Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jacques Louis Lions

Perturbations singulières pour une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Séminaire Jean Leray (1972), exp. n° 1, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972____A4_0>

PERTURBATIONS SINGULIÈRES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES

par Jacques Louis LIONS

Introduction.

Soit $\mathcal{O} =]0,1[^2$, $x,y \in \mathcal{O}$. On cherche une fonction $P_\varepsilon(x,y,t)$ définie dans $\mathcal{O}$ et pour $t > 0$, solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta P_\varepsilon + 2P_\varepsilon + \int_0^1 P_\varepsilon(x,\xi,t) \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \xi}(\xi,y,t)d\xi = f \tag{1}$$

où f est donnée dans $\mathcal{O} \times \{t > 0\}$ (1) et où ε est > 0, avec la condition aux limites

$$P_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{O} \times \{t > 0\}, \tag{2}$$

et la condition initiale

$$P_\varepsilon(x,y,0) = 0 . \tag{3}$$

On verra au N°1 - par un procédé détourné, inspiré de la théorie du Contrôle Optimal pour les systèmes distribués - qu'il existe une solution unique du problème, vérifiant (2)

$$P_\varepsilon(x,y,t) + P_\varepsilon(y,x,t) = 0 . \tag{4}$$

Le but essentiel de cet article est l'étude du comportement de P_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. On montrera (N°2 et 3) que, dans une typologie convenable, P_ε converge vers P, solution de l'équation analogue à (1) avec $\varepsilon = 0$, les conditions aux limites donnant lieu à un phénomène particulier : P satisfait à des conditions aux limites NON HOMOGÈNES.

On étudie en fait dans les N° ci-après un cas plus général où le nombre de variables d'espaces est 4 (au lieu de 2) et on peut d'ailleurs considérer des situations analogues à un nombre de variables PAIR quelconque.

L'équation (1) a été étudiée en raison d'une certaine analogie avec les équations de Navier Stokes, lorsque le nombre de Reynolds augmente indéfiniment.

---

(1) De façon particulière; cf. N°1

(2) Pour f donné comme au N°1 ci-après.

Le plan est le suivant :

1. Equation aux dérivées partielles du type "Riccati-differential".
2. Un problème linéaire de perturbation singulière.
3. Perturbations singulières non linéaires.
4. Variantes

1. Equation aux dérivées partielles du type "Riccati-differential"

1.1. Un problème linéaire.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (1) et $\varepsilon > 0$. On cherche u_1, u_2 dans $\Omega \times]0,T[$ telles que

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_1 + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1 , \tag{1.1}$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_2 , \tag{1.2}$$

où

$$f_i \in L^2(\Omega \times]0,T[), \tag{1.3}$$

avec les conditions aux limites

$$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0,T[, \quad \Gamma = \partial\Omega, \tag{1.4}$$

$$u_1(x,0) = 0, \quad u_2(x,T) = 0 . \tag{1.5}$$

Remarque 1.1

Le problème (1.1) ... (1.5) est inspiré (mais techniquement différent) des situations rencontrées dans le contrôle optimal des systèmes distribués [3].

On vérifie sans peine que le problème (1.1) ... (1.5) admet une solution unique, avec (2)

$$u_i \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) ; \tag{1.6}$$

pour cela on note les estimations a priori suivantes. On posera (3)

---

(1) Pour fixer les idées.

(2) $H_0^1(\Omega)$ = espace de Sobolev [7] d'ordre 1 des fonctions nulles sur Γ .

(3) Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

$$|\varphi|^2 = \int_\Omega \varphi(x)^2 dx, \ (\varphi,\psi) = \int_\Omega \varphi\psi dx,$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right] dx \ ,$$

et de façon générale $u_i(s)$ désignera la fonction $x \to u_i(x,s)$. Multipliant (1.1) (resp. (1.2) par u_1 (resp. u_2) on en déduit

$$(1.7) \qquad \frac{1}{2}\left[|u_1(T)|^2 + |u_2(0)|^2\right] + \varepsilon \int_0^T \left[\|u_1(t)\|^2 + \|u_2(t)\|^2\right] dt \ +$$

$$+ \int_0^T \left[|u_1|^2 + |u_2|^2\right] dt + \int_0^T\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) u_2\right] dx \, dt =$$

$$= \int_0^T [(f_1,u_1) + (f_2,u_2)] \, dt \ .$$

Mais $\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) u_2\right] dx \, dt = \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(u_1,u_2) dx \, dt = 0$

de sorte que (1.7) donne

$$(1.8) \qquad \int_0^T \left[|u_1|^2 + |u_2|^2\right] dt \leq \int_0^T \left[|f_1|^2 + |D_2|^2\right] dt \ ,$$

$$(1.9) \qquad \varepsilon \int_0^T \left[\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2\right] dt \leq \int_0^T \left[|f_1|^2 + |f_2|^2\right] dt \ .$$

On considère maintenant la variante suivante du problème précédent. On cherche u_1 , u_2 solutions de

$$(1.10) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_1 + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \ ,$$

$$(1.11) \qquad - \frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \ ,$$

$$(1.12) \qquad u_1(x,o) = 0 \ , \ u_2(x,T) = k(x) \quad (k \text{ donnée})$$

La condition (1.4) étant inchangée.

Sous l'hypothèse

$$(1.13) \qquad k \in H_0^1(\Omega)$$

le problème (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) admet une solution unique avec (1.6). En effet on introduit une fonction Φ telle que [1]

$$(1.14) \qquad \begin{cases} \Phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \Phi(T) = k \end{cases}$$

et on se ramène au problème précédent en les inconnues u_1 et $u_2 - \Phi$.

On va maintenant "découpler" le problème (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) par le même procédé que dans [3], Chap. 3.

1.2. Découplage du problème linéaire

On considère dans l'ouvert $\Omega \times]o,s[$, $0 < s < T$, le problème :

$$(1.15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta\varphi_1 + \varphi_1 + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = 0 , \\ -\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta\varphi_2 + \varphi_2 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = 0 , \\ \varphi_1(o) = 0 , \ \varphi_2(s) = h , \\ \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad]o,s[. \end{cases}$$

Pour $h \in H_0^1(\Omega)$ ce problème (évidemment analogue à (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) admet une solution unique telle que

$$(1.16) \qquad \begin{cases} \varphi_i \in L^2(o,s;H_0^1(\Omega)), \\ \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} \in L^2(o,s;H^{-1}(\Omega) \quad (^2). \end{cases}$$

Alors $\varphi_1(s)$ est défini de façon unique et dépend continûment de **h dans** $L^2(\Omega)$.

---

(1) Une telle fonction existe et peut être choisie de façon que l'application $k \to \Phi$ soit linéaire et continue dans les topologies convenables. Cf. par ex. [5].

(2) $H^{-1}(\Omega)$ = dual de $H_0^1(\Omega)$

Donc

$$\varphi_1(s) = P(s)\,\varphi_2(s) = P(s)h,\ P(s) \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega);L^2(\Omega)). \tag{1.17}$$

Si maintenant l'on prend dans (1.15)

$h = u_2(s)$ où $\{u_1,u_2\}$ est la solution de (1.10)(1.11)(1.12)(1.4),

on a évidemment :

$$\varphi_1 \text{ (resp. } \varphi_2) = \text{restriction de } u_1 \text{ (resp. } u_2) \text{ à } \Omega \times]o,s[$$

et par conséquent $\varphi_1(s) = u_1(s)$ de sorte que (1.17) donne <u>l'identité fondamentale</u>:

$$u_1(s) = P(s)\,u_2(s) \tag{1.18}$$

<u>valable</u> $\forall s \in [o,T]$.

On va maintenant, par un calcul d'identification, obtenir une équation satisfaite par P.

<u>Remarque 1.2</u>

En fait u_1, u_2, P dépendent de ε ; on les notera $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}$, P_ε plus loin lorsque l'on fera $\varepsilon \to o$.

1.3. <u>Equation du type "Riccati-différentiel"</u>.

On effectue le calcul de manière formelle, les vérifications se faisant par les mêmes procédés que dans [3], Chap. 3. On utilise (1.18) dans (1.10) ; après avoir vérifié la différentiabilité de P en t, on obtient :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)u_2 + P\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - \varepsilon \Delta P u_2 + P u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0\,. \tag{1.19}$$

Utilisant (1.11) dans (1.19) il vient :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)u_2 + P\left[-\varepsilon\,\Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right] - \varepsilon\,\Delta P u_2 + P u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \tag{1.20}$$

et utilisant encore une fois (1.18) dans (1.20), il vient :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon(P\Delta + \Delta P) + 2P + P\circ\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right]u_2 = 0\,. \tag{1.21}$$

et (1.21) est une identité devant avoir lieu $\forall u_2$ (car dans (1.15) on peut prendre h quelconque) d'où l'équation <u>en termes d'opérateurs</u> :

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon\,(P\Delta + \Delta P) + 2P + P\circ\frac{\partial P}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} I\,. \tag{1.22}$$

Soit maintenant

(1.23) $P(x,y,t)$ = noyau de l'opérateur $P(t)$ (cf.[6] pour la théorie des noyaux).

Alors (1.22) entraîne

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon\,(\Delta_x + \Delta_y)P + 2P + \int_\Omega P(x,\xi,t)\,\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t)\,d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x-y)\ . \tag{1.24}$$

Remarque 1.3.

Ce qui précède vaut, en particulier, si l'on prend $\Omega =]0,1[$; on trouve alors l'équation (1) de l'introduction, avec $f = -\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)$.

Remarque 1.4.

On peut, plus généralement, considérer le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon\,\Delta u_1 + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + Mu_2 = 0\ , \\ &-\frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon\,\Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - Mu_1 = 0\ , \end{aligned}\right. \tag{1.25}$$

les autres conditions étant inchangées, où

$$M\,\varphi(x) = \int_\Omega M(x,y)\varphi(y)\,dy\ , \tag{1.26}$$

$M(x,y) = M(y,x)$ = fonction régulière dans $\bar\Omega \times \bar\Omega$. On arrive alors à l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon(\Delta_x + \Delta_y)P + 2P + \int_\Omega P(x,\xi,t)\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t)\,d\xi\ - \\ &- \int\int_{\Omega\times\Omega} P(x,\zeta,t)\,M(\zeta,\xi)\,\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t)\,d\xi\,d\zeta = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x-y) - M(x,y) \end{aligned}\right. \tag{1.27}$$

Remarque 1.5

Les équations "de Riccati" rencontrées dans la théorie du contrôle optimal sont de la forme (1) (cf. [3])

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon(\Delta_x + \Delta_y)P + 2P + \int_\Omega P(x,\xi,t)P(\xi,y,t)\,d\xi = \delta(x-y)\ . \tag{1.28}$$

---

(1) ε n'étant pas nécessairement "petit" !

Remarque 1.6

On peut, plus généralement, remplacer $-\Delta$ par un opérateur elliptique symétrique [1] à coefficients variables soit A d'ordre quelconque ; on arrive ainsi à

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon(A_x + A_y)P + 2P + \int_\Omega P(x,\xi,t)\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t)d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x-y) \ . \tag{1.29}$$

1.4. Conditions aux limites et propriétés de P.

Puisque $u_1 = 0$ sur $\Gamma \times]o,T[$, on doit avoir

$$\int_\Omega P(x,y,t)u_2(y)dy = 0 \quad \text{p.p. si} \quad x\in\Gamma \ ,$$

et donc

$$P(x,y,t) = 0 \quad \text{si} \quad x\in\Gamma \ , \ y\in\Omega \ , \ t > 0 \ \text{[2]} \ . \tag{1.30}$$

En outre (1.22) et (1.24) impliquent que

$$P\Delta\varphi = \Delta P\varphi \quad \forall \ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

d'où [3]

$$P(x,y,t) = 0 \quad \text{si} \quad x\in\Omega \ , \ y\in\Gamma \ , \ t > 0 \ . \tag{1.31}$$

Notons d'ailleurs que

$$P(x,y,t) + P(y,x,t) = 0 \ . \tag{1.32}$$

En effet cela revient à montrer que, $\forall \ h \ , \ \tilde{h}\in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$(Ph,\tilde{h}) + (P\tilde{h},h) = 0 \ . \tag{1.32 bis}$$

Or soit $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ la solution du système analogue à (1.15) avec $\tilde{h}$ au lieu de h. Prenant le produit scalaire de la 1ère équation (1.15) avec $\tilde{\varphi}_2$ et intégrant par parties, il vient :

---

(1) La symétrie n'étant utile que plus loin.

(2) Dans le cas de (1.29) si A est d'ordre $2m$, le problème de départ étant celui de Dirichlet, on a :

$$\frac{\partial^j}{\partial n_x^j}P(x,y,t) = 0 \qquad x\in\Gamma \ , \ y\in\Omega \ , \quad t > 0 \ , \quad 0\leqq j\leqq m-1 \ .$$

(3) Et, dans le cas de la note (2) précédente, $\frac{\partial^j}{\partial n_y^j} P(x,y,t) = 0$, $x\in\Omega$, $y\in\Gamma$, $t > 0$, $0\leqq j\leqq m-1$.

$$0 = (\varphi_1(s), \tilde{\varphi}_2(s)) + \int_{\Omega\times]o,s[} \varphi_1 \left(-\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial t} - \varepsilon\Delta\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2\right) dx\, dt +$$

$$+ \int_{\Omega\times]o,s[} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \tilde{\varphi}_2 \, dx\, dt$$

et comme $$-\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial t} - \varepsilon\Delta\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial x_1} \quad ,$$

On en déduit

$$(1.33) \qquad (\varphi_1(s),\tilde{\varphi}_2(s)) = (P(s)h,\tilde{h}) = \int_{\Omega\times]o,s[} \left(\varphi_1 \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \tilde{\varphi}_2\right) dx\, dt \;.$$

La propriété (1.32 bis) en résulte.

Condition initiale :

la condition $u_1(o) = 0$ donne

$$(1.34) \qquad P(x,y,o) = 0 \;.$$

EN RESUME, on a montré l'existence d'une fonction $P(x,y,t)$ vérifiant (1.24), (1.30) (1.31) et (1.34), l'opérateur $P(t) : \varphi \to \int_\Omega P(x,y,t)\, \varphi(y)dy$ étant linéaire continu de $H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$, et dépendant différentiablement de t dans l'espace $\mathcal{L}(H^1_0(\Omega);L^2(\Omega))$ muni de la topologie de la convergence simple forte. En outre $P(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega);L^2(\Omega))$ et dépend continûment de t dans cet espace muni de la topologie simple forte.

En effet si dans (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) on prend $k \in L^2(\Omega)$, on se ramène au problème (1.1)...(1.5) avec $f_i \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, ce qui suffit (tant que l'on ne fait pas $\varepsilon \to o$).

UNICITÉ : partant d'une solution P , on résout

$$(1.35) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_2 + u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(Pu_2) = 0 \;, \\[2ex] u_2(T) = k \;,\; u_2 = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma\times]0,T[\end{cases}$$

qui admet une solution unique car

$$|(\frac{\partial}{\partial x_1}(Pu_2),u_2)| = |(Pu_2, \frac{\partial u_2}{\partial x_1})| \leq c\,|u_2|\|u_2\| .$$

On <u>définit</u> ensuite

$$\hat{u}_1 = Pu_2 . \tag{1.36}$$

On a :

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} - \varepsilon\Delta\hat{u}_1 + \hat{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} =$$

$$= (\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon\Delta P + P)u_2 + P(-\varepsilon\Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}Pu_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$= 0$$

et comme $\hat{u}_1(o) = 0$ et $\hat{u}_1 = 0$ sur $\Gamma\times]0,T[$, on a : $\hat{u}_1 = u_1$, $\{u_1,u_2\}$ solution de (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) . Donc si P et P^* sont deux solutions éventuelles du problème, on a la <u>même</u> solution u_2 pour (1.35) et

$$(1.37)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_2 + u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(P^*u_2) = 0 , \\ u_2(T) = k,\ u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\times]0,T[. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Pu_2 - P^*u_2) = 0$$

i.e.

$$Pu_2 - P^*u_2 = m(x_2) .$$

Mais Pu_2, P^*u_2 sont seuls sur Γ , donc $m(x_2)$ doit être nulle sur Γ ce qui n'est possible que si $m = 0$. Donc

$$Pu_2 = P^*u_2 \quad \text{p.p.}$$

donc

$$Pk = P^*k \qquad \forall k$$

donc

$$P = P^* .$$

<u>On a donc obtenu l'existence et l'unicité de</u> P .

PROBLÈME OUVERT :

Peut-on faire une étude directe de l'équation (1.24) (et considérer des deuxièmes membres moins particuliers) ? Pour une telle étude dans le cas des équations de Riccati du contrôle optimale (Remarque 1.5), cf. [1] [2] [8].

2. Un problème linéaire de perturbation singulière.

Notre objet est maintenant d'étudier le comportement de $P = P_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to o$. On étudie pour cela d'abord le système (1.1)...(1.5).

2.1. Résultat relatif au système (1.1)...(1.5).

On suppose Ω comme sur Fig.1 (pour simplifier l'exposé) et on désigne maintenant par $u_{1\varepsilon}$, $u_{2\varepsilon}$ la solution de (1.1)...(1.5).

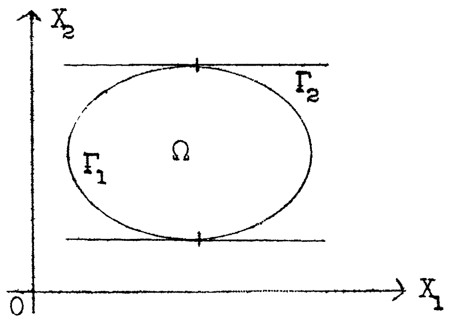

Fig.1

Soit par ailleurs u_1, u_2 la solution (1) de

(2.1) $$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1,$$

(2.2) $$-\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_2,$$

(2.3) $$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0,T[\\ u_1 - u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \times]0,T[\end{cases}$$

(2.4) $$u_1(x,o) = 0, \ u_2(x,T) = 0 .$$

On va montrer que, lorsque $\varepsilon \to o$,

(2.5) $$\begin{cases} u_{i\varepsilon} \to u_i \\ \dfrac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} \to \dfrac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(\Omega \times]0,T[\,) \text{ faible,} \end{cases}$$

(1) Les démonstrations qui suivent montreront l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1).

$$(2.6)\quad \begin{cases} \theta_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}) \text{ et } \theta_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) \to \theta_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_1 + u_2) \text{ et} \\ \theta_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_1 - u_2) \text{ dans } L^2(\Omega \times]0,T[\,) \text{ faible} \end{cases}$$

où θ_1 (resp. θ_2) est nulle au voisinage de Γ_2 (resp. Γ_1).

2.2. Estimations a priori (I)

Nous avons, d'après (1.8) (1.9) :

$$(2.7)\quad \begin{cases} u_{i\varepsilon} \text{ (resp. } \sqrt{\varepsilon}\, u_{i\varepsilon}) \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega \times]0,T[\,) \\ \text{(resp. de } L^2(0,T;H_0^1(\Omega))) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 . \end{cases}$$

Prenons ensuite le produit scalaire de (1.1) (resp. 1.2)) avec $\dfrac{\partial u_1}{\partial t}$ (resp. $-\dfrac{\partial u_2}{\partial t}$) [1], il vient après intégration sur $\Omega \times]0,T[$:

$$(2.8)\quad \int_0^T \left[\left|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|^2 \right] dt + \frac{\varepsilon}{2}\left[\|u_1(T)\|^2 + \|u_2(0)\|^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}|u_1(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_2(0)|^2 + X = \int_0^T \left[\left(f_1, \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \left(f_2, \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) \right] dt$$

où

$$X = \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) dx\, dt .$$

Mais, par intégration par parties (on vérifie que c'est loisible) $X = 0$ de sorte que (2.8) donne

$$(2.9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega \times]0,T[\,) \\ \text{lorsque } \varepsilon \to 0 . \end{cases}$$

---

1) On écrit u_i au lieu de $u_{i\varepsilon}$.

2.3. Estimations a priori (II)

On pose

$$(2.10)\qquad g_{1\varepsilon} = f_1 - \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t}, \quad g_{2\varepsilon} = f_2 + \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t}.$$

D'après (2.9) on a

$$(2.11)\qquad g_{1\varepsilon} \in \text{ borné de } L^2(\Omega\times]0,T[\,).$$

On écrit (1.1) (1.2) sous la forme

$$-\varepsilon\Delta u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} + \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial x_1} = g_{1\varepsilon},$$

$$-\varepsilon\Delta u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} + \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial x_1} = g_{2\varepsilon}$$

d'où l'on déduit que

$$(2.12)\qquad \begin{cases} -\varepsilon\Delta(u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon})+(u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon}) + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon}) = g_{1\varepsilon}+g_{2\varepsilon}, \\[2ex] -\varepsilon\Delta(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})+(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon}) - \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon}) = g_{1\varepsilon}-g_{2\varepsilon}. \end{cases}$$

d'où l'on déduit (t jouant alors le rôle de paramètre) que

$$(2.13)\qquad \begin{cases} \theta_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon}) \text{ et } \theta_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon}) \text{ demeurent dans un} \\[2ex] \text{borné de } L^2(\Omega\times]0,T[\,) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0. \end{cases}$$

On en déduit aussitôt le résultat (2.5)(2.6).

3. Perturbations singulières non-linéaires.

3.1. Découplage du problème limite.

Le raisonnement fait au n°1 s'adapte aussitôt à la situation du système (2.1). (2.4) avec une différence sensible dans les conditions aux limites. Plus précisément, on considère le problème

$$(3.1)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

(3.2)
$$-\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 ,$$

(3.3)
$$u_1 + u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0,T[\ , \ u_1 - u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times]0,T[\ ,$$

(3.4)
$$u_1(x,o) = 0 \ , \quad u_2(x,T) = k(x) \ .$$

On a alors

(3.5)
$$u_1 = Pu_2$$

et P satisfait à :

(3.6)
$$\frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \int_\Omega P(x,\xi,t)\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t)d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x-y) \ .$$

Comme $u_1(o) = 0$ la condition initiale est

(3.7)
$$P(x,y,o) = 0 \ .$$

<u>Conditions aux limites</u>.

On doit avoir

$$u_1(x,t) + u_2(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_1 \quad \text{donc}$$

$$\int_\Omega P(x,y,t)u_2(y,t)dy + u_2(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_1 \ , \quad \text{donc}$$

(3.8)
$$P(x,y,t) = -\delta(x-y) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_1 \, , \ y \in \Omega$$

et de même la condition $u_1 - u_2 = 0$ si $x \in \Gamma_2$ donne

(3.9)
$$P(x,y,t) = \delta(x-y) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_2 \, , \ y \in \Omega \ .$$

Par ailleurs

(3.10)
$$P(x,y,t) + P(y,x,t) = 0 \ .$$

En résumé, <u>il existe</u> P <u>solution de</u> (3.6)(3.7)(3.8)(3.9)(3.10)P <u>étant contin</u> de $[0,T] \to \mathcal{L}(L^2(\Omega);L^2(\Omega))$ <u>muni de la topologie de la convergence simple forte</u>.

L'unicité, très probable, n'est pas démontrée de façon satisfaisante.

3.2. Convergence lorsque $\varepsilon \to o$.

On a maintenant le résultat : lorsque $\varepsilon \to o$, $P_\varepsilon(x,y,t)$, solution de (1.24) (1.30)(1.31)(1.34) converge vers $P(x,y,t)$, solution de (3.6)...(3.10) la convergence ayant lieu au sens suivant :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \int_\Omega P_\varepsilon(x,y,t)\, h(y)dy \to \int_\Omega P(x,y,t)\, h(y)dy \,, \\ \forall h \in H_0^1(\Omega) \,, \quad \forall t \in [0,T[\,. \\ \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

En effet, d'après ce qu'on a vu, on se réduit à la situation du N°2 et (3.11) résulte de (2.5).

Remarque 3.1.

Bien que P_ε satisfasse à la condition HOMOGENE (1.30), on obtient à la limite pour P des conditions NON HOMOGENES (3.8)(3.9) .

Remarque 3.2.

Dans le cas de la dimension 1 ($\Omega =]0,1[$) , (cas des équations (1)...(4) de l'Introduction) on obtient à la limite

$$\frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \int_0^1 P(x,\xi,t)\,\frac{\partial P}{\partial \xi}\,(\xi,y,t)d\xi = -\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x-y) \,,$$

$$P(o,y,t) = -\,\delta(y) \,,$$

$$P(1,y,t) = \delta(y)$$

$$P(x,y,t) + P(y,x,t) = 0 \,.$$

4. Variantes.

On peut appliquer les mêmes méthodes en partant d'autres problèmes linéaires de perturbation singulière.

Par exemple, si l'on considère $\Omega \subset R^n$ et le problème

$$(4.1) \qquad \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial x_i} = f_1 \,,$$

$$(4.2) \qquad -\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon\Delta u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial x_i} = f_2 \,,$$

avec $u_{1\varepsilon} = u_{2\varepsilon} = 0$ sur $\Gamma \times]0,T[$, $u_{1\varepsilon}(0) = 0$, $u_{2\varepsilon}(T) = 0$,

où les b_i sont des constantes réelles, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon(\Delta_x + \Delta_y)P_\varepsilon + 2P_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} b_i \int_\Omega P_\varepsilon(x,\xi,t) \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \xi_i}(\xi,y,t)d\xi = \tag{4.3}$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x - y)$$

avec

$$P_\varepsilon(x,y,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma,\ y \in \Omega,\ t \in]0,T[\ , \tag{4.4}$$

$$P_\varepsilon(x,y,t) + P_\varepsilon(y,x,t) = 0 \ , \tag{4.5}$$

et la condition initiale

$$P_\varepsilon(x,y,o) = 0 \ . \tag{4.6}$$

Le problème limite lorsque $\varepsilon \to o$ est

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} = f_1 \ , \tag{4.7}$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = f_2 \tag{4.8}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \cos n_i < 0 \quad (^1) \\ u_1 - u_2 = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \cos n_i > 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

et $u_1(o) = 0$, $u_2(T) = 0$.

---

1) Les $\cos n_i$ désignent les cosinus directeurs de la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Le découplage de ce dernier problème conduit à

$$(4.10)\qquad \frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \sum_{i=1}^{n} b_i \int_\Omega P(x,\xi,t)\, \frac{\partial P}{\partial \xi_i}(\xi,y,t)\,d\xi = - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta(x-y)$$

avec

$$(4.11)\qquad \begin{cases} P(x,y,t) = -\,\delta(x-y) & \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \sum_{i=1}^{n} b_i \cos n_i(x) < 0,\ y \in \Omega \\[2ex] P(x,y,t) = \delta(x-y) & \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \sum_{i=1}^{n} b_i \cos n_i(x) > 0,\ y \in \Omega \end{cases}$$

et

$$(4.12)\qquad P(x,y,o) = 0\ .$$

On peut également considérer des problèmes linéaires d'ordre supérieur, par exemple

$$(4.13)\qquad \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t} + \varepsilon\Delta^2 u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u_{2\varepsilon} = f_1$$

$$(4.14)\qquad -\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t} + \varepsilon\Delta^2 u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u_{1\varepsilon} = f_2$$

avec les conditions aux limites

$$(4.15)\qquad u_{1\varepsilon}\ ,\ u_{2\varepsilon}\ ,\ \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial n}\ ,\ \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma\times\,]\,0,T\,[\ ,$$

$$(4.16)\qquad u_{1\varepsilon}(0) = 0\ ,\ u_{2\varepsilon}(T) = 0\ .$$

Le découplage conduit à

$$(4.17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon(\Delta_x^2 P_\varepsilon + \Delta_y^2 P_\varepsilon) + 2P_\varepsilon - \displaystyle\int_\Omega P_\varepsilon(x,\xi,t)\,\frac{\partial}{\partial \xi_1}\,\Delta_\xi\, P(\xi,y,t)\,d\xi = \\[2ex] = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\,\Delta_x\,\delta(x-y) \end{cases}$$

avec

(4.18) $$P_\varepsilon(x,y,t) = \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma \ , \ y \in \Omega \ , \ t \in \,]0,T[\ ,$$

(4.19) $$P_\varepsilon(x,y,t) + P_\varepsilon(y,x,t) = 0$$

et

(4.20) $$P_\varepsilon(x,y,o) = 0 \ .$$

Le problème limite pour $\{u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}\}$ est

(4.21) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 - \dfrac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_2 = f_1 \ , \\ -\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_1 = f_2 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

(4.22) $$\begin{cases} u_1, u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times]0,T[\ , \\ \dfrac{\partial(u_1+u_2)}{\partial n} = 0 \quad \text{si} \quad \cos n_1 < 0 \ , \quad \dfrac{\partial(u_1-u_2)}{\partial n} = 0 \quad \text{si} \quad \cos n_1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad u_1(0) = 0 \ , \ u_2(T) = 0 \ .$$

Le découplage conduit à

(4.23) $$\frac{\partial P}{\partial t} + 2P - \int_\Omega P(x,\xi,t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Delta_\xi P(\xi,y,t) d\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_x \delta(x-y)$$

avec les conditions aux limites

(4.24) $$\begin{cases} P(x,y,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma, \ y \in \Omega \ , \ t > 0 \ , \\ \dfrac{\partial P}{\partial n_x}(x,y,t) = -\dfrac{\partial}{\partial n} \delta(x-y) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma, \ \cos n_1 < 0 \ , \ y \in \Omega \ (^1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial n_x}(x,y,t) = \dfrac{\partial}{\partial n} \delta(x-y) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma, \ \cos n_1 > 0 \ , \ y \in \Omega \end{cases}$$

---

1) $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial n} \delta(x-y) \ \varphi(y) dy = \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x)$ par définition

et la condition initiale

$$P(x,y,o) = 0 \ . \tag{4.25}$$

Voici un exemple conduisant à un système de 2 équations (par le même genre de méthode, on construira des exemples de systèmes à un nombre quelconque d'équations).

On considère, avec $\Omega \subset R^2$ le problème

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} + \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial x_1} = f_1 \ , \\ &-\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_1}(u_{1\varepsilon} + u_{3\varepsilon}) = f_2 \ , \\ &\frac{\partial u_{3\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_{3\varepsilon} + u_{3\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_1} u_{2\varepsilon} = f_3 \ , \end{aligned}\right. \tag{4.26}$$

avec

$$u_{i\varepsilon} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma \times \,]0,T[\ , \quad u_{1\varepsilon}(o) = u_{3\varepsilon}(o) = 0 \ , \quad u_{2\varepsilon}(T) = 0 \ .$$

On a, cette fois, les <u>identités</u> (pour le problème associé où $f_i = 0$, $u_{1\varepsilon}(o) = u_{3\varepsilon}(o) = 0$, $u_{2\varepsilon}(T) = k$) :

$$u_{1\varepsilon} = P_\varepsilon u_{2\varepsilon} \ , \ u_{3\varepsilon} = Q_\varepsilon u_{2\varepsilon}$$

ce qui conduit au système en P_ε et Q_ε :

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon(\Delta_x + \Delta_y)P_\varepsilon + 2P_\varepsilon + \int_\Omega P_\varepsilon(x,\xi,t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [P_\varepsilon(\xi,y,t) + \\ &\qquad\qquad + Q_\varepsilon(\xi,y,t)]d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) \ , \\ &\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon(\Delta_x + \Delta_y)Q_\varepsilon + 2Q_\varepsilon + \int_\Omega Q_\varepsilon(x,\xi,t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [P_\varepsilon(\xi,y,t) + \\ &\qquad\qquad + Q_\varepsilon(\xi,y,t)]d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) \ , \end{aligned}\right. \tag{4.27}$$

avec

$$(4.28)\qquad \begin{cases} P_\varepsilon = Q_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial(\Omega \times \Omega) \times]0,T[\ , \\ P_\varepsilon(x,y,o) = Q_\varepsilon(x,y,o) = 0 \ . \end{cases}$$

On vérifie que lorsque $\varepsilon \to o$, $u_{i\varepsilon} \to u_i$, $\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} \to \frac{\partial u_i}{\partial t}$ dans $L^2(\Omega \times]0,T[\ )$, $i = 1, 2, 3,$ où u_i est la solution de

$$(4.29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1 \ , \\ -\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_1 + u_3) = f_2 \ , \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 + \dfrac{\partial}{\partial x_1} u_2 = f_3 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(4.30)\qquad \begin{cases} u_1 + u_2\sqrt{2} + u_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \qquad (\text{notations du N}^o 3) \\ u_1 - u_2\sqrt{2} + u_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

et

$$u_1(o) = u_3(o) = 0 \ , \ u_2(T) = 0 \ .$$

les identités $u_1 = Pu_2$, $u_3 = Qu_2$ (pour le problème correspondant avec $f_i = 0$ et $u_2(T) = k$) conduisent à

$$(4.31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + 2P + \displaystyle\int_\Omega (x,\xi,t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [P(\xi,y,t)+Q(\xi,y,t)]d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} + 2Q + \displaystyle\int_\Omega Q(x,\xi,t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [P(\xi,y,t)+Q(\xi,y,t)]d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(4.32)\qquad \begin{cases} P(x,y,t) + Q(x,y,t) = -\sqrt{2}\ \delta(x-y) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_1 \ , \ y \in \Omega \ , \\ P(x,y,t) + Q(x,y,t) = \sqrt{2}\ \delta(x-y) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_2 \ , \ y \in \Omega \end{cases}$$

et

$$(4.33)\qquad P(x,y,t) = Q(x,y,o) = 0 \ .$$

Remarque 4.1

Des développements asymptotiques (cf. [9] [4]) relatifs, par exemple au problème (4.1) (4.2) doivent conduire, après découplage, à des développements asymptotiques pour P_ε, mais nous n'avons pas surmonté jusqu'ici toutes les difficultés techniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BRÉZIS, Semi groupes non linéaires et applications. A paraître.

[2] G. DA PRATO, Equations d'évolution dans des algèbres d'opérateurs et application à des équations quasi linéaires. J. Math. Pures et Appl. 48 (1969), 59-107.

[3] J.L. LIONS, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Paris, Dunod, Gauthier Villars, 1968.

[4] J.L. LIONS, Singular perturbations and singular layers in variational inequalities. Symp. non linear Functional Analysis, Madison, Avril 1971.- et Note C.R. Acad. Sc. Paris, 272 (1971), 995-998.

[5] J.L. LIONS et E. MAGENS, Problèmes aux limites non homogènes, Vol. 1, 2, Paris, Dunod, 1968.

[6] L. SCHWARTZ, Théorie des noyaux, Proc. Int. Congress of Mathematicians, 1950, 1, 220-230.

[7] S.L. SOBOLEV, Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la Physique Mathématique, Leningrad, 1950.

[8] R. TEMAN, Sur l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornés, en dimension infinie, J. Func. Analysis, 7 (1971), 85-115.

[9] M.I. VISIK et L.A. LYUSTERNIK, Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, Uspekhi Mat. Nank. 12(1957), 3-122 ; Amer. Math. Soc. Trans. Series, 2, 20, (1962), 239-364.