Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Paul Malliavin

Géométrie riemannienne stochastique

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1973-1974), exp. nº 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___2_A1_0>

GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE STOCHASTIQUE

par Paul MALLIAVIN

Les équations de la chaleur intervenant dans les problèmes géométriques sont généralement traités [12], soit en utilisant des estimées L^2, soit en utilisant des calculs explicites de paramétrix [15].

L'Intégrale Stochastique de Ito peut être considérée comme une "paramétrix" infinitisémale" qui a ainsi l'avantage d'être directement liée aux invariants infinitésimaux de la Géométrie Différentielle. De plus les trajectoires du processus sont des courbes auxquelles on peut donner une signification géométrique immédiate et sur lesquelles on peut utiliser, convenablement adaptée [3], la machinerie de la géométrie différentielle des courbes C^∞.

Nous noterons par M une variété Riemannienne complète, par Δ_M l'opérateur de Laplace Beltrami sur M, par $\Omega_{x_0}(M)$ l'espace des chemins sur M, d'origine x_0, muni de la mesure de probabilité de Wiener associée à Δ_M, par $x_\omega(t)$, $\omega \in \Omega_{x_0}$ un chemin générique.

I. Equations différentielles de comparaison. -

On remplace l'étude de Δ_M par l'étude d'équations différentielles ordinaires définies sur $\mathbb{R}$, qui seront utilisées comme équation différentielle de comparaison : le processus $x_\omega(t)$ sera projeté par une fonction f, de classe C^2 à valeurs réelles ; alors $Y_\omega(t) = f(x_\omega(t))$ est gouverné par une équation intégrale stochastique de Ito ([4], [7]) ; on encadrera [10] $Y_\omega(t)$ entre les chemins de deux diffusions $\mathbb{R}$ associées aux deux équations différentielles suivantes :

$$L^{\pm} = \frac{d^2}{d\tau^2} + a^{\pm}(\tau)\frac{d}{d\tau}$$

où

$$a(x) = (\Delta f)\|\nabla f\|^{-2},$$

$$a^{+}(\tau) = \sup_{f(x)=\tau} a(x) \quad , \quad a^{-}(\tau) = \inf_{f(x)=\tau} a(x) \quad .$$

a) Notons pas g_M la fonction de Green sur M, $g^{\pm}$ les fonctions de Green sur $\mathbb{R}$ associées à $L^{\pm}$, alors, ([10]), il existe deux constantes C_1, C_2 telles que pour x_0 fixé, $f(x) \to +\infty$, on ait :

$$C_2 g^{+}\Big(f(x_\circ), f(x)\Big) \leq g_M(x_\circ, x) \leq C_1 g^{-}\Big(f(x_\circ), f(x)\Big)$$

b) Si M est une variété de Stein, alors on peut [14] estimer par des équations différentielles de comparaison l'action des semi groupes de la chaleur sur les (0,0) et (0,1) formes. On en déduit des théorèmes d'existence par la méthode de Hodge, de solution de $\bar{\partial} f = \pi$ dans des espaces L^p à poids.

c) L'existence d'une géodésique asymptote est montrée [13] pour la diffusion sur une variété de dimension 2 de courbure $< h < 0$.

d) Des estimées de la première valeur propre du Laplacien sur une boule géodésique (valeurs au bord nulles) sont obtenues [2] en termes de la courbure sectionnelle.

En corollaire il est obtenu que le cut-locus d'un point sur une variété compacte de courbure < 0 est de codimension 1 .

e) La convergence d'un processus convenablement adapté vers la frontière distinguée d'un polyèdre analytique est obtenue [15] ce qui donne des formules de Poisson correspondantes.

f) Pour un système surdéterminé de deux opérateurs elliptiques extrait du système de Hua sur le demi plan de Siegel de rang 2 , l'étude asymptotique de <u>diffusions composées</u> permet d'obtenir une formule de Poisson pour le système sur la frontière de Shilov.

2. <u>Formules de la Moyenne pour les formes harmoniques</u>. -

Soit $\mathcal{O}(M)$ le fibré principal des repères orthonormés sur M , alors la lecture des composantes d'une forme différentielle π dans le repère τ permet d'associer à π une fonction $f_\pi(\tau)$ à valeurs vectorielles dans R^s , équivariante, sous l'action de $\mathcal{O}(n;R)$. Si $\square$ dénote le Laplacien de de Rham Hodge, alors on a la formule de Weitzenböck

$$f_{\square\pi} = - \Delta_{\mathcal{O}(M)} f_\pi + J f_\pi \quad .$$

où $\Delta_{\mathcal{O}(M)}$ est un <u>laplacien horizontal</u>, $\Delta_{\mathcal{O}(M)} = \Sigma \mathcal{L}^2_{H_k}$, où $\mathcal{L}_{H_k}$ sont les dérivées de Lie suivant les champs de vecteurs horizontaux canoniques H_k associés à la connection Riemannienne et où J est une application de $\mathcal{O}(M)$ dans $\mathrm{End}(R^s)$. Les formes harmoniques sur M sont ainsi relevées sur $\mathcal{O}(M)$ dans les solutions du système elliptique

2.1 $$\Delta_{\mathcal{O}(M)} u - Ju = 0$$

a) Le système 2.1 peut être intégré [11] utilisant le processus associé à $\Delta_{\mathcal{O}(M)}$ et la théorie de M. Kac des fonctionnelles multiplicatives. On obtient alors, $t_o > 0$ étant fixé, la formule de la moyenne

2.2 $$f_\pi(\tau_o) = E_{\tau o}\left(R_\omega(t_o) f_\pi(\tau\omega(t_o))\right)$$

où $$\begin{cases} \dfrac{dR_\omega}{dt}(t) = R_\omega(t)\; J(\tau_\omega(t)) \\ R_\omega(0) = \text{Identité} \end{cases}$$

b) Utilisant 2.2 et des méthodes de calcul de perturbations on peut obtenir [11] des théorèmes d'annulation dans lesquels l'hypothèse de Bochner de posivité est remplacée par une positivité "en moyenne".

c) On peut obtenir [1] des formules de représentation intégrales pour le d Neumann problème de Spencer.

3) Annulations au dessus des espaces Riemanniens symétriques $G/_K$.

a) On peut obtenir [9] une diagonalisation complète du système 2.1 dans le cas de forme à valeurs dans un G - fibré vectoriel.

b) L'étude de l'annulation de cohomologie est ainsi ramenée à l'estimée de la plus petite valeur propre de Δ_G sur un espace de fonctions équivariantes.

Les propriétés ergodiques de la diffusion horizontale liées à cette estimée sont obtenues via une factorisation de cette décomposition dans les coordonnées d'Iwasawa en deux composants indépendants [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. AIRAULT. Approche stochastique à des problèmes aux limites pour les formes harmoniques. C.R. Acad. Sciences de Paris, Juillet 1974.

[2] A. DEBIARD, B. GAVEAU et MAZET. Temps de vie des diffusions Riemanniennes. 2 Notes aux C.R. Acad. Sciences de Paris, Février 1974.

[3] J. EELLS and P. MALLIAVIN. Stochastic Geometry on Riemmanian vector bundles in progress.

[4] I. GIHMAN and A. SKOHOROD. Stochastic Differential equations, Ergebnisse der Matematik Bd. 72.

[5] K. ITO. Stochastic parallel transport. Proceeding of the International Congress Stockholm 1962.

[6] A. KORANYI and P. MALLIAVIN. Poisson formulae and compound diffusion for an overdetermined elliptic system on the Siegel upper half plane of rank 2.

[7] MCKEAN. Stochastic integrals 1969.

[8] M-P. MALLIAVIN et P. MALLIAVIN. Factorisations et lois limites de la diffusion horizontale au dessus d'un espace Riemannien symétrique. C.R. de la Conférence d'Analyse Harmonique et Théorie du Potentiel, Strasbourg 1973, Springer Lectures Notes.

[9] M-P. MALLIAVIN et P. MALLIAVIN. Réduction algébrique du Système de de Rham Hodge au dessus d'un espace Riemannien symétrique.

[10] P. MALLIAVIN. Asymptotic of the Green's function of a Riemannian Manifold and Ito's Stochastic Integrals. Proc. Nat. Acad. Sciences U.S.A. Vol. 71, February 1974.

[11] P. MALLIAVIN. Formules de la Moyenne, Calcul de perturbations et théorème d'annulation pour les formes harmoniques. Journal of Functional Analysis, Août 1974.

[12] A. MILGRAM and P. ROSENBLOOM. Harmonic forms and heat conduction. Proc. Nat. Acad. Sciences U.S.A. 37, 180-184 and 435-438 (1951).

[13] J.J. PRAT. Etude asymptotique du mouvement brownien sur une Variété Riemannienne à courbure négative. C.R. Acad. Sciences de Paris 272, 1586-1589 (1971).

[14] J. VAUTHIER, L^p estimes sur une variété de Stein. C. R. Acad. Sciences de Paris, Juillet 1974 et Séminaire J. Leray, Tome 2, 1973-1974.

[15] Colin de VERDIÈRES , C.R. Acad. Sciences de Paris, Février 1973.

[16] A. DEBIARD, B. GAVEAU, Convergence à la frontière de Shilov d'un processus adapté à un polyèdre analytique, C.R. Acad. Sciences de Paris, Septembre 1973.