Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jacques Vauthier

Estimées L^r à poids de l'opérateur de Green sur une variété de Stein

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1973-1974), exp. nº 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___2_A2_0>

ESTIMÉES L^r À POIDS DE L'OPÉRATEUR DE GREEN SUR UNE VARIÉTÉ DE STEIN

par Jacques VAUTHIER

INTRODUCTION

V étant une variété de Stein, munie d'une métrique kählérienne adaptée, on se propose de rechercher des estimations des normes de l'opérateur de Green scalaire $\mathcal{G}$ opérant dans les espaces L^r à poids. Une motivation pour chercher de telles estimations est une résolution dans ces mêmes espaces du $\bar{\partial}$-problème [11]. Les méthodes d'estimation connues du $\bar{\partial}$ reposent, soit sur la construction explicite de noyaux dans le cas d'ouverts de C^n ([6] , [11] , [12]) ou sur la cohomologie L^2 à croissance de Hörmander ([3]). Pour se transporter à une variété de Stein, ces méthodes nécessitent souvent, semble-t-il, l'utilisation de partitions de l'unité qui font perdre tout contrôle explicite des conditions de croissance. On se propose d'obtenir, sans utiliser de telles partitions, des estimés globaux, la géométrie de la variété étant atteinte à travers la régularité de croissance d'une fonction d'exhaustion p qui sert à définir la métrique kählérienne adaptée, sous la forme $\|\nabla p\|^2 \leq \varphi(p)$. Ce type d'hypothèse permet d'obtenir des équations différentielles de comparaison [7] assez explicites pour que l'on puisse contrôler la diffusion projetée par p . On en déduit alors le théorème 6.

En fait la résolution du $\bar{\partial}$ par la méthode de Hodge nécessite des estimations de $\mathcal{G}(\bar{\partial})^*$. Ceci est obtenu à partir de ce qui précède et de

1°) un théorème de Harnack uniforme dû à Serrin [10]

2°) des estimées elliptiques d'Agmon-Douglis-Niremberg.

Ces deux types d'estimés sont uniformes sur des boules géodésiques moyennant des hypothèses de courbure bornée.

On remarquera que la méthode peut fournir d'autres résultats en déconnectant la fonction p et la métrique sur V ou en projettant par d'autres fonctions.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Dans toute la suite, V désigne une variété de Stein, p une fonction définie sur V, de classe C^3, strictement plurisousharmonique. On peut supposer p positive [3]. On munit V de la métrique associée à $\partial\bar{\partial}p$. On note par Δ l'opérateur de Laplace Beltrami associé à cette métrique. $P(t,x,y)$ est le semi-groupe de la chaleur correspondant.

On sera amené à considérer le mouvement brownien $X_\omega(t)$ sur V, partant de x, et dont la densité de la loi de probabilité est $P(t,x,y)$.

On définit la fonction de Green $\mathcal{G}(x,y)$, quand elle existe par

$$\mathcal{G}(x,y) = \int_0^{+\infty} P(t,x,y)dt$$

Enfin, on suppose dans toute la suite que le gradient de p soit ∇p satisfait l'estimation suivante :

$$\|\nabla p\|^2 \leq \varphi(p)$$

où φ est une fonction croissante et où $\| \ \|^2$ désigne la norme calculée par dualité à partir du ds^2 associé à $\partial\bar{\partial}p$.

1 - LEMME FONCTIONNEL.

On prouve d'abord le

LEMME I. - (Carleman [1] et Krée [5]) Soit $K(x,y)$ un noyau positif symétrique sur un espace mesuré (X,dx) tel que pour une fonction A, on ait

$$\int_X K(x,y)\ A(y)dy \leq B(x)$$

Alors K définit un opérateur de l'espace à poids $L^p(\frac{B}{A^{p-1}})$ dans l'espace à poids $L^p(\frac{A}{B^{p-1}})$ avec $1 < p < +\infty$.

PREUVE. - Soit q l'exposant conjugué de p et soit g dans $L^q(\frac{A}{B^{p-1}})$.
Il suffit de montrer que

$$\left| \int\int_{X\times X} K(x,y)\ f(y)\ g(x)\ \frac{A}{B^{p-1}}(x)dx\ dy \right| < +\infty$$

pour toute f dans $L^p(\frac{B}{A^{p-1}})$. De l'inégalité de Hölder, on déduit

$$\frac{|f(x)|}{A(x)} \frac{|g(y)|}{(B(y))^{p-1}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p(x)}{A^p(x)} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q(y)}{B(y)^p}$$

et

$$\left|\int_X \int_X K(x,y)\ f(y)\ g(x) \frac{A(x)}{B^{p-1}(x)}\, dx\, dy\right| \leq \frac{1}{p} \int_X \int_X K(x,y)|f|^p(y)\ A^{1-p}(y)\ A(x)\ dx\ dy$$

$$+ \frac{1}{q} \int_X \int_X K(x,y)|g|^q(x)\ B^{-p}(x)\ A(x)A(y)dx\ dy$$

En utilisant $\int_X K(x,y)\ A(y)dy \leq B(x)$ et $\int_X K(x,y)\ A(x)dx \leq B(y)$ on en déduit que

$$\left|\int_X \int_X K(x,y)\ f(y)\ g(x) \frac{A(x)}{B^{p-1}(x)}\, dx\, dy\right| \leq \frac{1}{p} \|f\|^p_{L^p(\frac{B}{A^{p-1}})} + \frac{1}{q} \|g\|^q_{L^q(\frac{A}{B^{p-1}})}$$

On prend $X = V$, dx = mesure de volume associée à la métrique définie ci-dessus (0) . Pour étudier l'opérateur de Green, on voit que l'on est amené à étudier des intégrales du type $\int_V \mathcal{G}(x,y)\ A(y)dy$. On choisit A de la forme $A = \Psi \circ p$ où Ψ sera en particulier positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On observe que

$$\int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy = E_x \int_0^{+\infty} \Psi(p(X_\omega(t))dt$$

où E_x désigne l'espérance mathématique sur les chemins partant de x , de la diffusion sur V gouvernée par Δ .

2 - THÉORÈME DE COMPARAISON

On a le

LEMME 2. - [9]. $p(X_\omega(t)) = p(X_\omega(0)) + \int_0^t \|\nabla p\|(X_\omega(s))db_{\tilde\omega}(s) + nt$ <u>où</u> $\|\nabla p\|$ <u>désigne la norme du gradient de</u> p <u>associée au</u> ds^2 <u>sur</u> V , $db_{\tilde\omega}$ <u>est un brownien standard sur</u> $\mathbb{R}$ <u>et</u> $\omega \to \tilde\omega$ <u>est une application conservant les mesures de probabilité de l'espace des chemins sur</u> V <u>dans celui des chemins sur</u> $\mathbb{R}$.

PREUVE. - Il suffit d'utiliser le lemme d'Ito [7] et $\Delta p = n -$

Comme $p(X_\omega)$ n'est pas une diffusion, sauf dans le cas très particulier où $\|\nabla p\|$ est une fonction de p , et que l'on suppose seulement

$$\|\nabla p\|^2 \leq \varphi(p)$$

on est amené à comparer le processus $p(X_\omega)$ avec une diffusion sur R^+ . Ceci est résolu grâce au lemme de comparaison de [8].

THÉORÈME 3. - <u>On suppose que la courbure de</u> V <u>est bornée. si</u> $\Theta(\xi) = \dfrac{\varphi(\xi)}{\inf\limits_{p(x)\geq\xi} \|\nabla p\|^2}$, <u>pour toute fonction</u> Ψ <u>positive, strictement décroissante, on a</u>

$$\int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy \leq \int_{R^+} \mathcal{G}^+(p(x),\eta)\Psi(\eta)\Theta(\eta)d\eta$$

<u>où</u> $^+$ <u>est la fonction de Green correspondante</u> sur R^+ <u>associée à l'opérateur</u>

$$\frac{\varphi}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \eta\frac{d}{d\xi}$$

PREUVE. - L'hypothèse sur la courbure assure que le temps de vie du brownien X_ω sur V est infini [10]. On peut écrire

$$\int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy = E_x\int_0^\infty \Psi(p(X_\omega(t)))dt$$

et effectuer le changement d'horloge τ_ω défini par

$$t = \int_0^{\tau_\omega(t)} \|\nabla p\|^2(X_\omega(s))ds$$

Soit $\tau_\omega^{-1}(+\infty) = \alpha_\omega \leqq +\infty$, alors

$$\int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy = E_x\int_0^{\alpha_\omega} \Psi(p(X_\omega(\tau_\omega(u)))\frac{du}{\|\nabla p\|^2(X_\omega(\tau_\omega(u)))}$$

Comme $\|\nabla p\|^2 \leq \varphi(p)$, le lemme de comparaison de [8] permet d'écrire

$$p(X_\omega(\tau_\omega(u))) \geqq U_\omega(u)$$

où U_ω est une diffusion sur R^+ gouvernée par $\dfrac{d^2}{d\xi^2} + \dfrac{n}{\varphi(\xi)}\dfrac{d}{d\xi}$, partant de $p(x)$ et ce, pour tous les temps $u \leq \zeta_\omega$ où ζ_ω est le temps de vie de U_ω $(\xi_\omega \geqq \alpha_\omega)$.

On obtient donc :

$$(1) \qquad \int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy \leq E_{p(x)} \int_0^{\zeta_\omega} \Psi(U_\omega(u)) \frac{du}{\underset{p(x)\geq U_\omega(u)}{\operatorname{Inf}} \|\nabla p\|^2} .$$

Un nouveau changement d'horloge σ_ω défini par

$$t = \int_0^{\sigma_\omega(t)} \frac{ds}{\varphi(U_\omega(s))}$$

donne, puisque les temps de vie ne dépendent que de la géométrie des trajectoires, en posant $\nu_\omega = \sigma_\omega^{-1}(\zeta_\omega)$:

$$(2) \quad E_{p(x)} \int_0^{\zeta_\omega} \Psi(U_\omega(u)) \frac{du}{\underset{p(x)\geq U_\omega(u)}{\operatorname{Inf}} \|\nabla p\|^2} = E_{p(x)} \int_0^{\nu_\omega} \Psi(U_\omega(\sigma_\omega(t))) \frac{\varphi(U_\omega(\sigma_\omega(t)))dt}{\underset{p(x)\geq U_\omega(\sigma_\omega(t))}{\operatorname{Inf}} \|\nabla p\|^2}$$

Or $V_\omega(t) = U_\omega(\sigma_\omega(t))$ est une diffusion sur R^+ qui est gouvernée par l'opérateur

$$\frac{\varphi}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + n \frac{d}{d\xi} .$$

Le second membre de l'égalité s'interprête comme

$$\int_{R^+} \mathcal{G}^+(p(x),\eta)\Psi(\eta)\Theta(\eta)d\eta$$

et en rapprochant (2) de (1) on obtient le théorème.

On va calculer $\mathcal{G}^+$. On pose $u(\xi) = \int_\xi^{+\infty} \exp(-2n \int_0^\xi \frac{d\xi}{\varphi(\xi)})$ qui est finie ou infinie. On suppose

$$\varphi(\xi) \leq n\xi^\alpha, \quad \alpha \leq 1 ,$$

ce qui assure la convergence de u. On a alors le :

LEMME 4. - <u>Sous l'hypothèse</u> $\varphi(\xi) \leq n\xi^\alpha$, $\alpha \leq 1$, <u>on a</u> :

$$\int_{R^+} \mathcal{G}^+(\xi,\eta)k(\eta) = \frac{u}{|u'|}(\xi) \int_0^\xi k(\eta)d\eta + \frac{1}{|u'|}(\xi) \int_\xi^\infty u(\eta)k(\eta)d\eta - \frac{1}{u(0)}\left|\frac{u}{u'}\right|(\xi) \int_0^\infty uk .$$

REMARQUE. - La condition $\varphi \leq n\xi^\alpha$, $\alpha \leq 1$ est assez liée ([8]) à une non récurrence du brownien sur V .

PREUVE. - La fonction de Green de l'opérateur $\frac{\varphi}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + n\frac{d}{d\xi}$ correspondant aux conditions de limites nulles aux bornes de R^+ est donnée par :

1) $\mathcal{G}^+(\xi,\eta) = a(\xi)\,u(\eta) + b(\xi)$ a et b constantes sur $[0,\xi[$

$\mathcal{G}^+(\xi,\eta) = c(\xi)\,u(\eta) + d(\xi)$ c et d constants sur $[\xi,+\infty[$

2) $\mathcal{G}^+$ est continue en $\eta = \xi$

3) le saut de la dérivée de $\mathcal{G}^+$ en $\eta = \xi$ est $+1$.

Ce qui permet de calculer a , b , c , d et d'obtenir le lemme.

COROLLAIRE 5. - <u>Si</u> $u\Theta\Psi$ <u>est intégrable sur</u> R^+ , <u>si</u> $\varphi = nt^\alpha$ <u>avec</u> $\alpha \leqq 1$,

$$\int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy \leqq \frac{u}{|u'|}(p(x))\int_0^{p(x)} \Theta_\eta\,\Psi_\eta\,d\eta + \frac{1}{|u'|}(p(x))\int_{p(x)}^{+\infty} u\Theta\Psi \quad .$$

On a ainsi prouvé le :

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> V <u>une variété de Stein munie de la métrique</u> $\partial\bar\partial p$. <u>On suppose que</u> $\|\nabla p\|^2 \leqq np^\alpha$, $\alpha \leqq 1$ <u>et que le tenseur de courbure de</u> V <u>est uniformément borné. Alors, pour toute fonction</u> Ψ <u>strictement décroissante, positive sur</u> R^+ , <u>telle que</u> $u\Theta\Psi$ <u>soit intégrable sur</u> R^+ , $\mathcal{G}(x,y)$ <u>définit un opérateur de l'espace à poids</u> $L^r(\gamma\Psi^{1-r})$ <u>dans</u> $L^r(\Psi\gamma^{1-r})$ <u>où</u>

$$\gamma(x) = \frac{u}{|u'|}\,(p(x))\int_0^{p(x)} \Theta(\eta)\Psi(\eta)d\eta + \frac{1}{|u'|}\,(p(x))\int_0^{\infty} u(\eta)\Theta(\eta)\Psi(\eta)d\eta$$

COROLLAIRE 7. - Sous les hypothèses du théorème 6, et si Ψ est intégrable, alors $\mathcal{G}(x,y)$ définit un opérateur de $L^r(\varphi\Psi^{1-r})$ dans $L^r(\Psi\varphi^{1-r})$.

PREUVE. - Il suffit de remarquer que dans ces conditions $\gamma = O(\varphi)$.

<u>3 - OPÉRATEUR DE GREEN.</u>

On va améliorer ce résultat en prouvant sous certaines conditions géométriques, que $\mathcal{G}$ opère de H^r_{-1} dans L^r .

On suppose que V a un rayon d'injectivité global ρ et que la norme de la dérivée covariante de son tenseur de courbure est bornée. Alors :

LEMME 8. - Soit A un champ de vecteurs défini sur V ; si $\|Ax\| \leqq C_o$ pour tout x de V,

$$\|\mathcal{L}_{Ay}\mathcal{G}(x,y)\| \leqq C\frac{\mathcal{G}(x,y)}{\operatorname{Inf}(d(x,y),\rho)}$$

où C est une constante ne dépendant que de la géométrie de V, $\mathcal{L}_{Ay}$ désignant la dérivée de Lie suivant A au point y.

PREUVE. - Les hypothèses sur la courbure montrent que les coefficients de

$$\Delta_o = g^{ij}\,\partial_i\,\partial_j + g^{ij}\,\Gamma^k_{ij}\,\partial_k$$

dans une carte géodésique satisfont à $\|g^{ij}\|_{L^\infty} < C_o$ uniformément et

$$\|g^{ij}\,\Gamma^k_{ij}\|_{o,\alpha} < C_1 \quad \text{i.e.} \quad g^{ij}\,\Gamma^k_{ij}$$

sont uniformément bornés et satisfont à une condition de Lipschitz d'ordre α dans la carte géodésique autour du point x_o.

Les estimés de Schauder fournis par Douglis et Niremberg [2] pour l'équation

$$\Delta_z\mathcal{G}(x,z) = 0 \quad \text{dans la boule} \quad B = B(y,\tfrac{1}{2}\inf(\rho,d(x,y))$$

permettent d'écrire que

$$\|\mathcal{L}_{Ay}\,\mathcal{G}(x,y)\| \leqq \frac{C}{\operatorname{Inf}(\rho,d(x,y))}\ \operatorname*{Max}_{z\in B}\mathcal{G}(x,z)$$

où C est une constante qui ne dépend que de la géométrie de la variété V. Dans cette même boule B, l'opérateur Δ satisfait aux hypothèses du théorème de Harnack-Serrin [13] puisque, on vient de le voir, les g^{ij} sont à dérivées d'ordre un bornées et $|g^{ij}\,\Gamma^k_{ij}| \leqq C_1$ uniformément. On obtient donc

$$\operatorname*{Max}_{z\in B}\mathcal{G}(x,z) \leqq C'\,\mathcal{G}(x,y)$$

où C' est une constante ne dépendant que de la géométrie de V. D'où le lemme.

On a alors :

THÉORÈME 9. - Si V est une variété de Stein telle que $\|\nabla p\|^2 \leqq np^\alpha$ pour la métrique $\partial\bar\partial p$, si la courbure de V est bornée ainsi que sa dérivée covariante, en notant $H^r_{-1}(\frac{\gamma}{\psi^{r-1}})$ l'espace des distributions dérivées d'ordre $\leqq 1$ de fonctions de $L^r(\frac{\gamma}{\psi^{r-1}})$, l'opérateur de Green envoie

$$H^r_{-1}\left(\frac{\gamma}{\Psi^{r-1}}\right) \quad \text{dans} \quad L^r\left(\frac{\Psi}{\gamma^{r-1}}\right) \quad .$$

PREUVE. - Il suffit de montrer que pour toute fonction f de classe C^1 à support compact on a pour tout champ de vecteurs A de norme bornée

$$\left\| \int_V \mathcal{G}(x,y) L_{Ay} f(y)dy \right\|_{L^r\left(\frac{\Psi}{\gamma^{r-1}}\right)} \leq C\|f\|_{L^r\left(\frac{\gamma}{\Psi^{r-1}}\right)} \quad .$$

Puisque f est à support compact

$$\int_V \mathcal{G}(x,y)\ \mathcal{L}_{Ay}\ f(y)dy = \int_V \mathcal{L}^*_{Ay}\mathcal{G}(x,y)f(y)dy$$

où $\mathcal{L}^*_{Ay}$ désigne l'opérateur différentiel adjoint de $\mathcal{L}_{Ay}$. En utilisant le lemme 7, on a

$$\left| \int_V \mathcal{G}(x,y)\ \mathcal{L}_{Ay}\ f(y)dy \right| \leq C \int_V \mathcal{G}(x,y)|f(y)| \frac{dy}{\mathrm{Inf}[\rho, d(x,y)]}$$

On va utiliser le lemme fonctionnel (1) appliqué au noyau

$$K(x,y) = \mathcal{G}(x,y)[\mathrm{Inf}(\rho,d(x,y))]^{-1} \quad .$$

Pour ce faire, soit Ψ une fonction positive strictement décroissante sur R^+ ,

$$\int_V K(x,y)\Psi(p(y))dy \leq \int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y))dy + \int_{d(x,y)<\rho} \Psi(p(y)) \frac{\mathcal{G}(x,y)}{d(x,y)}\ dy$$

comme $\int_V \mathcal{G}(x,y)\Psi(p(y)) \leq \gamma(p(x))$ par le théorème 6, et que

$$\int_{d(x,y)<\rho} \Psi(p(y)) \frac{\mathcal{G}(x,y)}{d(x,y)}\ dy \leq \underset{d(x,y)<\rho}{\mathrm{Max}}\ \Psi(p(y)) \times \text{volume}\ \ (B(x,\rho)) \quad ,$$

en prenant une fonction Ψ qui satisfait $\underset{d(x,y)<\rho}{\mathrm{Max}}\ \Psi(p(y)) \leq C\ \Psi(p(x))$, on en déduit le théorème puisque le volume de $B(x,\rho)$ est uniformément borné grâce à l'hypothèse de la courbure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLEMAN. Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique (Upsula 1923).

[2] DOUGLIS et NIREMBERG. Interior estimates for elliptic equations (Communications in pure and applied mathematics, vol. 8, 1955).

[3] HÖRMANDER. An introduction to complex analysis in several complex variables (Van Nostand 1966).

[4] ITO et Mac KEAN. Diffusion processes and their sample paths (Springer Verlag, 1965).

[5] KRÉE. Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ (Annales de l'Institut Fourier, tome XVI, fascicule 2, 1966).

[6] LERAY, J. Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1959, N° 87).

[7] Mac KEAN. Stochastic integrals (Academic Press, 1969).

[8] MALLIAVIN, P. Asymptotics of the Green's function of a Riemannian manifold and Ito's stochastic integrals (Proceedings of the National Academy, Washington, février 1974).

[9] MALLIAVIN, P. Fonction de Green d'un ouvert strictement pseudo-convexe et classe de Nevaulinna (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, janvier 1974).

[10] MAZET, E.- GAVEAU, B.- DEBIART, A. Temps d'arrêt des diffusions Riemanniennes (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, février 1974).

[11] ØVRELID, N. Integral representation formulas and L^p estimates for the $\bar{\partial}$-operator (Mathematica scandinavia 1971).

[12] de RAMIREZ. Ein divisions problem und Randintegral darstellungen in der komplexen Analysis (Mathematische Annalen 1970).

[13] SERRIN. On the Harnack inequality for linear elliptic equations (Journal d'Analyse de Jérusalem, 1956).

[14] VAUTHIER, J. $\bar{\partial}$ cohomologie à croissance sur une variété de Stein (à paraître).