Pham The Lai

L'analogue dans $\mathcal{C}^p$ des théorèmes de convexité de M. Riesz et G. O. Thorin

Séminaire Jean Leray (1972), exp. nº 2, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972____A5_0>

L'ANALOGUE DANS $\mathcal{C}^p$ DES THÉORÈMES DE CONVEXITÉ DE M. RIESZ ET G.O. THORIN

par PHAM THE LAI

§ 1. Les espaces vectoriels considérés sont complexes, sauf mention du contraire.

Nous notons $|\ |$ les différentes normes rencontrées.

Soit H un espace de Hilbert ; $\mathcal{C}^{\omega+1}(H)$ (resp. $\mathcal{C}^{\omega}(H)$; resp. $\mathcal{F}(H)$) désignera l'espace vectoriel des opérateurs linéaires et continus de H dans H (resp. l'idéal des opérateurs compacts ; resp. l'idéal des opérateurs de rang fini) $\mathcal{C}^{\omega+1}(H)$ et $\mathcal{C}^{\omega}(H)$ seront munis de la norme des opérateurs ; ce sont des espaces de Banach. $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$.

Soit p une valeur numérique réelle (finie) $p \geqq 1$. Nous désignons par $\mathcal{C}^p(H)$ l'ensemble des $T \in \mathcal{C}^{\omega}(H)$ tels que la suite $\{\lambda_n(T)\}_{n\geqq 1}$ décroissante, tendant vers zéro (avec répétition éventuelle suivant la multiplicité) des valeurs propres de $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, la racine carrée de T^*T , soit dans ℓ^p, espace des suites de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable.

Si $T \in \mathcal{C}^p(H)$, notons

$$|T|_p = \{ \sum_1^{\infty} \lambda_n^p(T)\}^{1/p} .$$

On sait que (cf. [2] par exemple), pour tout $p \geqq 1$, $\mathcal{C}^p(H)$ est un espace vectoriel et $|\ |_p$ est une norme sur $\mathcal{C}^p(H)$; muni de cette norme $\mathcal{C}^p(H)$ est un espace de Banach et $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^p(H)$. De plus, pour $\forall\, p,q$ tels que $1 \leqq p \leqq q$

$$\mathcal{C}^p(H) \subset \mathcal{C}^q(H) \subset \mathcal{C}^{\omega}(H)$$

avec injections continues.

Nous allons prouver dans ce travail que les analogues des théorèmes de convexité bien connus des espaces de fonctions L^p sont vrais pour les espaces d'opérateurs $\mathcal{C}^p(H)$.

§ 2. Soit H un espace de Hilbert.

Si $T \in \mathcal{C}^1(H)$, la suite $\{\mu_j(T)\}_{j\geqq 1}$ des valeurs propres de T étant rangée par ordre de module décroissant (avec répétition éventuelle suivant la multiplicité), la série $\sum_j \mu_j(T)$ est absolument convergente (cf. [2]).

Notons :

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_j \mu_j(T) .$$

L'application $T \to \mathrm{Tr}(T)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^1(H)$ et on a $|\mathrm{Tr}(T)| \leq |T|_1$. C'est la forme trace. $\mathcal{C}^1(H)$ est connu sous le nom d'espace d'opérateurs à trace ou d'opérateurs nucléaires.

Si $T \in \mathcal{C}^1(H)$ et $S \in \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$, alors TS et ST appartiennent à $\mathcal{C}^1(H)$ et on a :

(1) $$\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(ST) .$$

Plus généralement, si p et p' sont deux nombres réels tels que $1 < p$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et si $T \in \mathcal{C}^p(H)$ et $S \in \mathcal{C}^{p'}(H)$, on a encore TS et ST dans $\mathcal{C}^1(H)$ ainsi que l'égalité (1) (cf. [2]).

Le théorème de dualité suivant est bien connu, du moins dans le cas H séparable (cf. [4]). Nous donnons ici sa preuve pour le cas général (voir aussi [3]).

THÉORÈME 1. Soit H un espace de Hilbert.

a) Le dual de l'espace $\mathcal{C}^{\omega}(H)$, muni de la norme des opérateurs, est l'espace $\mathcal{C}^1(H)$ et le dual de $\mathcal{C}^1(H)$ est $\mathcal{C}^{\omega+1}(H)$.

b) Soit p un nombre réel > 1. Le dual de $\mathcal{C}^p(H)$ est $\mathcal{C}^{p'}(H)$ où p' est le conjugué de p .

Preuve: La partie a) est un résultat bien connu de J. Dixmier et R. Schatten (cf. [1] [6]).

Prouvons b). Soit p un nombre réel > 1 et p' le conjugué de p . Si $S \in \mathcal{C}^{p'}(H)$, alors on a (cf. [2])

(2) $$|S|_{p'} = \sup_{T \in \mathcal{C}^p(H)} \frac{|\mathrm{Tr}(TS)|}{|T|_p} ;$$

donc S définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^p(H)$, de norme la norme de S dans $\mathcal{C}^{p'}(H)$, via la forme trace :

$$T \to \mathrm{Tr}(TS) .$$

Réciproquement, soit F une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^p(H)$. Elle définit donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^1(H)$ et, en vertu de a), il existe un opérateur $S \in \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$ tel que :

(3) $$F(T) = \mathrm{Tr}(TS) \qquad \forall\, T \in \mathcal{C}^1(H)$$

donc pour $\forall\ T\in\mathcal{C}^p(H)$ puisque F et la forme trace définie par S sont continues sur $\mathcal{C}^p(H)$, pourvu que l'on montre que $S\in\mathcal{C}^{p'}(H)$.

Prouvons que $S\in\mathcal{C}^{p'}(H)$.

D'abord, prouvons que $S\in\mathcal{C}^{\omega}(H)$. Considérons, pour cela, la factorisation polaire de S :

$$S = U(S^*S)^{\frac{1}{2}}$$

U étant un opérateur partiellement isométrique de H dans H .

Si S n'était pas compact, $(S^*S)^{\frac{1}{2}}$ ne le serait pas. La théorie spectrale (cf. [5]) des opérateurs auto-adjoints positifs montre qu'il existerait un projecteur spectral P de rang infini tel que :

$$P = Q(S^*S)^{\frac{1}{2}}$$

où $Q\in\mathcal{C}^{\omega+1}(H)$.

Par conséquent, vu (3), on a :

$$\text{(4)} \qquad F(RQU^*) = Tr(RP) \qquad \forall\ R\in\mathcal{F}(H) .$$

Soit R_n une projection auto-adjointe de rang n tel que $R_n = R_nP = PR_n$. Alors $Tr(R_nP) = n$.

D'autre part, il existe une constante C telle que

$$|F(RQU^*)| \leq C|R|_p \qquad \forall\ R\in\mathcal{F}(H) .$$

D'où, de (4), on a :

$$n \leqq Cn^{1/p} \qquad \forall\ n \geqq 1$$

ce qui est contradictoire puisque $p > 1$.

Par conséquent $S\in\mathcal{C}^{\omega}(H)$.

Il reste à prouver que la suite $\{\lambda_n(S)\}_{n\geq 1}$ est dans $\ell^{p'}$.

En effet, $(S^*S)^{\frac{1}{2}}$ est alors une série convergente :

$$(S^*S)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 1} \lambda_n(S)\ P_n$$

où P_n est une suite de projections spectrales orthogonales de rang 1.

Soit $\xi = \{\xi_n\}_{n\geq 1}$ une suite numérique positive de ℓ^p et considérons

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\ P_k .$$

En vertu de (3), on a :

$$F(R_n U^*) = \mathrm{Tr}(R_n (S^*S)^{\frac{1}{2}}) .$$

D'où :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k(S)\right| \leqq C|R_n|_p = C(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p)^{1/p} \qquad \forall n .$$

Il vient :

$$\left|\sum_{1}^{\infty} \xi_k \lambda_k(S)\right| \leqq C(\sum_{1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} .$$

De la dualité entre ℓ^p et $\ell^{p'}$, on déduit aisément :

$$S \in \mathcal{C}^{p'}(H) .$$

Par conséquent (3) est vrai pour tout $T \in \mathcal{C}^p(H)$ et vu (2) :

$$|F| = |S|_{p'}$$

et la preuve du théorème 1 est achevée.

§ 3. Soient E un espace vectoriel, B un espace de Banach.

Une application $\mathcal{G}: E \to B$ sera dite analytique si, pour toute famille finie d'éléments $e_1, \dots, e_k$ de E, la fonction de k variables complexes

$$(z_1, \dots, z_k) \longmapsto \mathcal{G}(z_1 e_1, \dots, z_k e_k)$$

est analytique de $\mathbb{C}^k$ dans B.

Si E est une somme directe d'espaces vectoriels $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$, nous avons ainsi une définition d'application analytique de $E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ dans B.

Nous utiliserons le théorème suivant (cf. [2]) qui est une conséquence et une généralisation du théorème classique des "trois droites".

THÉORÈME 2. <u>Soit</u> K <u>un convexe de</u> $\mathbb{R}^k$ (k <u>entier</u> $\geqq 1$) <u>et notons</u> $b(K)$ <u>la bande dans</u> $\mathbb{C}^k$ <u>de base</u> K

$$b(K) : \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k ; z_j = a_j + ib_j ;$$

$$a = (a_1, \dots, a_k) \in K ; b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k\} .$$

<u>Soient</u> B <u>un espace de Banach et</u> f <u>une application définie, continue et bornée sur</u> $b(K)$ <u>à valeur dans</u> B. <u>Supposons que</u> f <u>est analytique à l'intérieur de</u> $b(K)$.

<u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est la fonction définie sur</u> K <u>par</u> :

$$a \to \mathfrak{M}(a) = \sup_{b \in R^k} |f(a+ib)|$$

<u>alors</u> $\operatorname{Log} \mathfrak{M}$ <u>est convexe sur</u> K.

§ 4. Soient H un espace de Hilbert, A un opérateur compact, auto-adjoint de H dans H.

Pour tout $z \in C$ tel que $\operatorname{Re} z \geqq 0$, notons A^z l'opérateur :

$$A^z = \sum_j \lambda_j^z E_j$$

$\sum_j \lambda_j E_j = A$ étant la décomposition spectrale de A.

On vérifie aussitôt que A^z est un opérateur normal et si $\operatorname{Re} z = 0$, A^z est unitaire. Pour $z = 0$, A^0 est la projection auto-adjointe de H sur la fermeture de l'image de A, son noyau est le noyau de A.

Prouvons le :

LEMME 3. <u>Soient</u> $a \in]0,1]$ <u>et</u> $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ <u>de norme</u> $|T|_{1/a} \leqq 1$. <u>Alors</u> T <u>se factorise</u> :

$$T = U A^a$$

<u>où</u> U <u>est un opérateur borné de norme</u> $|U| \leqq 1$ <u>et</u> A <u>un opérateur positif nucléaire de norme</u> $|A|_1 \leqq 1$ (<u>et réciproquement</u>).

<u>Preuve</u> : D'abord la réciproque est évidente car on vérifie sans peine $A^a \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ et $|A^a|_{1/a} = |A|_1$ si A est nucléaire.

Inversement, supposons $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ de norme $|T|_{1/a} \leqq 1$. Alors, il vient : $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ et $|B|_{1/a} \leqq 1$. Il suffit alors de poser $A = B^{1/a}$ pour avoir la factorisation voulue.

Soient $H_1, \dots, H_k$ k espaces de Hilbert. Notons :

$$[0,1]^k = \{a = (a_1, \dots, a_k) \ ; \ 0 \leqq a_j \leqq 1\} .$$

Pour $a \in [0,1]^k$

$$A(a) = \{T = (T_1, \dots, T_k) \in \mathcal{F}(H_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(H_k) \ ; \ |T_j|_{1/a_j} \leqq 1\}$$

avec la convention $|T|_{1/0} = T_j$ (norme des opérateurs) dès que $a_j = 0$.

Nous avons la :

PROPOSITION 4. <u>Soient</u> B <u>un espace de Banach et</u> $\mathscr{G}$ <u>une application analytique de</u> $(H_1)+\dots+(H_k)$ <u>dans</u> B .

<u>Pour tout</u> $a \in [0,1]^k$, <u>notons</u>

$$\mathfrak{M}(a) = \sup_{T\in A(a)} |\mathscr{G}(T)| \qquad (\underline{\text{éventuellement}}\ +\infty) .$$

La fonction $\operatorname{Log}\mathfrak{M}$, définie sur $[0,1]^k$ à valeurs dans $\overline{R_+}$, est convexe sur $[0,1]^k$.

<u>Preuve</u> : Notons

$$A^+(1) = \{T \ ; \ T\in A(1) \ ; \ T_j \text{ positif}\} .$$

Si T et S sont des éléments de $\mathscr{F}(H_1)\oplus\dots\oplus\mathscr{F}(H_k)$, notons :

$$TS = (T_1S_1,\dots,T_kS_k) .$$

Alors tout élément de $A(a)$ se factorise :

$$T = U\,S^a$$

où $U\in A(o)$ et $S\in A^+(1)$ avec la notation $S^a = (S_1^{a_1},\dots,S_k^{a_k})$.

C'est clair en vertu du lemme 3 si tous les $a_j \neq 0$; dans le cas où $a_j = 0$ pour un certain j , T_j se factorise encore de la même manière car il suffit de considérer la factorisation polaire

$$T_j = U_j\,B_j \qquad (B_j = (T_j\,T_j^*)^{\frac{1}{2}})$$

et de poser

$$S_j = \frac{B_j}{|T_j|_1} \qquad \begin{array}{l}(\text{en supposant } T_j \neq 0 ,\\ \text{sinon c'est évident}) ;\end{array}$$

on obtiendra :

$$T_j = T_j\,S_j^o .$$

En effet, $S_j^o = B_j^o$ est, d'après une remarque antérieure, la projection auto-adjointe de H sur la fermeture de l'image de B_j , d'où :

$$T_j = U_j\,B_j\,B_j^o = T_j\,S_j^o$$

De plus, $B_j \in \mathcal{F}(H_j)$ puisque T_j y est, donc $S_j \in \mathcal{F}(H_j)$, est positif et de norme $|S_j|_1 = 1$ par construction. Comme $|T_j| \leq 1$ par hypothèse, on a la factotisation voulue.

Si $b = (b_1, \dots, b_k) \in R^k$ quelconque, alors

$$U\, S^{a+ib} = (U_1 S_1^{a_1+ib_1}, \dots, U_k S_k^{a_k+ib_k}) \in A(a) ,$$

comme il est aisé de voir.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(a) &= \sup_{\substack{S\in A^+(1)\\ U\in A(0)}} |\mathcal{G}(U\, S^a)| \\ &= \sup_{b\in R^k} \sup_{\substack{S\in A^+(1)\\ U\in A(0)}} |\mathcal{G}(U\, S^{a+ib})| \\ &= \sup_{\substack{S\in A^+(1)\\ U\in A(0)}} \sup_{b\in R^k} |\mathcal{G}(U\, S^{a+ib})| .\end{aligned}$$

Si

$$S_j = \sum_{h=1}^{h_j} \lambda_{j,h}\, E_{j,h}$$

est la décomposition spectrale de S_j où les $E_{j,k}$ sont des projections auto-adjointes de rang 1, il vient :

$$U_j\, S_j^{a_j+ib_j} = \sum_{h=1}^{h_j} \lambda_{j,h}^{z_j}\, U_j\, E_{j,h} \qquad z_j = a_j + ib_j , \tag{5}$$

$\mathcal{G}$ étant analytique de $\mathcal{F}(H_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(H_k)$ dans B, il vient de (5) que la fonction de k variables complexes :

$$z = (z_1, \dots, z_k) \longrightarrow \mathcal{G}(U\, S^z)$$

est définie et continue bornée dans la bande $\{z \,;\, 0 \leq \mathrm{Re}\, z_j \leq 1\}$ et analytique dans $\{z \,;\, 0 < \mathrm{Re}\, z_j < 1\}$, à valeur dans B.

En vertu du théorème 2 et du fait de la croissance du logarithme, on en déduit que :

$$\mathrm{Log}\, \mathfrak{M}(a) = \sup_{\substack{S\in A^+(1)\\ U\in A(0)}} \mathrm{Log}\{ \sup_{b\in R^k} |\mathcal{G}(U\, S^{a+ib})|\}$$

est convexe sur $[0,1]^k$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 5. Soient H un espace de Hilbert, B un espace de Banach et $\mathfrak{S}$ une application linéaire de $\mathcal{F}(H)$ dans B. Posons $[1,\infty] = \{p ; p \geq 1\} \cup \{\omega + 1\}$ et notons pour $\forall\, p \in [1,\infty]$, $|\mathfrak{S}|_p$ la norme d'une extension de $\mathfrak{S}$ linéaire et continue de $\mathcal{C}^p(H)$ dans B si elle existe, $|\mathfrak{S}|_p = +\infty$ sinon.

Alors la fonction :

$$a \longmapsto \operatorname{Log}|\mathfrak{S}|_{1/a}$$

définie sur $[0,1]$ à valeur dans $\overline{R_+} = \{x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$ est convexe sur $[0,1]$.

Preuve : Posons, pour $\forall\, a \in [0,1]$

$$\mathfrak{M}(a) = \sup_{\substack{T \in \mathcal{F}(H) \\ |T|_{1/a} \leq 1}} |\mathfrak{S}(T)| \;.$$

Puisque $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^p(H)$ pour tout $p \geq 1$, on a :

$$\mathfrak{M}(a) = |\mathfrak{S}|_{1/a} \qquad \text{pour} \quad a \in [0,1] \;.$$

De même, pour $\forall\, a \in [0,1]$, posons $\mathfrak{N}(a) = 0$ si $a \in]0,1]$ et $\mathfrak{N}(0) = |\mathfrak{S}|_{\omega+1}$. Alors :

$$(6) \qquad |\mathfrak{S}|_{1/a} = \max\{\mathfrak{M}(a), \mathfrak{N}(a)\} \qquad \forall\; a \in [0,1] \;;$$

$\operatorname{Log}\mathfrak{M}(a)$ est convexe sur $[0,1]$ en vertu de la proposition 4, une application linéaire étant analytique de $\mathcal{F}(H)$ dans B, d'où la conclusion vu (6).

PROPOSITION 6. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$. Avec la notation du corollaire 5, pour $p \in [1,\infty]$, posons $|T|_p$ la norme de T dans $\mathcal{C}^p(H)$ si $T \in \mathcal{C}^p(H)$, $|T|_p = +\infty$ sinon.

Alors la fonction :

$$a \longmapsto \operatorname{Log}|T|_{1/a}$$

définie sur $[0,1]$ à valeur dans $\overline{R_+}$ est convexe sur $[0,1]$.

Preuve : Si $T \notin \mathcal{C}^{\omega}(H)$, la conclusion est immédiate.

Supposons donc $T \in \mathcal{C}^{\omega}(H)$. Comme

$$|T|_{1/a} = \{\sum_n \lambda_n(T)^{1/a}\}^a \;,$$

la proposition provient des propriétés de convexité connues sur les espaces ℓ^p.

Voici une autre preuve de ce fait, utilisant la dualité des espaces $\mathcal{C}^p(H)$. Pour $a\in[0,1]$, notons

$$\mathfrak{M}(a) = \sup_{\substack{S\in\mathcal{F}(H)\\ |S|_{1/(1-a)}\leq 1}} |\mathrm{Tr}(TS)|$$

(toujours avec la convention $|S|_{1/0} = |S|$).

La forme trace sur $\mathcal{F}(H)$:

(7) $$S \longmapsto \mathrm{Tr}(TS)$$

est linéaire et analytique, donc en vertu de la proposition 4, la fonction

$$a \longmapsto \mathrm{Log}\,\mathfrak{M}(a)$$

est convexe sur $[0,1]$.

Il reste à prouver que l'on a :

(8) $$|T|_{1/a} = \mathfrak{M}(a) \qquad \forall\ a\in[0,1] \ .$$

Pour cela, il suffit de montrer, pour $a\in[0,1]$, que $\mathfrak{M}(a)$ est finie si et seulement si $T\in\mathcal{C}^{1/a}(H)$ et de plus, dans ce cas, on a (8).

Si $a = 0$, $|T|$ est finie par hypothèse et l'égalité (8) découle de la partie a) du théorème 1 .

Supposons $a > 0$.

Si $T\in\mathcal{C}^{1/a}(H)$, alors la partie b) du théorème 1 montre que (8) est vraie.

Réciproquement, supposons $\mathfrak{M}(a) < +\infty$ et montrons que $T\in\mathcal{C}^{1/a}(H)$ avec (8).

Dans cette hypothèse, la forme trace (7), définie sur $\mathcal{F}(H)$, muni de la norme $|\ |_{1/(1-a)}$, est continue et de norme $\mathfrak{M}(a)$, donc est prolongeable, puisque $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^{1/(1-a)}(H)$, d'une manière unique sur $\mathcal{C}^{1/(1-a)}(H)$ en une forme linéaire et continue μ de norme $\mathfrak{M}(a)$ (avec la convention $\mathcal{C}^{1/0}(H) = \mathcal{C}^{\omega}(H)$). Alors de nouveau le théorème 1 montre qu'il existe un seul $\tilde{T}\in\mathcal{C}^{1/a}(H)$ de norme $|\tilde{T}|_{1/a} = \mathfrak{M}(a)$ et tel que

$$\mu(S) = \mathrm{Tr}(\tilde{T}S) \qquad \forall\ S\in\mathcal{C}^{1/(1-a)}(H) \ ;$$

il vient :

(9) $$\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(\tilde{T}S) \qquad \forall\ S\in\mathcal{F}(H) \ .$$

Si φ et ψ sont deux éléments quelconques de H , posons

$$S : f \longmapsto (f,\varphi)\psi$$

$(\ ,\ )$ étant le produit scalaire dans H .

Il vient de (9) que l'on a :

$$(T_{\psi,\varphi}) = (\tilde{T}_{\psi,\varphi}) \qquad \forall\ \psi,\varphi\in H$$

d'où $\tilde{T} = T$.

COROLLAIRE 7. Soient B un espace de Banach, H un espace de Hilbert, $\mathfrak{S}$ une application linéaire de B dans l'espace vectoriel des applications linéaires de H dans H .

Avec la notatuon du corollaire 5, pour tout $p\in[1,\infty]$, notons :

$$|\mathfrak{S}|_p = \sup_{\substack{b\in B \\ |b|\leq 1}} |\mathfrak{S}(b)|_p \ .$$

Alors la fonction

$$a \longmapsto \mathrm{Log}|\mathfrak{S}|_{1/a}$$

définie sur $[0,1]$ à valeur dans $\overline{R_+}$ est convexe sur $[0,1]$.

Preuve : Soit $b\in B$.

La fonction :

$$a \longmapsto \mathrm{Log}|\mathfrak{S}(b)|_{1/a}$$

définie sur $[0,1]$ à valeur dans $\overline{R_+}$ est convexe sur $[0,1]$. En effet, si $\mathfrak{S}(b) \notin \mathscr{C}^{\omega+1}(H)$ c'est évident ; si $\mathfrak{S}(b) \in \mathscr{C}^{\omega+1}(H)$, c'est la proposition 6.

De la croissance du logarithme, il vient :

$$\mathrm{Log}|\mathfrak{S}|_{1/a} = \sup_{|b|\leq 1} \mathrm{Log}|\mathfrak{S}(b)|_{1/a}$$

d'où le corollaire.

§ 5. Nous avons le théorème de convexité suivant dans les $\mathscr{C}^p$.

THÉORÈME 8. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $\mathfrak{S}$ une application linéaire de $\mathscr{F}(H_1)$ dans $\mathscr{L}(H_2)$, espace des applications linéaires de H_2 dans H_2 . Notons

$$[1,\infty] \times [1,\infty] = [\{p \geq 1\} \cup \{\omega+1\}] \times [\{q \geq 1\} \cup \{\omega+1\}] \ .$$

Pour tout couple $(p,q) \in [1,\infty] \times [1,\infty]$, notons $|\mathfrak{S}|_{p,q}$ la norme d'une extension de T , linéaire et continue de $\mathscr{C}^p(H_1)$ dans $\mathscr{C}^q(H_2)$ si elle existe, $|\mathfrak{S}|_{p,q} = +\infty$ sinon. Alors la fonction :

$$(a,b) \longmapsto \mathrm{Log}|\mathfrak{S}|_{1/a,1/b}$$

définie sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ à valeur dans $\overline{R_+}$ est convexe.

<u>Preuve</u> : Si $|\mathfrak{S}|_{1/a,1/b}$ est $+\infty$ dans le carré $[0,1] \times [0,1]$, c'est clair. On peut donc supposer qu'il existe un couple $(a_o,b_o) \in [0,1] \times [0,1]$ tel que

$$|\mathfrak{S}|_{1/a_o,1/b_o} < +\infty \ .$$

Par conséquent :

$$\mathfrak{S}(T) \in \mathcal{C}^{1/b_o}(H_2) \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{F}(H_1) \quad (\text{avec la convention } \tfrac{1}{0} = \omega+1).$$

Donc

$$|\mathfrak{S}(T)| < +\infty \qquad \text{pour} \qquad T \in \mathcal{F}(H_1) \ .$$

La forme bilinéaire B :

$$(T,S) \longmapsto B(T,S) = \mathrm{Tr}(S.\mathfrak{S}(T))$$

est bien définie sur $\mathcal{F}(H_1) \oplus \mathcal{F}(H_2)$.

Notons, pour $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$:

$$\alpha = (a,1-b) \in [0,1]^2 \qquad U(a,b) = A(\alpha) \quad (\text{notation du § 4 })$$

$$\mathfrak{M}(a,b) = \sup_{(T,S)\in U(a,b)} |B(T,S)| \ .$$

Puisque l'on a :

$$|B(T,S)| \leqq |\mathfrak{S}(T)|_{1/b}|S|_{1/(1-b)} \qquad (\text{avec } |\mathfrak{S}(T)|_{1/b} \text{ éventuellement } +\infty),$$

il vient :

(10) $$\mathfrak{M}(a,b) \leqq |\mathfrak{S}|_{1/a,1/b} \qquad \forall\ (a,b) \in [0,1] \times [0,1] \ .$$

Par ailleurs, supposons maintenant (a,b) tel que $a > 0$, $b < 1$ et $\mathfrak{M}(a,b) < +\infty$. Nous allons prouver, dans ces conditions, que :

$$|\mathfrak{S}|_{1/a,1/b} \leqq \mathfrak{M}(a,b) \ .$$

En effet, pour $T \in \mathcal{F}(H_1)$ fixé, la forme linéaire associée μ_T suivante, définie sur $\mathcal{F}(H_2)$, munie de la norme $|\ |_{1/(1-b)}$

$$\mu_T : S \longmapsto \mathrm{Tr}(S,\mathfrak{S}(T))$$

a une norme qui vérifie

$$|\mu_T| \leqq (a,b)|T|_{1/a} \ .$$

Comme $b < 1$, $\mathcal{F}(H_2)$ est dense dans $\mathcal{C}^{1/(1-b)}(H_2)$, μ_T se prolonge d'une seule manière en une forme linéaire continue $\tilde{\mu}_T$ sur $\mathcal{C}^{1/(1-b)}(H_2)$ de même norme. Donc, en vertu du théorème 1, il existe un seul élément $\tilde{T} \in \mathcal{C}^{1/b}(H_2)$ vérifiant :

$$\tilde{\mu}_T(S) : tr(S\,\tilde{T}) \qquad \forall\, S \in \mathcal{C}^{1/(1-b)}(H_2)$$

$$|\tilde{T}|_{1/b} = |\mu_T| \leqq (a,b)|T|_{1/a} .$$

De là, il vient :

$$\mathfrak{S}(T) = \tilde{T}$$

donc :

$$|\mathfrak{S}(T)|_{1/b} \leqq \mathfrak{M}(a,b)|T|_{1/a} \qquad \forall\, T \in \mathcal{F}(H_1) .$$

Puisque $a \neq 0$, $\mathfrak{S}$ se prolonge d'une seule manière en une application linéaire et continue de $\mathcal{C}^{1/a}(H_1)$ dans $\mathcal{C}^{1/b}(H_2)$ avec une norme vérifiant :

(11) $$|\mathfrak{S}|_{1/a,1/b} \leqq \mathfrak{M}(a,b) \qquad \forall\, 0 < a \leqq 1 \,;\, 0 \leqq b < 1 .$$

L'inégalité (11) reste vraie dans le cas où $\mathfrak{M}(a,b) = +\infty$, c'est évident. Des inégalités (10), (11), il vient :

$$|\mathfrak{S}|_{1/a,1/b} = \mathfrak{M}(a,b) \qquad \forall\, 0 < a \leqq 1 \,;\, 0 \leqq b < 1 .$$

Définissons alors $\mathfrak{N}(a,b)$ sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ comme suit :

$$\mathfrak{N}(0,b) = |\mathfrak{S}|_{\omega+1,b^{-1}} \qquad \forall\, b \in [0,1]$$

$$\mathfrak{N}(a,1) = |\mathfrak{S}|_{1/a,1} \qquad \forall\, a \in [0,1]$$

$$\mathfrak{N}(a,b) = 0 \qquad \text{si} \quad 0 < a \leqq 1 \,;\, 0 \leqq b < 1 .$$

Alors nous avons :

$$|\mathfrak{S}|_{1/a,1/b} = \max\{\mathfrak{M}(a,b), \mathfrak{N}(a,b)\} \qquad \forall\, (a,b) \in [0,1] \times [0,1].$$

La preuve sera achevée si nous prouvons que les deux fonctions $\operatorname{Log}\mathfrak{M}(a,b)$ et $\operatorname{Log}\mathfrak{N}(a,b)$ sont convexes.

B étant bilinéaire est analytique, d'où la convexité de $\operatorname{Log}\mathfrak{M}(a,b)$ en vertu de la proposition 4.

Reste à prouver la convexité de $\operatorname{Log}\mathfrak{N}(a,b)$.

Considérons la fonction sur $[0,1]$, à valeurs dans $\overline{R_+}$

$$a \longmapsto \operatorname{Log}\mathfrak{N}(a,1) .$$

Si elle est égale à $+\infty$, elle est convexe. On peut donc supposer qu'il existe $a_1 \in [0,1]$ telle que $|\mathfrak{S}|_{a_1,1} < +\infty$.

Donc $\mathfrak{S}$ applique, en vertu de cette hypothèse $\mathcal{F}(H_1)$ dans $\mathcal{C}^1(H_2)$, espace de Banach et la convexité de $\operatorname{Log}\mathfrak{M}(a,1)$ provient du corollaire 5.

D'autre part, considérons la fonction sur $[0,1]$, à valeurs dans $\overline{R_+}$

$$b \rightarrow \operatorname{Log}\mathfrak{M}(0,b) .$$

Si elle est égale à $+\infty$, elle est convexe. On peut donc supposer qu'il existe $b_1 \in [0,1]$ telle que $\mathfrak{S}$ possède une extension linéaire et continue de

$$\mathcal{C}^{\omega+1}(H_1) \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}^{1/b_1}(H_2) .$$

Alors la convexité provient du corollaire 7 .

De la définition de $\mathfrak{M}$, on a immédiatement la convexité de $\operatorname{Log}\mathfrak{M}(a,b)$.

<u>Remarques</u> :

1) Si, au lieu de la notation du théorème 8, nous notons

$$[1,\infty] \times [1,\infty] = [\{p \geqq 1\} \cup \{\omega\}] \times [\{q \geqq 1\} \cup \{\omega\}] ,$$

la conclusion du théorème 8 reste valable. En effet, sa preuve n'utilisera que la convexité de la fonction $\operatorname{Log}\mathfrak{M}(a,b)$.

2) En exprimant la remarque précédente d'une autre manière, on obtient l'énoncé suivant, déjà établi par Dunford et Schwartz (cf. [2]), toutefois sans estimation de convexité sur les normes :

Avec la notation de la remarque 1, disons que $\mathfrak{S}$ est de type (p,q) si $|\mathfrak{S}|_{p,q} < +\infty$. Alors, si $\mathfrak{S}$ est de type (p_1,q_1) et de type (p_2,q_2), pour tout $\theta \in [0,1]$, T est de type (p,q) où :

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \qquad\qquad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$$

et on a l'inégalité de convexité :

$$|\mathfrak{S}|_{p,q} \leqq (|\mathfrak{S}|_{p_1,q_1})^{\theta}(|\mathfrak{S}|_{p_2,q_2})^{1-\theta} .$$

3) Les énoncés précédents restent vrais dans le cas des espaces de Hilbert réels.

§ 6. Voici quelques applications.

Le résultat de la remarque 2, dans le cas diagonal, donne la :

PROPOSITION 9. Soient H un espace de Hilbert, $\{P_n\}_{n\geq 1}$ une suite de projecteurs auto-adjoints, mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire $P_n P_m = 0$ pour $n \neq m$.

Alors, pour tout $T\in\mathcal{F}(H)$, la série $\hat{T} = \sum_n P_n\, T\, P_n$ converge dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$.

L'application $\mathfrak{S}$ ainsi définie de $\mathcal{F}(H)$ dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$:

$$T \longmapsto \mathfrak{S}(T) = \hat{T}$$

est de type (p,p) pour tout $p \in [1,\infty] = \{p\geq 1\} \cup \{\omega\}$

$$|\mathfrak{S}|_{p,p} \leq (|\mathfrak{S}|_{1,1})^{1/p}(|\mathfrak{S}|_{\infty,\infty})^{1-1/p} \leq 1 .$$

Preuve : Dans le cas séparable, ce résultat, sous une forme légèrement différente, a été établi par Gohberg et Krein (cf. [4]) avec la seule majoration $|\mathfrak{S}|_{p,p} \leq 1$.

Leur méthode est différente : soit $T\in\mathcal{F}(H)$ et posons

$$Q_n = \sum_{j=1}^{n} P_j \quad ;$$

Q_n converge fortement vers Q, Q étant la projection auto-adjointe de H sur le sous-espace fermé engendré par les images de P_j.

Puisque $T\in\mathcal{F}(H)$, il s'écrit :

$$T(f) = \sum_{k=1}^{t} (f,\varphi_k)\psi_k \qquad \forall\ f\in H .$$

Donc

$$T\, Q_n(b) - T\, Q(b) = \sum_{k=1}^{t} \{Q_n(b) - Q(b),\varphi_k\}\psi_k \ ;$$

d'où

$$|T(Q_n-Q)| \leq \sum_{k=1}^{t} |\psi_k|\ |Q_n\varphi_k - Q\varphi_k| .$$

Par conséquent, $T\, Q_n$ converge vers TQ dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$ lorsque $n \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc N tel que

( ) $$|T(Q_n-Q)| \leq \varepsilon \qquad \forall\ \ n\geq N .$$

De ( ), on a :

$$|P_j\, T\, P_j(f)| \leq \varepsilon |P_j(f)| \qquad \forall\ \ j\geq N,\ \ \forall\ f\in H .$$

D'où

$$\Big|\sum_{j=n}^{m} P_j T P_j(f)\Big|^2 = \sum_{j=n}^{m} |P_j T P_j(f)|^2 \leqq \varepsilon^2 \sum_{j=n}^{m} |P_j(f)|^2 \leqq \varepsilon^2 |f|^2 .$$

Donc la suite

$$\sum_{j=1}^{n} P_j T P_j$$

est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$, par conséquent elle converge dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$; d'où la convergence de $\hat{T}$.

En utilisant un résultat de Gohberg et Krein (cf. [4]), on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\hat{T}) \leqq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(T) \qquad \forall\ n = 1,2,\dots .$$

Il en résulte que σ est de type $(1,1)$ et (∞,∞) avec

$$|\sigma|_{1,1} \leqq 1 \qquad |\sigma|_{\infty}^{\infty} \leqq 1 ,$$

d'où le résultat suivant la remarque 2 .

Une application de la proposition 4 permet de retrouver quelques inégalités bien connues dans les espaces $\mathcal{C}^{p}(H)$. La méthode est seule nouvelle :

PROPOSITION 10. Soient H un espace de Hilbert, T_j $(j = 1,\dots,k)$ k opérateurs de H dans H tels que :

$$T_j \in \mathcal{C}^{p_j}(H) \qquad p_j \in [1,\infty] = \{p \geqq 1\} \cup \{\omega\} ;$$

a) si $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$, alors $T_1 \dots T_k \in \mathcal{C}^1(H)$ et

$$|\mathrm{Tr}(T_1 \dots T_k)| \leqq |T_1|_{p_1} \cdots |T_k|_{p_k} ,$$

b) si $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leqq 1$, alors $T_1 \dots T_k \in \mathcal{C}^{p}(H)$ et

$$|T_1 \dots T_k|_p \leqq |T_1|_{p_1} \cdots |T_k|_{p_k}$$

Preuve : En utilisant les inégalités classiques liant les $\lambda_j(T_1 \dots T_k)$ et les produits des $\lambda_j(T_i)$, il est aisé de voir que si

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leqq 1 ,$$

le produit $T_1 \ldots T_k \in \mathscr{C}^p(H)$ et l'application multilinéaire

$$(T_1, \ldots, T_k) \longmapsto T_1 \ldots T_k$$

est continue de $\mathscr{C}^{p_1}(H) \oplus \ldots \oplus \mathscr{C}^{p_k}(H)$ dans $\mathscr{C}^p(H)$.

Prouvons le a).

En vertu de cette continuité et de la densité de $\mathscr{F}(H)$ dans $\mathscr{C}^{p_j}(H)$ la proposition 4 montre que la fonction définie sur $[0,1]^k$:

$$a \longmapsto \operatorname{Log} \sup |\operatorname{Tr}(T_1, \ldots, T_k)|$$

est convexe sur $[0,1]^k$. Pour obtenir l'inégalité de a), il suffit de la prouver dans le cas particulier $p_j = \delta_j^i$ (δ_j^i symbole de Kronecker), $i = 1, \ldots, k$ ce qui est évident.

Prouvons le b).

Soit p' le conjugué de p . En vertu de a)

$$\sup_{\substack{S \in \mathscr{C}^{p'}(H) \\ |S|_{p'} \leq 1}} |\operatorname{Tr}(ST_1, \ldots, T_k)| \leq |T_1|_{p_1}, \ldots, |T_k|_{p_k} .$$

Or, en vertu du théorème 1 ,

$$|T_1, \ldots, T_k|_p = \sup_{\substack{S \in \mathscr{C}^{p'}(H) \\ |S|_{p'} \leq 1}} |\operatorname{Tr}(ST_1, \ldots, T_k)|$$

d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. DIXMIER, Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. of Math. (2) 51, 1950.

[2] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, Linear operators, Tomes I et II, Interscience Publishers, 1963.

[3] C. GAPAILLARD, D.E.A. de la Faculté des Sciences de Nantes, 1971.

[4] J.C. GOHBERG, M.G. KREIN, Introduction to the theory of linear non self adjoint operators, A.M.S. (traduit du russe), 1969.

[5] F. RIESZ, B. NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.

[6] R. SCHATTEN, Norm ideals of simplicity continuous operators. Ergebniss des Math., Springer Verlag, 1960.

[7] G.O. THORIN, Convexity theorems generalizing those of M. Riez and Hadamard, Medd. Lunds, Univ. Sém., t. 9, 1948.