text{-}\lim u_i$ et $\lim\sup \langle u_i - u, Au_i\rangle \leq 0$

on a:

$$\forall v \in V : \quad \lim\inf \langle u_i - v, Au_i\rangle \geq \langle u - v, Au\rangle$$

iv) Ou bien K est borné, ou bien A est coercif $\left(\lim_{u\in K, \|u\|\to\infty} \frac{\langle u, Au\rangle}{\|u\|} = +\infty\right)$

Alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ tel que pour tout $v \in K$, on a:

$$\langle v - u, Au - f\rangle \geq 0.$$

Posant alors $V = H^{1,p}(\Omega)$, on vérifie que l'application A associée à la forme a vérifie les hypothèses i) ii) et iii) dès que les majorations (e_i) sont vérifiées pour chaque i, et que φ_i est croissante pour $i = ,2,\ldots, n$. Enfin A est coercif si on a, pour chaque i,

$$u\varphi_i(u) \geq \lambda_i u + \mu_i |u_i|^p.$$

Alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ tel que l'on ait, pour tout $v \in K$:

$$a(u, v - u) \geq \langle v - u, f\rangle$$

Il est clair que ce résultat ne permet pas d'atteindre les problèmes dans lesquels l'une au moins des φ_i n'admet pas de majorant de type $|u|^p$. C'est le cas pour $\varphi_i(u) = \exp(u)$, $u\exp(u^2)$, etc. Ce sont ces problèmes qui seront appelés problèmes de type exponentiel. Pour les atteindre, deux voies sont envisageables:

1) Conserver la méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 (méthode variationnelle) et chercher à utiliser des espaces généralisant les espaces de Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$,

2) Conserver les espaces de Sobolev, et adopter d'autres méthodes pour obtenir un théorème d'existence.

C'est la première voie qui a été choisie à Besançon, ainsi que par Donaldson (Australie) et Gossez (Bruxelles). La seconde a été adoptée par Attouch et Damlamian (Paris) qui utilise les semi-groupes non linéaires, et par Hess (Zürich), Edmunds et Evans (Angleterre) dans le cas mixte (seule φ_0 est exponentielle).

Espaces d'Orlicz et de Sobolev-Orlicz.

On appelle fonction de Young toute application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, paire, vérifiant $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u} = 0$ et $\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{M(u)}{u} = +\infty$, avec la restriction de M à $\mathbb{R}^+$ injective.

Exemples: $|u|^p$ $(1 < p < +\infty)$, $\exp|u| - |u| - 1$, $\exp u^2 - 1$, $u^2 \exp u^2$, ...

Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des classes d'applications Lebesgue-mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$. On appelle classe d'Orlicz l'ensemble:

$$C_M(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) \;:\; \int_\Omega M[u(x)]\,dx < +\infty \right\}.$$

C'est un sous-ensemble convexe et équilibré de $\mathcal{M}(\Omega)$. C'est un espace vectoriel si et seulement si M vérifie la condition:

$$(\Delta_2) \qquad \exists u_0 > 0,\ \exists k > 0,\ \forall u \geq u_0 \;:\; M(2u) \leq k\,M(u).$$

On considère alors les espaces vectoriels suivants (distincts l'un de l'autre si (Δ_2) n'est pas vérifiée), appelés espaces d'Orlicz:

$$L_M(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \exists \alpha > 0,\ \alpha u \in C_M(\Omega) \right\}$$

$$E_M(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \forall \alpha > 0,\ \alpha u \in C_M(\Omega) \right\}$$

Munis d'une norme convenable ce sont des espaces de Banach, et $E_M(\Omega)$ est séparable.

Soit M^* la polaire de M, au sens de l'analyse convexe. C'est une fonction de Young et $M^{**} = M$.

Le dual topologique fort de $E_M(\Omega)$ est isomorphe à $L_{M^*}(\Omega)$.

Si M est de type puissance ou exponentiel, ce que l'on supposera dans toute la suite, la fonction M^* vérifie la condition (Δ_2). On a alors:

$$(E_M(\Omega))' \cong L_{M^*}(\Omega) = E_{M^*}(\Omega)$$

$$(E_M(\Omega))'' \cong L_M(\Omega).$$

On vérifie qu'une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_i applique $C_M(\Omega)$ dans $C_{M^*}(\Omega)$ est qu'il existe $a_i > 0$ et $b_i > 0$ tels que l'on ait, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$(\bar{e}_i) \qquad M^*(\varphi_i(u)) \leq a_i + b_i\,M(u).$$

Il est alors naturel d'introduire les espaces de Sobolev-Orlicz (cf. A. Fougères (6), (7)):

$$W^1E_M(\Omega) = \left\{ u \in E_M(\Omega) : \forall i = 1,2,\dots,n \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in E_M(\Omega) \right\}$$

$$W^1L_M(\Omega) = \left\{ u \in L_M(\Omega) : \forall i = 1,2,\dots,n \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_M(\Omega) \right\}$$

Munis de la norme naturelle ce sont des espaces de Banach et $W^1E_M(\Omega)$ est séparable. Si M est de type puissance ou exponentiel, et si la frontière de Ω est lipschitzienne, on a

$$(W^1E_M(\Omega))'' \cong W^1L_M(\Omega).$$

Revenant alors à la forme variationnelle a, et supposant $(\bar{e}_i)$ vérifiée pour chaque $i = 0,1,2,\dots,n$, on montre que pour tout u dans D(A) avec:

$$D(A) = \left\{ u \in C_M(\Omega) : \forall i = 1,2, \dots, n \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad C_M(\Omega) \right\},$$

l'application Au de $W^1E_M(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v \longrightarrow a(u,v)$ est linéaire et continue. On définit ainsi une application A de D(A) dans $(W^1E_M(\Omega))'$. Ceci conduit à poser $V = W^1E_M(\Omega)$ en espérant obtenir un théorème analogue au théorème I, en considérant les dualités entre V et V' d'une part, entre V" et V' d'autre part. Les difficultés sont les suivantes:

- V n'est pas réflexif en général,
- $V \subset D(A) \subset V''$, les inclusions étant strictes,
- D(A) n'est ni ouvert ni fermé,
- A n'est pas borné sur D(A), et n'est pas coercif sur D(A).

En étudiant un problème mixte où seule φ_0 était de type exponentiel, (cf. J.Robert (12)), on a vu apparaître le rôle important dans les espaces d'Orlicz des ensembles définis par

$$C_M(r) = \left\{ u \in C_M(\Omega) : \quad \int_\Omega M(u(x))\, dx \leq r \right\}.$$

Ce sont des ensembles convexes, équilibrés, $\sigma(L_M, E_{\bar{M}})$-compacts, tels que $C_M(\Omega) = \bigcup_{r>0} C_M(r)$. De plus, si φ_i vérifie $(\bar{e}_i)$, $\Phi_i(C_M(r))$ est borné.

(N.B. Dans le cas particulier où $M(u) = |u|^p$, $C_M(r)$ est une boule fermée, mais dans le cas général il n'en est plus de même, et il faut se méfier de ces ensembles qui ont des propriétés "pathologiques". En particulier, la famille $\{C_M(r),\ r>0\}$ n'est pas une base de voisinages de 0.)

On est alors conduit à considérer les ensembles:

$$\Gamma(r) = \left\{ u \in W^1L_M(\Omega) : \quad \int_\Omega M(u(x))\, dx \leq r,\ \forall i = 1,2,\dots,n \quad \int_\Omega M\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \leq r \right\}$$

qui ont les propriétés suivantes:

i) Pour tout $r > 0$, $\Gamma(r)$ est convexe, équilibré et $\sigma(W^1L_M, (W^1E_M)')$-compact.

ii) $D(A) = \bigcup_{r>0} \Gamma(r)$.

iii) Si pour chaque i, φ_i vérifie $(\bar{e}_i)$, alors pour tout $r > 0$, $A(\Gamma(r))$ est borné.

Considérant alors un sous-ensemble K, convexe et faiblement fermé de $W^1L_M(\Omega)$, on a pour tout $r > 0$, $K_r = K \cap \Gamma(r)$ qui est convexe, faiblement compact, et, si $(\bar{e}_i)$ est vérifiée pour chaque i, $A(K_r)$ est borné pour chaque $r > 0$.

On démontre le théorème suivant:

Théorème 2. Soit V un espace de Banach, A une application de $D(A) \subset V''$ dans V', et $K \subset D(A)$. Sous les hypothèses suivantes:

1) $V \subset D(A) \subset V''$

2) K est Γ-convexe (i.e.: il existe une famille croissante $\{K_r,\ r>0\}$ de sous-ensembles de V'', convexes, contenant 0, $\sigma(V'',V')$-compacts tels que $K = \bigcup_{r>0} K_r$)

3) A est Γ-borné sur K (i.e.: Pour tout $r>0$, $A(K_r)$ est borné)

4) A est Γ-pseudomonotone (i.e.: Pour tout filtre borné (u_j) porté par K_r, $\sigma(V'',V')$ convergeant vers u, tel que (Au_j) soit $\sigma(V',V)$ convergeant vers χ et $\lim\sup \langle u_j, Au_j\rangle \le \langle u,\chi\rangle$, on a: $\chi = Au$ et $\lim \langle u_j, Au_j\rangle = \langle u, Au\rangle$.)

5) ou bien K est borné, ou bien A est Γ-coercif (i.e.: pour tout $f \in V'$, il existe $r>0$ tel que, pour tout $u \in K \cap V, u \notin K_r$ on a: $\langle u, Au - f\rangle > 0$.)

alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ tel que pour tout $v \in K$:

$$\langle v - u\ ,\ Au - f\rangle \ \ge 0.$$

Ce théorème s'applique dans le cas où $V = W^1E_M(\Omega)$, A est l'opérateur associé à la forme variationnelle a, $K = \mathcal{K} \cap D(A)$ où $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble de V'' convexe, contenant 0, et $\sigma(V'',V')$- fermé (il suffit de prendre $K_r = \mathcal{K} \cap \Gamma(r)$), pourvu que les fonctions φ_i vérifient

$$(C)\quad \begin{cases} \forall i=0,1,2,\dots,n & \varphi_i \text{ vérifie } (e_i) \\ \forall i=1,2,\dots,n & \varphi_i \text{ est croissante} \\ \forall i=0,1,2,\dots,n & u(\varphi_i(u) - c_i) \geqslant d_i M(u) - c_i . \end{cases}$$

On obtient ainsi des théorèmes d'existence pour des inéquations et des équations (en faisant $K = V''$) aux dérivées partielles fortement non linéaires, avec des conditions au bord de Neumann. On obtiendra d'autres conditions en prenant pour V un espace intermédiaire entre $W^1E_M(\Omega)$ et la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^1E_M(\Omega)$.

Problèmes d'évolution paraboliques.

Les notions dégagées dans l'étude du problème stationnaire permettent d'obtenir le théorème abstrait suivant:

Théorème 3. Soit V un espace de Banach, A une application de $D(A) \subset V''$ dans V', L une application de $D(L) \subset V''$ dans V', et $K \subset D(A)$. Sous les hypothèses 1) à 5) du théorème 2, et

6) L est linéaire, monotone et faiblement compatible avec K (i.e. pour tout $u \in K$, il existe une suite $(u_n, n \in N)$ d'éléments de $K \cap D(L) \cap V$ telle que $u = \sigma(V'',V')\text{-}\lim u_n$ et

$$\limsup \langle u_n - u, Lu_n \rangle \leq 0 \;)$$

alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ tel que l'on ait, pour tout $v \in K \cap D(L) \cap V$:

$$\langle v - u \, , \, Lv + Au - f \rangle \;\geq\; 0.$$

Remarques: i) Si, de plus, pour tout $v \in K \cap D(L)$, il existe une suite v_n d'éléments de $K \cap D(L) \cap V$ telle que $v = \sigma(V'',V')\text{-}\lim v_n$, $Lv = \sigma(V',V'')\text{-}\lim Lv_n$ et $\limsup \langle v_n, Lv_n \rangle \leq \langle v, Lv \rangle$, alors l'inégalité du théorème 3 est vérifiée pour tout $v \in K \cap D(L)$.

ii) Il ne semble pas possible d'éviter la condition 6) comme le faisait Brézis dans le cas réflexif.

Il est alors raisonnable d'espérer pouvoir utiliser le théorème 3 pour étudier les problèmes pour lesquels $Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et A est l'opérateur associé à la forme suivante:

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_Q \varphi_i\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\mu \; + \; \int_Q \varphi_0(u)\, v \, d\mu$$

où $Q = (0,T)\times\Omega$ et μ la mesure produit sur Q.

En réalité, il apparait deux difficultés importantes:

1) Si $(\overline{e}_i)$ est vérifiée pour chaque i, l'application Φ_i applique $C_M(Q)$ dans $C_{M^*}(Q)$. Dans le cas particulier où $M(u) = |u|^p$ on déduit de l'équivalence topologique de $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ avec $L^p(Q)$ que pour tout $u \in L^p(0,T;H^{1,p}(\Omega))$, $Au : v \longrightarrow a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur $L^p(0,T;H^{1,p}(\Omega))$, et donc que A est une application de $L^p(0,T;H^{1,p}(\Omega))$ dans son dual. Mais, le résultat analogue est faux du fait que $E_M(0,T;E_M(\Omega))$ n'est pas isomorphe à $E_M(Q)$ quand M ou M^* ne vérifie pas la condition (Δ_2).

On considère alors les espaces de Sobolev-Orlicz inhomogènes sur Q définis par:

$$W^1_x E_M(Q) \;=\; \Big\{u \in E_M(Q) \quad \forall i=1,2,\dots,n \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in E_M(Q)\Big\}$$

$$W^1_x E_M(Q) \;=\; \Big\{u \in L_M(Q) \quad \forall i=1,2,\dots,n \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_M(Q)\Big\}$$

puis on pose

V = fermeture dans $W^1_x E_M(Q)$ de $L^\infty(0,T) \otimes W$ avec $W^1 E_M(\Omega) \hookrightarrow W \hookrightarrow W^1 E_M(\Omega)$

(Le choix de W dépend des conditions sur le bord de Ω que l'on souhaite).

En considérant des ensembles T_2 définis comme ci-dessus en remplaçant Ω par Q, on montre que Au: $v \longrightarrow a(u,v)$ définit une application d'une partie D(A) de V" dans V' qui vérifie les hypothèses 1) à 5) du théorème 3) lorsqu'on suppose vérifiées les conditions (C) .

2) Par ailleurs, notant que V" est identifiable à un sous-espace vectoriel de V' et que V' s'injecte continûment dans $L^1(0,T;W')$, on pose:

$$D(L) = \left\{ u \in V'' : \frac{du}{dt} \in V' \ , \ u(0) = 0 \right\}$$

où $\frac{du}{dt}$ désigne la dérivée dans $L^1(0,T;W')$ au sens des distributions.

La démonstration de la faible compatibilité de L avec V" est assez longue. Ce qui est difficile, c'est d'atteindre des u_n situés dans V. En fait, on réussit à les trouver dans $L^1(0,T) \otimes W$, et alors on vérifie en même temps la condition de la remarque I). (cf. Robert (13), (14), et (15)).

Autres problèmes.

Espaces de traces des espaces de Sobolev-Orlicz.

A. Fougères a montré l'existence d'applications traces définies sur $W^1E_M(\Omega)$ et $W^1L_M(\Omega)$ avec des continuités convenables. Pour l'étude des conditions au bord, il était indispensable de caractériser les images de ces applications. M. Th. Lacroix a obtenu une caractérisation qui généralise celle obtenue par Gagliardo et Nečas dans le cas classique. Elle doit se limiter au cas où $M(u)$ est de la forme $(M_1(u))^p$ avec $p > 1$ et M_1 une fonction de Young. (cf. Lacroix (8), (9), et (10)). Elle a ensuite montré que ces espaces ont une propriété d'interpolation qui généralise celle obtenue par Lions et Peetre dans le cas classique (cf. Lacroix (11)). Elle a aussi étudié les espaces de Sobolev-Orlicz avec poids et leurs applications

Continuité des solutions par rapport à différents paramètres.

L. Bisbis (cf. (3)) a montré la continuité, pour des topologies convenables, des solutions des problèmes stationnaires par rapport aux paramètres usuels: second membre, trace sur le bord, coefficient de φ_0.

Méthode de pénalisation.

A. Ulger a montré que si β_K est un opérateur de pénalisation associé au convexe K, on obtient une solution d'inéquation (stationnaire ou d'évolution) associée à K comme limite faible des solutions des équations $Au_n + n\,\beta_K(u_n) = f$ et l'analogue pour les problèmes d'évolutions. La difficulté est alors de donner une construction de β_K valable pour un convexe faiblement fermé K quelconque. En effet il n'est plus question d'utiliser un opérateur de dualité J comme dans le cas réflexif. Ulger a néanmoins réussi à donner une construction valable dans les espaces de Sobolev-Orlicz. (17).

Suppression des conditions d'imparité dues à la condition de pré-coercivité.

Les conditions (C) imposent aux fonctions φ_i d'être presque impaires à l'infini. On peut se débarrasser de cette condition sur le terme φ_0 en utilisant des propriétés du cône positif de $L_M(\Omega)$ et un principe du maximum. On obtient ainsi des résultats voisins de ceux obtenus par Brézis et Strauss en utilisant les semi-groupes non linéaires.

D'autres résultats intéressants sont obtenus dans cette voie par une équipe de Perpignan (A. Fougères, Péralba, M.T. Vendère; J. Chatelain) en utilisant des fonctions de Young à paramètres et à valeurs vectorielles.

D'autres problèmes sont à l'étude: Problèmes hyperboliques (F. Catté) Résolutions numériques (J. Berger).

Bibliographie:

J. BERGER (1) "Problèmes de Hammerstein fortement non linéaires" Thèse de troisième cycle, Besançon (1974).

(2) "Théorèmes généraux d'approximation dans les espaces de Sobolev-Orlicz" Publ. Math. Besançon (1975).

L. BISBIS (3) "Continuité par rapport à différents paramètre des solutions de problèmes fortement non linéaires" Annales Scient. Besançon (1976) (Th. 3e cycle).

F. CATTE (4) "Espaces de Banach normaux à valeurs vectorielles" Ann. Scient. Besançon (1972).

J. CHATELAIN (5) "Propriétés de type Orlicz de certains intégrandes convexes normaux.." Thèse 3ème cycle, Perpignan, 1975.

A. FOUGERES (6) "Quelques propriétés des limites projectives et inductives; applications à une généralisation des espaces de Sobolev" Ann. Scient. Besançon, 1969, Thèse 3 cycle.

(7) "Espaces de Sobolev-Orlicz et applications à l'opérateur du calcul des variations à coefficients très fortement non linéaires" Thèse d'Etat, Besançon, 1972).

M. Th. LACROIX (8) "Espaces de traces des espaces de Sobolev-Orlicz et applications" Thèse d'Etat, Besançon, 1974.

(9) "Espaces de traces des espaces de Sobolev-Orlicz" Journal de Math. Pures et Appliquées, 53, 1974, p. 439-458 .

(10) "Conditions au bord pour des problèmes fortement non linéaires" Ann. Math. Pures et Appliquées (...).

(II)"espaces d'interpolation et de traces des espaces de Sobolev-Orlicz d'ordre un" Publ. Math. Besançon I975.

J. ROBERT (I2)"Opérateurs elliptiques non linéaires à coefficients très fortement non linéaires" C. R. Acad. Sci., Paris, t 273, série A, I97I, p. I063-I066.

(I3)"Inéquations variationnelles paraboliques fortement non linéaires" J. Math. Pures et Appl., 53, I974, p. 299-32I.

(I4)"Equations d'évolution paraboliques fortement non linéaires" Annali Scuola Normale Superiore Pisa Cl. di Sci., vol. I, n. 3.4 (I974) p.247-259.

(I5)"Espaces de Sobolev-Orlicz inhomogènes" Publ. Math. Besançon I975.

D. ROGER (I6)"Equations différentielles non linéaires" Thèse de 3ème cycle, Besançon (I972).

A. ULGER (I7)"Opérateur de pénalisation dans des espaces d'Orlicz et de Sobolev-Orlicz" Thèse de 3ème cycle (I976).

M.F. VAUDENE (I8)"Minimisation de fonctionnelles intégrales à croissance rapide" Thèse de 3ème cycle, Besançon (I973).

J.P. GOSSEZ (I9)"Non linear elliptic boundary value problems for equations with rapidly increasing coefficients" Trans. Am. Math. Soc. I90 (I974) p. I63-205.

T. DONALDSON (20)"Inhomogeneous Orlicz-Sobolev spaces and non linear parabolic initial value problems" J. of Diff. Eq. I6, I974, pp. 20I-256.
