Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

David Brézis

Classes d'interpolation associées à un opérateur maximal monotone

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1973-1974), exp. nº 2, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___1_A2_0>

CLASSES D'INTERPOLATION ASSOCIÉES A UN OPERATEUR MAXIMAL MONOTONE

par David BRÉZIS.

INTRODUCTION. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et soit A un opérateur linéaire non borné dans H de domaine $D(A)$ dense dans H. On suppose que $-A$ engendre un semi-groupe continu de contractions $S(t)$. On sait (Cf. Lions-Peetre [1], p. 52) que les espaces de moyenne entre $D(A)$ et H peuvent se définir à l'aide de $S(t)$. Ainsi avec les notations de Lions-Peetre

$$S(p,1-\alpha,\ D(A)\ ;\ p,-\alpha,H) = \{x\in H \text{ t.q. } \frac{|x-S(t)x|}{t^{\alpha}} \in L^p_*(\mathbb{R}_+)\}$$

où
$$L^p_*(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+\ ;\ \frac{dt}{t}) \quad .$$

On vérifie aisément que $S(t)$ peut être remplacé dans cette égalité par

$$J_t = (I+tA)^{-1}$$

(utiliser l'inégalité $|x-S(t)x| \leq 3|x-J_tx|$ $\forall t \geq 0$, $\forall x\in H$ et la représentation de J_t sous la forme

$$\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{t}}\, S(\tau)d\tau) \quad .$$

Nous nous proposons dans ce travail d'étendre cette construction à certains opérateurs non linéaires. A cet effet, nous nous réfèrerons à la théorie des opérateurs maximaux monotones et des semi-groupes non linéaires de contractions.

Rappelons qu'un opérateur maximal monotone A est une application (multivoque) de H dans H vérifiant

(i) $\quad \forall y_1 \in Ax_1 \quad , \quad \forall y_2 \in Ax_2 \quad (y_1-y_2,x_1-x_2) \geq 0$

(ii) $\quad R(I+\lambda A) = H \quad \forall\lambda > 0$

Nous utiliserons les notations habituelles (Cf. H. Brézis [1])

$D(A) = \{x \text{ t.q. } Ax \neq \emptyset\}$

$J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ $(\lambda>0)$ résolvante de A qui est une contraction de H dans H

$A_\lambda = \frac{I-J_\lambda}{\lambda}$ régularisée Yosida de A .

$A^\circ x$ élément de norme minimale de Ax .

On sait que $-A$ engendre un semi-groupe de contractions $S(t)$ sur $\overline{D(A)}$ au sens suivant : pour tout $u_o \in D(A)$ il existe $u(t)$ solution de

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0 \quad \text{p.p sur } R+$$

$$u(o) = u_o$$

L'application $u_o \to u(t)$ prolongée par continuité à $\overline{D(A)}$ constitue un semi-groupe de contractions noté $S(t)$.

De plus si $u_o \in D(A)$ $|u_o - \mathcal{J}_t u_o| \leq Ct$ (resp. $|u_o - S(t)u_o| \leq Ct$) et si $u_o \in \overline{D(A)}$ $\mathcal{J}_t u_o \to u_o$ (resp. $S(t)u_o \to u_o$) dans H lorsque $t \to 0$.

Nous introduirons des classes intermédiaires entre $D(A)$ et $\overline{D(A)}$ qui mesurent en quelque sorte la "rapidité" avec laquelle $\mathcal{J}_t u_o$ (resp. $S(t)u_o$) tend vers uo lorsque $t \to 0$.

Pour $0 < \alpha < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$\mathcal{B}_{\alpha,p} = \{u_o \in \overline{D(A)} \quad \text{t.q.} \quad \frac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|}{t^\alpha} \in L^p_*(0,1)^{(1)}\} \quad .$$

<u>Remarque</u> : On vérifie aisément les inclusions suivantes :

$$\mathcal{B}_{\alpha,p} \subset \mathcal{B}_{\alpha,q} \quad \text{pour} \quad p \leq q$$

$$\mathcal{B}_{\alpha,p} \subset \mathcal{B}_{\alpha',q} \text{ pour } \alpha > \alpha' \quad , \quad p \text{ et } q \text{ quelconques.}$$

L'objet principal de cet exposé consiste à établir diverses caractérisations de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$. Dans une première partie, nous obtenons des caractérisations de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ pour A maximal monotone quelconque. Nous retrouvons en particulier certaines caractérisations qui sont bien connues dans le cas linéaire : caractérisation par la méthode des traces, par la méthode des sommes, par la méthode de $\mathcal{K}$ (Cf. Lions-Peetre [1]). Nous montrons de plus que l'on peut remplacer $\mathcal{J}_t$ par $S(t)$ dans la définition de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$. Contrairement au cas linéaire, la démonstration de ce résultat est difficile.

Dans une deuxième partie, nous supposons que le semi-groupe $S(t)$ engendré par $-A$ a un effet régularisant (i.e. $S(t)$ applique $\overline{D(A)}$ dans $D(A)$ pour $t > 0$

---

(1) Dans le cas linéaire, pour tout $u_o \in H$, $|\mathcal{J}_t u_o| \leq |u_o|$ $\forall t \geq 0$ et par suite $\frac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|}{t^\alpha} \in L^p_*(1,+\infty)$. Par contre dans le cas non linéaire $\mathcal{J}_t u_o$ ne reste pas nécessairement borné. Il convient alors de travailler sur $]0,1[$ au lieu de $R+$ puisque de toute manière seul le comportement au voisinage de $t = 0$ intervient.

avec $|A^\circ S(t)u_o| \leq C(|A^\circ v| + \frac{1}{t}|u_o - v|)\ \forall v \in D(A)\ ,\ \forall t > 0)$, ce qui correspond dans le cas linéaire à la classe des semi groupes analytiques. On obtient alors une caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ à l'aide de $\frac{d^+}{dt}S(t)u_o$ ainsi qu'une caractérisation à l'aide des dérivées fractionnaires de la fonction $t \to S(t)u_o$ qui paraît nouvelle même pour le cas linéaire.

Enfin dans une troisième partie, nous considérons une classe encore plus restreinte d'opérateurs en prenant A de la forme $\partial\varphi$ ($\partial\varphi$ sous-différentiel d'une fonction φ convexe, sci. propre), ce qui équivaut dans le cas linéaire à supposer A auto-adjoint (Cf. H. Brézis [1] Prop. 2.15). Nous établissons alors des caractérisations de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ qui font intervenir le comportement au voisinage de $t = 0$ des expressions $\varphi(\mathcal{J}_t u_o)$ et $\varphi(S(t)u_o)$.

Cette théorie abstraite permet d'établir un lien entre un problème de perturbations singulières et un problème d'évolution avec défaut d'ajustement. Ainsi par exemple si $H = L^2(\Omega)$ et $A = \Delta + \beta$ avec β fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \cap D(\beta)$ ($D(\beta) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $\beta(u) \in L^2(\Omega\})$ la rapidité de la convergence de u_ε vers u_o (pour $u_o \in L^2(\Omega)$) est comparable à celle de la convergence de $u(t)$ vers u_o , où u_ε est la solution du problème de perturbations singulières

$$\varepsilon(-\Delta u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon)) + u_\varepsilon = u_o \quad \text{sur } \Omega$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et $u(t)$ est la solution du problème d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0,+\infty[$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0,+\infty[$$

$$u(x,0) = u_o(x) \quad .$$

§ 1. Caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ pour A maximal monotone quelconque.

On utilise dans la suite le lemme suivant :

LEMME 1. Soit $u_o \in \overline{D(A)}$. La fonction $t \to \mathcal{J}_t u_o$ est lipschitzienne sur $]0,+\infty[$, en particulier dérivable p.p. sur $]0,+\infty[$.
De plus on a :

$$\left|\frac{d}{dt}\mathcal{J}_t u_o\right| \leq |A_t u_o| \leq \frac{1}{t}|u_o - v| + |A^\circ v| \quad \text{p.p sur }]0,+\infty[\text{ , } \forall v \in D(A) \text{ .}$$

Démonstration : On pose $u_t = \mathcal{J}_t u_o$. En multipliant l'égalité

$$u_{t+h} - u_t + t(A_{t+h}u_o - A_t u_o) = -h\, A_{t+h}u_o \quad (h > 0)$$

par $u_{t+h} - u_t$ et en utilisant la monotonie de A , il vient :

$$\frac{|u_{t+h} - u_t|}{h} \leq |A_{t+h}u_o| \leq |A_t u_o| \quad (\text{utiliser la décroissance de } t \to |A_t u_o|)$$

On en déduit :

$$\left|\frac{d}{dt}\mathcal{J}_t u_o\right| \leq |A_t u_o| \leq |A_t u_o - A_t v| + |A_t v|$$

$$\leq \frac{1}{t}|u_o - v| + |A^\circ v| \quad \text{p.p sur }]0,+\infty[, \quad \forall v \in D(A) \text{ .}$$

THEORÈME 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $t^{1-\alpha}\left|\frac{d}{dt}\mathcal{J}_t u_o\right| \in L^p_*(0,1)$

Démonstration : On déduit du Lemme 1 :

$$t^{1-\alpha}\left|\frac{d}{dt}\mathcal{J}_t u_o\right| \leq t^{1-\alpha}|A_t u_o| = \frac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|}{t^\alpha}, \quad \text{d'où} \quad (i) \Rightarrow (ii)$$

Pour démontrer (ii) $\Rightarrow$ (i) , on utilise le lemme suivant :

LEMME 2 (Lemme de Hardy)

Soit $\psi(\tau)$ une fonction positive sur $]0,1[$, mesurable pour la mesure $\frac{d\tau}{\tau}$

Pour $\gamma > 0$ et $1 \leq r \leq +\infty$, on a :

$$\left| t^{-\gamma} \int_0^t \psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right|_{L^r_*(0,1)} \leq \frac{1}{\gamma} \left| \tau^{-\gamma} \psi(\tau) \right|_{L^r_*(0,1)}$$

Appliquons ce lemme avec $\gamma = \alpha$, $r = p$ et $\psi(\tau) = \tau \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_\tau u_o \right|$

Il vient :

$$\left| t^{-\alpha} \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_\tau u_o \right| d\tau \right|_{L^p_*(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \left| \tau^{1-\alpha} \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_\tau u_o \right| \right|_{L^p_*(0,1)} < +\infty ,$$

c'est-à-dire :

$$t^{-\alpha} \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_\tau u_o \right| d\tau \in L^p_*(0,1)$$

Mais $\quad |u_o - \mathcal{J}_t u_o| \leq \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_\tau u_o \right| d\tau \quad$, d'où $\dfrac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|}{\alpha} \in L^p_*(0,1)$

THÉORÈME 2 (Méthode des traces). <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $\exists v(t)$, v <u>absolument continue sur</u> $]0,1[$, <u>continue sur</u> $[0,1]$ <u>avec</u> $v(0) = u_o$ <u>telle que</u> $v(t) \in D(A)$ p.p. <u>sur</u> $]0,1[$,

$$t^{1-\alpha} |A^\circ v(t)| \in L^p_*\ (0,1)$$
$$t^{1-\alpha} \left|\frac{d}{dt} v(t)\right| \in L^p_*\ (0,1)$$

<u>Démonstration</u> :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Choisir $v(t) = \mathcal{J}_t u_o$ en remarquant que $|A^\circ \mathcal{J}_t u_o| \leq \dfrac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|}{t}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Appliquer l'inégalité du Lemme 1 avec $v = v(t)$ et le Lemme 2.

THÉORÈME 2' (Méthode des sommes). <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $\exists v_1, v_2$ <u>mesurables sur</u> $]0,1[$, $u_o = v_1(t) + v_2(t)$ p.p. <u>sur</u> $]0,1[$

<u>telles que</u> $v_1(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0,1[$,

$$t^{1-\alpha} |A^\circ v_1(t)| \in L^p_*(0,1)$$
$$t^{-\alpha}\ |v_2(t)| \in L^p_*(0,1)$$

<u>Démonstration</u> :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Il suffit de choisir $v_1(t) = \mathcal{J}_t u_o$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Il suffit de prendre $v = v_1(t)$ dans l'inégalité du Lemme 1.

On déduit de ce résultat le théorème suivant d'interpolation :

COROLLAIRE 1 : Etant donné deux espaces de Hilbert H_1 et H_2, de normes respectives $|\;|_1$ et $|\;|_2$, on considère A_1 et A_2 opérateurs maximaux monotones respectivement sur H_1 et H_2. Soit T une application localement lipschitzienne de $\overline{D(A_1)}$ dans $\overline{D(A_2)}$ envoyant $D(A_1)$ dans $D(A_2)$ et telle que

$$|A_2^\circ Tx|_2 \leq C|A_1^\circ x|_1 + \omega(|x|_1) \quad \forall x \in D(A_1) \;,$$

ω fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors T applique $\mathcal{B}_{\alpha,p}(A_1)$ dans $\mathcal{B}_{\alpha,p}(A_2)$.

<u>Remarque</u> : En prenant $H_1 = H_2$, $A_1 = A_2$, $T = S(t)$ avec $t \geq 0$ fixé, on déduit du corollaire 1 que $S(t)$ applique $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ dans $\mathcal{B}_{\alpha,p}$.

THÉORÈME 3 (méthode $\mathcal{K}$). <u>Soit</u> $u_o \in \overline{D(A)}$. <u>On pose</u>

$$\mathcal{K}(t,u_o) = \operatorname*{Inf}_{v \in D(A)} \left(|u_o - v| + t|A^\circ v|\right)$$

<u>Les propriétés suivantes sont alors équivalentes</u> :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $t^{-\alpha}\mathcal{K}(t,u_o) \in L_*^p(0,1)$.

<u>Démonstration</u> : On vérifie aisément les inégalités

$$t^{1-\alpha}\left|\frac{d}{dt}\mathcal{J}_t u_o\right| \leq t^{-\alpha}\mathcal{K}(t,u_o) \leq 2\frac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|}{t^\alpha} \quad \forall t > 0 \;.$$

Le résultat fondamental qui suit établit l'équivalence entre la caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ par la résolvante et par le semi-groupe.

THÉORÈME 4. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $\dfrac{|u_o - S(t)u_o|}{t^\alpha} \in L_*^p(0,1)$

<u>avec</u> $$\left(\int_0^1 \frac{|u_o - \mathcal{J}_t u_o|^p}{t^{\alpha p}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 6 \left(\int_0^1 \frac{|u_o - S(t)u_o|^p}{t^{\alpha p}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration :

(i) ⇒ (ii) résulte immédiatement du

LEMME 3 . On a

$$|u_o - S(t)u_o| \leq 3|u_o - J_t u_o| \quad \forall u_o \in \overline{D(A)} \ , \ \forall t \geq 0 \ .$$

Démonstration du Lemme $|u_o - S(t)u_o| \leq 2|u_o - v| + |v - S(t)v|$

$$\leq 2|u_o - v| + t|A^\circ v| \quad \forall v \in D(A) \ .$$

Il suffit alors de choisir $v = J_t u_o$.

La démonstration de (ii) ⇒ (i) est difficile. Nous ne l'indiquons que dans le cas $p = +\infty$. Soit $\delta(\varepsilon)$ le module de continuité de $S(t)u_o$ en $t = 0$, c'est-à-dire $|S(t)u_o - u_o| \leq \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq \delta(\varepsilon)$. On sait (Cf. H. Brézis [1], Lemme 4.3) que $|J_t u_o - u_o| \leq 2\varepsilon(1+\frac{2t}{\delta(\varepsilon)})$ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t > 0$. En particulier, pour $0 \leq t \leq \delta(\varepsilon)$, il vient $|J_t u_o - u_o| \leq 6\varepsilon$.

Mais d'après l'hypothèse $|u_o - S(t)u_o| \leq Ct^\alpha$ $\forall t \in [0,1]$. On peut donc choisir $\delta(\varepsilon) = (\frac{\varepsilon}{C})^{1/\alpha}$ et par conséquent $|u_o - J_t u_o| \leq 6Ct^\alpha$ $\forall t \in [0,1]$.

§ 2. Caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ dans le cas d'un semi-groupe régularisant.

Soit A un opérateur maximal monotone sur H . On dit que S(t) semi-groupe engendré par $-A$ est régularisant si S(t) applique $\overline{D(A)}$ dans $D(A)$ $\forall t > 0$ avec

$$|A^\circ S(t)u_o| \leq C(|A^\circ v| + \frac{1}{t}|u_o - v|) \quad \forall u_o \in \overline{D(A)} \ , \ \forall v \in D(A) \ , \ \forall t > 0 \ .$$

Pour $u_o \in \overline{D(A)}$, la fonction $t \to S(t)u_o$ est alors dérivable à droite $\forall t > 0$ avec $\frac{d^+}{dt} S(t)u_o + A^\circ S(t)u_o = 0$.

Remarque : De nombreux semi-groupes sont régularisants : les semi-groupes linéaires analytiques, les semi-groupes associés aux opérateurs sous-différentiels (Cf. H. Brézis [1], Th. 3.2), les semi-groupes associés aux opérateurs $A_{\frac{1}{2}}$ (pour la définition de $A_{\frac{1}{2}}$, Cf. Barbu [1], Brézis [2] ; pour la vérification de la propriété régularisante, Cf. D. Brézis, à paraître). Dans le cas d'un semi-groupe régularisant, on peut obtenir des caractérisations supplémentaires de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ faisant notamment intervenir $\frac{d^+}{dt}S(t)u_o$.

THÉORÈME 5 . Soit $S(t)$ un semi-groupe régularisant. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $t^{1-\alpha}\left|\frac{d^+}{dt} S(t)u_o\right| \in L^p_*(0,1)$

Démonstration : Par une démonstration analogue à celle du Théorème 1 où l'on remplace J_t par $S(t)$ - l'inégalité associée à l'effet régularisant correspondant à l'inégalité du Lemme 1 - on établit l'équivalence entre (ii) et

$$\frac{|u_o - S(t)u_o|}{t^\alpha} \in L^p_*(0,1) \quad .$$

On conclut alors à l'aide du Théorème 4.

Remarque : Dans le cas des semi-groupes linéaires analytiques, on retrouve l'égalité entre les espaces intermédiaires $X_{\alpha,1,p}$ et $X'_{\alpha,1,p}$ de normes respectives

$$|u_o|_{\alpha,1,p} = |u_o| + \left\| \frac{|S(t)u_o - u_o|}{t^\alpha} \right\|_{L^p_*(0,+\infty)}$$

et

$$|u_o|'_{\alpha,1,p} = |u_o| + \left\| t^{1-\alpha} |A\, S(t)u_o| \right\|_{L^p_*(0,+\infty)}$$

(Cf. Butzer et Berens [1], p. 157).

THÉORÈME 6 . Soit $S(t)$ un semi-groupe régularisant et soient α, p et q tels que $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{q}$, $q < +\infty$, $q \leq p$. On a alors l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) $u_o \in \omega_{\alpha,p}$

(ii) $$\left(\frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 |S(t)u_o - S(t-h)u_o|^q dt \right)^{1/q} \in L^p_*(0,1)$$

(iii) $$\left(h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left|\frac{d^+}{dt} S(t)u_o\right|^q dt \right)^{1/q} \in L^p_*(0,1)$$

Nous déduisons du résultat précédent appliqué avec $p = q$ une caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ au moyen des dérivées fractionnaires de $S(t)u_o$.

COROLLAIRE 2 . Soit $S(t)$ un semi-groupe régularisant et soient α et p tels que $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$, $p < +\infty$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $S(t)u_o \in W^{\alpha+1/p,p}(0,1)$ où $W^{\sigma,p}(0,1)$ $(0 < \sigma < 1)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables $u :]0,1[\to H$ telles que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+\sigma p}} \, dx \, dy < +\infty$$

Remarque : La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) est encore vraie pour A maximal monotone quelconque. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) tombe par contre en défaut dans le cas général. On vérifie en effet que (ii) est équivalent à

$$\int_0^1 dt \int_0^{1-t} |S(t+h)u_o - S(t)u_o|^p \frac{dh}{h^{2+\alpha p}} < +\infty$$

On en déduit l'existence d'une suite décroissante t_n convergeant vers 0 telle que

$$\int_0^{1-t_n} |S(h)S(t_n)u_o - S(t_n)u_o|^p \frac{dh}{h^{2+\alpha p}} < +\infty$$

d'où $S(t_n)u_o \in \mathcal{B}_{\alpha+1/p,p}$ $\forall n$ et par conséquent

$$S(t)u_o \in \mathcal{B}_{\alpha+1/p,p} \quad \forall t > 0 \quad \text{(utiliser le corollaire 1)}$$

Si l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) était vraie dans le cas général, on aurait par suite

$$u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p} \Rightarrow S(t)u_o \in \mathcal{B}_{\alpha+1/p,p} \quad \forall t > 0 \quad .$$

Il suffit alors de prendre comme contre-exemple le groupe des translations sur $L^2(\mathbb{R})$. On a en ce cas $\mathcal{B}_{s,2} = H^s(\mathbb{R})$ (Cf. Lions-Magenès [1], Th. 10.1). Il en résulte que les translations appliqueraient $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^{s+1/2}(\mathbb{R})$, ce qui est évidemment absurde.

§ 3 . Caractérisation de $\omega_{\alpha,p}$ pour $A = \partial\varphi$

Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, sci, $\varphi \not\equiv +\infty$

On pose $D(\varphi) = \{u \in H \quad \varphi(u) < +\infty\}$

$$Au = \partial\varphi(u) = \{ f \in H \ , \ \varphi(v)-\varphi(u) \geqq (f, v-u) \quad \forall v \in H \}$$

$$D(A) = \{u \in D(\varphi) \ , \ Au \neq \emptyset \}$$

$A = \partial\varphi$ est alors un opérateur maximal monotone et le semi-groupe $S(t)$ engendré par $-A$ est régularisant (Cf. H. Brézis [1], Th. 3.2)

Le théorème suivant permet de retrouver directement le résultat du théorème 4.

THÉORÈME 8 . Soit $A = \partial\varphi$. On a alors les inégalités suivantes :

(i) $\left|\frac{d^+}{dt} S(t)u_o\right| \leqq \frac{|u_o - S(t)u_o|}{t}$

(ii) $\frac{1}{3}|u_o - S(t)u_o| \leqq |u_o - \mathcal{J}_t u_o| \leqq 3|u_o - S(t)u_o|$

Démonstration : Au cours de la démonstration établissant l'effet régularisant dans le cas $A = \partial\varphi$, on utilise l'inégalité

$$\frac{1}{2} T^2 \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \leqq \frac{1}{2}|u_o - v|^2 - \frac{1}{2}|u(T) - v|^2 - T(A_\lambda v, u_\lambda(T) - v)$$

où u_λ est la solution de $\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0$, $u_\lambda(0) = u_o$.

Il suffit de prendre $v = u_\lambda(T)$ et de faire tendre λ vers 0 pour obtenir (i) .

On a de plus

$$\begin{aligned} |u_o - \mathcal{J}_t u_o| &\leqq 2|u_o - v| + |v - \mathcal{J}_t v| \\ &\leqq 2|u_o - v| + t|A^\circ v| \quad \forall v \in D(A) \end{aligned}$$

En prenant $v = S(t)u_o$ dans cette inégalité et en utilisant (i) , on en déduit (ii) (l'inégalité de gauche est déjà vraie pour A maximal monotone général, Cf. Lemme 3).

Dans le cas $A = \partial\varphi$, nous avons des caractérisations supplémentaires de $\omega_{\alpha,p}$ à l'aide des expressions $\varphi(S(t)u_o)$ et $\varphi(\mathcal{J}_t u_o)$. Ces caractérisations diffèrent suivant les valeurs de α .

THÉORÈME 9 . Soit $A = \partial\varphi$ et soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{|\varphi(S(t)u_o|} \in L^p_*(0,1)$

(iii) $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{|\varphi(J_t u_o)|} \in L^p_*(0,1)$

(iv) $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{|\varphi_t(u_o)|} \in L^p_*(0,1)$

où $\varphi_t(u_o) = \operatorname*{Inf}_{v \in D(\varphi)} \varphi(v) + \frac{1}{2t}|u_o - v|^2 = \varphi(J_t u_o) + \frac{1}{2t}|u_o - J_t u_o|^2$

THÉORÈME 10 . Soit $A = \partial\varphi$ et soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u_o \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$

(ii) $u_o \in D(\varphi)$ et $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\varphi(u_o) - \varphi(S(t)u_o)} \in L^p_*(0,1)$

(iii) $u_o \in D(\varphi)$ et $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\varphi(u_o) - \varphi(J_t u_o)} \in L^p_*(0,1)$

(iv) $u_o \in D(\varphi)$ et $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\varphi(u_o) - \varphi_t(u_o)} \in L^p_*(0,1)$

(on montre que ces expressions sont toujours définies)

BIBLIOGRAPHIE

V. BARBU [1] A class of boundary problems for second order abstract differential equations, C.R. Acad. Sci.(Janvier 1972).

H. BREZIS [1] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. studies 5, North Holland (1973).

H. BREZIS [2] Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones, Israël Journal of Math. vol. 12, n° 1 (1972).

BUTZER-BERENS [1] Semi-groups of operatorsand approximation, Springer (1967).

LIONS-PEETRE [1] Sur une classe d'interpolation, I.H.E.S., Publ. Math. 19 (1964), 5-68.

LIONS-MAGENES [1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod (1968).