Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Charles Goulaouic

Résultats d'analyticité pour des opérateurs linéaires elliptiques dégénérés

Séminaire Jean Leray (1972), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972____A6_0>

RÉSULTATS D'ANALYTICITÉ POUR DES OPÉRATEURS LINÉAIRES ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS

par Charles GOULAOUIC (*)

Il s'agit essentiellement ici de régularité analytique réelle (hypoellipticité analytique et régularité analytique "jusqu'au bord" pour des problèmes aux limites).

Rappelons d'abord brièvement quelques résultats parmi les plus connus :

- Tout opérateur elliptique à coefficients analytiques est hypoelliptique analytique et inversement tout opérateur à coefficients constants hypoelliptique analytique est elliptique (I.G. Petrowsky [16]).

- Pour un problème aux limites elliptique "régulier" à données analytiques toute solution est analytique jusqu'au bord (C.B. Morrey et L. Nirenberg [15]).

Nous nous proposons de donner maintenant des résultats positifs d'analyticité dans des cas qui n'entrent pas dans les cadres ci-dessus et aussi des résultats négatifs dans des situations apparemment peu différentes des précédentes.

Considérons d'abord un tableau d'exemples les plus simples possibles que l'on peut considérer comme des "modèles significatifs".

1. EXEMPLES DE RÉGULARITÉ ANALYTIQUE POUR DES OPÉRATEURS DÉGÉNÉRÉS.

Pour $F \subset \mathbb{R}^n$, on notera $\mathcal{A}(F)$ l'espace des restrictions à F de fonctions analytiques dans un voisinage ouvert de F ; on note aussi $D_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$.

On dit qu'un opérateur différentiel $\mathcal{A}$ a la <u>régularité analytique</u> dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ on a la propriété :

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^\infty(\Omega_1) \\ \\ \mathcal{A}u \in \mathcal{A}(\Omega_1) \end{array}\right\} \quad \text{impliquent : } u \in \mathcal{A}(\Omega_1) .$$

Si, de plus, l'opérateur $\mathcal{A}$ est hypoelliptique dans Ω, il est alors hypoelliptique analytique dans Ω.

<u>Exemple</u> 1.

L'opérateur $\mathcal{A}_1 = D_y^2 + y^2 D_x^2$ a la régularité analytique dans $\mathbb{R}^2$ (cf. [14]) ; notons que l'hypoellipticité d'un tel opérateur a été montrée dans [2].

(*) La contribution de l'auteur aux résultats ci-dessous a été obtenue en collaboration avec M.S. Baouendi.

Exemple 2 (changeant de signe).

L'opérateur $\mathcal{A} = D_y y D_y + y D_x^2$ a la régularité analytique dans $\mathbb{R}^2$ (cf. [3]) ; notons que cet opérateur n'est pas hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$, car, en désignant par Y la fonction caractéristique de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$, on a $\mathcal{A} Y = 0$.

Voici maintenant quelques exemples de régularité analytique jusqu'au bord :

Exemple 3 (opérateur de Legendre).

L'opérateur $\mathcal{L} = D_x(1-x^2)D_x$ sur $]-1,+1[$ a la régularité analytique jusqu'au bord au sens suivant :

Pour tout ouvert Ω de $[-1,+1]$,

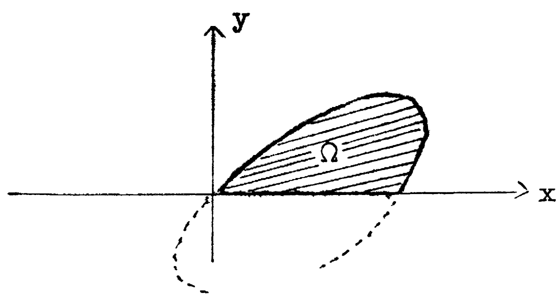
$$\left.\begin{array}{l} u \in C^1(\Omega) \\ \mathcal{L}u \in \alpha(\Omega) \end{array}\right\} \text{ impliquent : } u \in \alpha(\Omega)$$

(en particulier, on peut prendre $\Omega = [-1,+1]$).
Notons qu'il n'y a pas de conditions aux limites parce que l'opérateur $\mathcal{L}$ est dégénéré au bord, mais qu'il faut supposer un peu de régularité a priori sur u (en effet : $\mathcal{L}(\mathrm{Log}\,\frac{1-x}{1+x}) = 0$).

Lorsqu'on cherche à généraliser cet exemple au cas de plusieurs variables, on est amené à considérer diverses possibilités :

Exemple 4 (complètement dégénéré au bord).

Soient Ω un ouvert de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0\}$ et $\mathcal{A} = D_y y D_y + y D_x^2$; on a :



$$\left.\begin{array}{l} u \in C^1(\Omega) \\ \mathcal{A}u \in \alpha(\Omega) \end{array}\right\} \text{ impliquent : } u \in \alpha(\Omega).$$

Exemple 5 (dégénéré seulement suivant la direction normale au bord).

Soient Ω un ouvert de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0\}$ et $\mathcal{A} = D_y y D_y + D_x^2$; on a encore :

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^1(\Omega) \\ \mathcal{A}u \in \alpha(\Omega) \end{array}\right\} \text{ impliquent : } u \in \alpha(\Omega).$$

2. COMMENTAIRES ET GÉNÉRALISATIONS.

1°) La régularité analytique de l'exemple 2 résulte immédiatement de celle de l'exemple 4.

2°) On peut traiter directement l'exemple 3 de la façon suivante. On considère le laplacien sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$ restreint aux fonctions invariantes par rotation autour d'un diamètre ; par projection sur ce diamètre on obtient l'opérateur de Legendre ; comme les fonctions analytiques sur $[-1,+1]$ sont alors en correspondance avec les fonctions analytiques sur S invariantes par rotation autour d'un diamètre, on s'est ramené à la régularité analytique "à l'intérieur" pour un opérateur elliptique.

3°) La méthode ci-dessus, convenablement adaptée (cf. paragraphe 4) permettrait aussi d'étudier l'exemple 5, mais elle est insuffisante dans des cas plus généraux (et même pour l'exemple 4) et les méthodes utilisées dans ces cas sont une adaptation de celle de Morrey et Nirenberg [15]. On renvoie à la bibliographie pour les détails, l'idée directrice étant : localiser le problème, obtenir des inégalités <u>a priori</u> dans des espaces avec poids traduisant la "régularité L^2"; utiliser ensuite les ouverts emboités comme dans [15] mais en adaptant les troncatures à la dégénérescence ; utiliser des inégalités de Hardy qui permettent de comparer des dérivations usuelles et des opérateurs différentiels dégénérés (par exemple, pour $u \in \mathcal{D}([0,\infty[)$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\|D_y^k u\|_{L^2(0,\infty)} \leq \frac{2}{2k+1} \|D^{k+1} yu(y)\|_{L^2(0,\infty)}$$

$$\|D_y^k u\|_{L^2(0,\infty)} \leq \frac{2^k}{k!} \|(D_y\, y\, D_y)^k u\|_{L^2(0,\infty)} ,$$

ce qui se démontre essentiellement en utilisant la transformation de Hardy :

$$u(y) = \frac{1}{y} \int_0^y D_t(tu(t))dt) .$$

4°) Ainsi, dans [9] est démontrée une généralisation de l'exemple 1, qui s'énonce essentiellement comme suit : on a la régularité analytique dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pour

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,t,D_x,D_t) = P(x,t,D_t) + t^{2k}Q(x,t,D_x)$$

où P, Q sont fortement elliptiques et à coefficients analytiques et $k \in \mathbb{N}$.

5°) Dans [3] et [4] on prouve des résultats de régularité pour des classes d'opérateurs généralisant les exemples 4 et 5 (et <u>a fortiori</u> 3) :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ défini par une fonction φ analytique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > 0\}$$

$$\Gamma = \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) = 0\}$$

$$d\varphi \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma .$$

On considère un opérateur différentiel sur Ω :

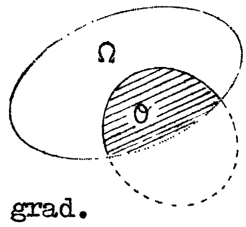
$$\mathscr{A}_4 = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\beta a_{\alpha\beta} \varphi D^\alpha$$

avec $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$ et tels qu'il existe $c > 0$ vérifiant :

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = 1} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq c|\xi|^2 \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad x \in \Omega .$$

On a alors en particulier le résultat :

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> $\mathcal{O}$ <u>un ouvert de</u> $\bar{\Omega}$ <u>et</u> $u \in C^1(\mathcal{O})$ <u>telle que</u> $\mathscr{A}_4 u \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$; <u>alors</u> $u \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$.



Par exemple, on peut prendre pour $\mathscr{A}_4$ l'opérateur div φ grad.

En plus des notations ci-dessus, posons

$$\mathrm{grad}\, \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

$$\Lambda_{ij} = \varphi_i D_j - \varphi_j D_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i,j \leq n .$$

$$\mathscr{A}_5 = \mathscr{A}_4 + \sum_j \Lambda_{ij}^* \Lambda_{ij} .$$

On vérifie que l'opérateur $\mathscr{A}_5$ est dégénéré sur Γ seulement suivant les directions transversales. On a aussi le résultat :

PROPOSITION 2. <u>Soient</u> $\mathcal{O}$ <u>un ouvert de</u> $\bar{\Omega}$ <u>et</u> $u \in C^1(\mathcal{O})$ <u>telle que</u> $\mathscr{A}_5 u \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$; <u>alors</u> $u \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$.

6°) Signalons encore quelques généralisations :

– La méthode de démonstration utilisée, reposant sur des inégalités, permet d'obtenir avec à peine plus de fatigue, des résultats de régularité de type Gevrey (cf. [3] [4]).

- Des résultats de régularité analytique (et Gevrey) ont été obtenus pour des opérateurs elliptiques dégénérés généralisant l'opérateur de Legendre, mais sur des ouverts irréguliers (cf. [6]).

- Une étude de problèmes aux limites elliptiques dégénérés plus généraux (par l'ordre des opérateurs et les types de dégénérescence) a été faite dans [7] pour la régularité C^∞ et [8] pour la régularité analytique.

Le fait de n'avoir pas détaillé ici les méthodes utilisées pour montrer les résultats de régularité analytique ne permet pas d'expliquer les difficultés d'applications de ces méthodes ; signalons seulement qu'elles s'appliquent à l'opérateur $\mathcal{A}_1 = D_y^2 + y^2 D_x^2$ dans $\mathbb{R}^2$, mais pas à l'opérateur $\mathcal{A}_2 = D_t^2 + D_y^2 + y^2 D_x^2$ dans $\mathbb{R}^3$! On va même montrer que ce dernier opérateur n'a pas la régularité analytique (cf. [5]), mais pour cela on est amené à introduire une notion supplémentaire.

3. PROPRIÉTÉ DES ITÉRÉS.

Rappelons d'abord un résultat dû à N. Aronszajn [1] dans le cas du laplacien et généralisé à un opérateur elliptique par T. Kotake et N.S. Narasimhan [12].

PROPOSITION 3. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients analytiques dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; pour une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La fonction $u \in \mathcal{A}(\Omega)$.

ii) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(K)} \leq L^{k+1}(2k)! \ .$$

Ce résultat a été étendu dans [13] à des problèmes aux limites elliptiques et, dans [4], nous avons montré l'analogue de la proposition 3 pour une variété à bord et en utilisant (nécessairement) un opérateur elliptique dégénéré convenable.

PROPOSITION 4 (avec les notations des propositions 1 et 2). Soit $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La fonction $u \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

ii) Il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{A}_5^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1} \, 2k! \quad .$$

Nous donnerons une démonstration de cette proposition à la fin de ce paragraphe.

Par ailleurs une telle propriété des itérés est fausse pour des opérateurs du type $\mathcal{A}_4$, c'est-à-dire complètement dégénérés au bord (remarque de L. Boutet de Monvel) ; plus précisément, on a :

PROPOSITION 5. Soit dans $\mathbb{R}^n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\}$ un opérateur $\mathcal{A}$ de la forme

$$\mathcal{A}(x,y,D_x,D_y) = yP + Q ,$$

où P est elliptique d'ordre 2, Q d'ordre 1, tous deux à coefficients analytiques et, pour simplifier, vérifiant $PQ - QP = 0$.

Soit Ω un voisinage ouvert borné de 0 dans $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty[$; il existe $L > 0$ et $u \in C^\infty(\Omega)$ non analytique au voisinage de 0 et telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1}\, 2k! \quad .$$

La démonstration est presque immédiate si on remarque que, pour u vérifiant $Pu = 0$, on a $\mathcal{A}^k u = Q^k u$.

La propriété des itérés et la régularité analytique sont liées ; que ce soit pour un problème de régularité à l'intérieur ou jusqu'au bord, on a :

PROPOSITION 6. 1°) La propriété des itérés implique la régularité analytique.

2°) Si l'opérateur $D_t^2 + \mathcal{A}$ a la régularité analytique en les variables (t,x), l'opérateur $\mathcal{A}$ a la propriété des itérés en les variables x .

Démonstration. Seulement le 2°) présente quelque difficulté ; nous le montrons par exemple dans le cas de la régularité "à l'intérieur", en utilisant une idée utilisée dans [13] :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que, pour tout $K \subset \Omega$, il existe $L > 0$ vérifiant :

$$\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(K)} \leq L^{k+1}\, 2k! \qquad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N} \ ;$$

on considère la fonction

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \frac{\mathcal{A}^k u(x)}{2k!} \ ,$$

qui est donc définie et C^∞ dans un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dont la trace sur $\mathbb{R}^n$ est Ω ; dans $\tilde{\Omega}$, on a

$$(D_t^2 + \mathcal{A})v = 0 \ ,$$

donc v est analytique dans $\tilde{\Omega}$ et comme $v(x,o) = u(x)$, il en résulte que u est analytique dans Ω.

On déduit immédiatement de la proposition 6 que l'opérateur $\mathcal{A}_5$ a la propriété des itérés (proposition 4) puisque $D_t^2 + \mathcal{A}_5$ est un opérateur de la même forme que $\mathcal{A}_5$ (avec une variable tangentielle de plus) et a donc aussi la régularité analytique.

De même, l'opérateur $D_y\, y\, D_y + y\, D_x^2$ n'ayant pas la propriété des itérés dans $\mathbb{R} \times [o,\infty[$, il en résulte que l'opérateur $D_t^2 + D_y\, y\, D_y + y\, D_x^2$ n'a pas la régularité analytique dans $\mathbb{R} \times [o,\infty[\times \mathbb{R}$.

4. CHANGEMENT DE VARIABLES.

L'idée d'étudier l'opérateur de Legendre comme projection d'un Laplacien peut s'exploiter de façon analytique et donc dans un cadre plus général, pour ramener des problèmes au bord à des problèmes à l'intérieur (éventuellement en augmentant la dimension de l'espace).

D'après l'étude du paragraphe 3, il existe une fonction v de classe C^∞ dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R} \times [o,\infty[\times \mathbb{R}$ non analytique au voisinage de 0 et telle que (avec m entier $\geqq 1$) :

$$[D_t^2 + y(D_x^2 + 4D_y^2)2mi\ D_y]v = 0 .$$

On fait le changement de variables :

$$y = z_1^2 + \ldots + z_m^2$$

et on pose

$$w(x,z_1,\ldots,z_m,t) = v(x,z_1^2 + \ldots + z_m^2,t) .$$

Cette fonction w est C^∞ dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$; elle ne peut pas être analytique au voisinage de 0 (sinon v le serait) et elle vérifie :

$$Hw = 0 \quad \text{avec} \quad H = (z_1^2 + \ldots + z_m^2)D_x^2 + D_{z_1}^2 + \ldots + D_{z_m}^2 + D_t^2 .$$

En particulier, on a obtenu le résultat suivant :

<u>L'opérateur</u> $\mathcal{A}_2 = D_t^2 + D_y^2 + y^2 D_x^2$ <u>n'a pas la régularité analytique</u> (<u>au voisinage de</u> $y = 0$).

5. REMARQUES.

Les opérateurs $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ sont des cas particuliers d'opérateurs de la forme $\sum_{i=1}^{r} X_i^2$ introduits par L. Hörmander [11], les $(X_i)_{i=1,\dots,r}$ étant des champs de vecteurs C^∞ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; lorsque l'algèbre de Lie engendrée par les $(X_i)_{i=1,\dots,r}$ est de rang n , un tel opérateur est hypoelliptique. L'opérateur $\mathcal{A}_2$ montre que de tels opérateurs à coefficients analytiques n'ont pas toujours la régularité analytique (même lorsque l'espace engendré par les $(X_i)_{i=1,\dots,r}$ et leurs commutants est de dimension n). Par ailleurs, dans [10] il est montré que de tels opérateurs $\sum_{i=1}^{r} X_i^2$ à coefficients analytiques ont une régularité Gevrey d'ordre s , (G_s), qui dépend de la longueur des commutants nécessaire pour engendrer tout l'espace. Ainsi l'opérateur $\mathcal{A}_2$ n'a pas la régularité G_s pour $s < 2$ (il suffit pour le voir de détailler la démonstration ci-dessus) et a la régularité G_s pour $s > 2$ (cf. [10]). Un tel opérateur $\mathcal{A}_2$ a-t-il la régularité G_2 ?

Il serait intéressant d'obtenir une caractérisation des opérateurs elliptiques dégénérés qui ont la régularité analytique (même parmi les opérateurs de la forme $\sum_{i=1}^{r} X_i^2$ de [11]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN. Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, C.R. Acad. Sc. Paris, t.205 (1937), 16-18.

[2] M.S. BAOUENDI. Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), 45-87.

[3] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 4 (1971), 31-46.

[4] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Régularité et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés, applications, Journal of Functional Analysis 9, (1972), 208-248.

[5] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Nonanalytic-hypoellipticity for some degenerate elliptic operators ; Bull. A.M.S. vol. 78, number 3 (1927).

[6] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC et B. HANOUZET. Caractérisation de classes de fonctions C^{∞} et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel, J. Math. pures et appl. (à paraître).

[7] P. BOLLEY et J. CAMUS. Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables (à paraître).

[8] P. BOLLEY, J. CAMUS et B. HANOUZET. Régularité analytique et Gevrey pour des problèmes aux limites elliptiques dégénérés (à paraître).

[9] M. DERRIDJ et C. ZUILY. Régularité analytique d'opérateurs dégénérés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273 (1971), 720-723.

[10] M. DERRIDJ et C. ZUILY. Régularité Gevrey d'opérateurs elliptiques dégénérés, C.R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

[11] L. HÖRMANDER. Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1968), 147-171.

[12] T. KOTAKE et N.S. NARASIMHAN. Fractional power of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 449-471.

[13] J.L. LIONS et E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes, t. 3, Dunod (Paris) 1970.

[14] T. MATSUZAWA. Sur les équations $u_u + t^\alpha u_{xx} = f$ $(\alpha \geqq 0)$, Nagoya Math. J. vol. 42 (1971), 43-55.

[15] C.B. MORREY et L. NIRENBERG. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, C.P.A.M. vol. X (1957), 271-290.

[16] I.G. PETROWSKY. Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, Mat. Sbornik 5 (47), (1939), 3-70.