Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Vaillant

Solutions asymptotiques d'un système à caractéristiques de multiplicité variable

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1972-1973), p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972-1973___2_1_0>

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTÈME A CARACTÉRISTIQUES DE MULTIPLICITÉ VARIABLE*

par Jean VAILLANT

Nous nous proposons ici d'étudier les systèmes d'opérateurs différentiels linéaires dont la partie principale est à coefficients constants et fortement hyperbolique dans le cas où le cône normal caractéristique admet un point double différent de l'origine au voisinage duquel la multiplicité varie; les cas de systèmes à caractéristiques de multiplicité localement constante ont déjà fait l'objet d'études pour une bibliographie desquelles nous renvoyons à [13], [14]. En particulier dans [14] on utilise la localisation au sens usuel de l'algèbre commutative des polynomes.

Pour une équation à coefficients constants, Atiyah, Bott, Gårding [1], ont montré le lien entre les solutions élémentaires des "localisations", au sens de Hörmander du polynome différentiel, en particulier aux points singuliers et les singularités de la solution élémentaire de l'opérateur initial.

D'autre part nous disposons d'articles de Ludwig [7], [8] où le problème de Cauchy pour un système d'ordre 1 à caractéristiques de multiplicité variable dans un espace de dimension 4 est traité à l'aide de développements usuels oscillatoires généralisés sous des hypothèses convenables mais surabondantes (forte hyperbolicité et existence de vecteurs variant analytiquement et formant des bases de noyaux de la matrice caractéristique et de sa transposée au voisinage du point singulier) ; en particulier est étudié ce qui se passe pour des phases se rapprochant de la phase singulière. Nous reprendrons ce procédé dans des conditions que nous résumerons dans un instant, car il nous permettra commodément de mettre en évidence, comme usuellement, le lien entre l'hyperbolicité du système et les calculs formels de développements asymptotiques qui sont à la base d'études plus complètes de ces opérateurs.

Au paragraphe 1, dans le cas d'un système d'ordre t fortement hyperbolique, lorsque le cône normal caractéristique admet un point double, nous déterminons, quelle que soit la dimension de l'espace, le développement oscillatoire correspondant à la phase singulière. Nous avons utilisé le critère de Svensson [11] et des calculs précédents de Vaillant [12], [13], [14], ainsi que le mémoire [1]. La propagation est décrite, non plus par des équations différentielles ordinaires, mais par un système fortement hyperbolique de 2 équations aux dérivées partielles du 1er ordre dont le cône caractéristique se "réduit", en tous cas, à celui de l'équation des ondes à 2, 1 ou 0 dimensions d'espace.

*) A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

Au paragraphe 2, pour pouvoir obtenir au paragraphe 3 des développements valables pour une phase voisine de la phase singulière, nous avons démontré, sous les hypothèses du paragraphe 1 un théorème qui indique, en bref, que pour un point double du cône normal caractéristique (hyperbolique par rapport à $N=(1,0,\dots,0)$), et pour toute courbe analytique dans un voisinage de la projection "horizontale" de ce point (sur $\xi_0 = 0$), qui se "relève" sur ce cône suivant 2 courbes analytiques d'après le théorème de Puiseux (cf. Chaillou [4]), (que nous supposerons non tangentes entre elles), on peut construire le long de ces relèvements des vecteurs d^+, d^- (resp. g^+, g^-), fonctions analytiques formant une base du noyau de la matrice caractéristique (resp. de la matrice transposée), y compris au point singulier. Ce théorème est à rapprocher d'un théorème de Rellich [9] sur les perturbations analytiques des opérateurs autoadjoints dans un espace de Hilbert ayant une valeur propre de multiplicité finie isolée ; ce théorème de Rellich était utilisé par Ludwig pour obtenir les vecteurs $d^\pm$, $g^\pm$ en imposant des hypothèses de symétrie que nous laissons de côté.

Au paragraphe 3, nous construisons des développements oscillatoires, qui permettent d'approcher la solution, valables aussi pour des phases voisines "par arcs" de la phase singulière ; on les définit, suivant [8], en ajoutant aux termes habituels un terme intégral qui traduira pour la phase singulière, le fait que la propagation n'a plus lieu le long de rayons mais dans les cônes déterminés au paragraphe 1. Ces termes, redéveloppés en $\frac{1}{i\omega}$ lorsque la phase n'est pas singulière, redonnent les développements usuels. Nous avons utilisé des développements en

$$\frac{e^{i\omega\varphi}}{(i\omega)^p} ;$$

il est évident que l'on pourrait aussi bien utiliser des fonctions f_p satisfaisant à $f_p' = f_{p-1}$. Les propriétés de régularité des coefficients des développements sont précisées ; les calculs de mineurs nécessaires sont indiqués ; ce problème était laissé de côté dans [8]. Notre étude est faite encore pour un espace de dimension quelconque et des opérateurs d'ordre t.

Les références que nous indiquons ne constituent pas une bibliographie complète; nous renvoyons à la bibliographie de ces références.

§ 1

a) Un point x de l'espace R^{n+1} a des coordonnées $(x^0, x^1, \dots, x^n)$; un indice latin i varie de 1 à n, un indice grec α varie de 0 à n. On pose :

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} .$$

y est une fonction vectorielle sur R^{n+1} à valeurs dans C^m ; les coordonnées de y sont : $(y^1, \dots, y^B, \dots, y^m)$, B varie de 1 à m.

On emploiera souvent la convention de sommation pour les indices $i, \alpha, A, \dots$

h désigne un opérateur différentiel linéaire matriciel à coefficients constants ; $h(D) = (h^A_B(D))$, $1 \leq A \leq m$, $1 \leq B \leq m$, chaque h^A_B est un opérateur différentiel d'ordre au plus t ; on étudie le système

$$\sum_B h^A_B(D) y^B = 0 .$$

On note $H^A_B(D)$ la partie homogène de degré t de $h^A_B(D)$ et on la suppose à coefficients réels.

ξ désigne une forme sur R^{n+1} de coordonnées $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$.

On suppose que le déterminant H de $(H^A_B(\xi))$ est non nul.

On suppose que $h(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N, $N = (1,0,\dots,0)$ et que π est un point double, différent de 0, de la variété algébrique $\{H\}$ définie par $H(\xi) = 0$; on a donc:

$$H(\pi) = 0 , \quad \partial^\alpha H(\pi) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha , \quad \text{en posant } \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} ,$$

$$K_\pi(\xi) \equiv \sum_{\alpha,\beta} \partial^{\alpha\beta} H(\pi) \xi_\alpha \xi_\beta \quad \text{non identiquement nul.}$$

On sait, ([1], [4]) que K_π est hyperbolique.

On note A^B_A le cofacteur de H^A_B dans la matrice caractéristique ; il résulte de [6] ou [11] que $A^A_B(\pi) = 0$ pour tout A, B.

Comme π n'est pas un point triple, il existe au moins un mineur d'ordre $m-2$ de (H^A_B) non nul pour π. Sans apporter de restriction, on peut supposer que c'est le mineur A^{12}_{12} obtenu en rayant les 2 premières lignes et colonnes : $A^{12}_{12}(\pi) \neq 0$.

b) Le critère de Svensson [11, p. 160] implique l'existence de

$$\frac{A^B_A(\pi/_r + \xi + iN)}{H(\pi/_r + \xi + iN)} , \quad \text{pour tout } r \in R^* , \quad i^2 = -1 .$$

et que

$$\left|\frac{A_A^B(\pi/_r+\xi+iN)}{H(\pi/_r+\xi+iN)}\right| \leqq C(1+|\pi/_r+\xi|)^{1-t}$$

où C est une constante (indépendante de r et ξ) et $|\ |$ désigne la norme euclidienne.

On en déduit que :

$$\left|\frac{A_A^B[\pi+r(\xi+iN)]}{H[\pi+r(\xi+iN)]}\right| \leqq \frac{C}{|r|^t}(1+|\pi/_r+\xi|)^{1-t} .$$

Et en développant par rapport à r :

$$\left|\frac{\sum_\alpha \partial^\alpha A_A^B(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha)+rQ_\pi(\xi,r)}{r[\frac{K(\xi+iN)}{2}+r\,R_\pi(\xi,r)]}\right| \leqq \frac{C}{|r|^t}(1+|\pi/_r+\xi|)^{1-t}$$

où Q_π et R_π sont des polynômes en ξ , r .

On a encore :

$$\left|\frac{\partial^\alpha A_A^B(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha)+rQ_\pi(\xi,r)}{K(\xi+iN)+2r\,R_\pi(\xi,r)}\right| \leqq \frac{C}{2}(|r|+|\pi+r\xi|)^{1-t}$$

et en faisant tendre r vers 0 :

$$\left|\frac{\partial^\alpha A_A^B(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha)}{K(\xi+iN)}\right| \leqq \frac{C}{2}|\pi|^{1-t} . \tag{1}$$

Considérons alors la matrice :

$$\mathcal{H}(\xi) = \begin{pmatrix} \partial^\alpha A_2^2(\pi)\xi_\alpha & -\partial^\alpha A_2^1(\pi)\xi_\alpha \\ -\partial^\alpha A_1^2(\pi)\xi_\alpha & \partial^\alpha A_1^1(\pi)\xi_\alpha \end{pmatrix} .$$

Il résulte de l'identité de Jacobi :

$$A_2^2A_1^1 - A_2^1A_1^2 = HA_{12}^{12} \tag{2}$$

que le déterminant de cette matrice est égal à :

$$\det\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}[\partial^{\alpha\beta}(H.A_{12}^{12})](\pi)\xi_\alpha\xi_\beta = \tfrac{1}{2}K_\pi(\xi).A_{12}^{12}(\pi) .$$

La matrice inverse prise pour $\xi+iN$:

$$\frac{2}{K_\pi(\xi+iN)A_{12}^{12}(\pi)}\begin{pmatrix} \partial^\alpha A_1^1(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha) & \partial^\alpha A_2^1(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha) \\ \partial^\alpha A_1^2(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha) & \partial^\alpha A_2^2(\pi)(\xi_\alpha+iN_\alpha) \end{pmatrix}$$

existe quel que soit ξ et, de (1) et à nouveau du critère de Svensson, il résulte que la matrice $\mathcal{H}$ est fortement hyperbolique par rapport à N. On a donc la

PROPOSITION I. <u>La matrice</u>

$$\mathcal{H}(\xi) = \begin{pmatrix} \partial^{\alpha}A_2^2(\pi)\xi_{\alpha} & -\partial^{\alpha}A_2^1(\pi)\xi_{\alpha} \\ -\partial^{\alpha}A_1^2(\pi)\xi_{\alpha} & \partial^{\alpha}A_1^1(\pi)\xi_{\alpha} \end{pmatrix}$$

<u>est fortement hyperbolique par rapport à</u> N.

<u>Remarque</u>. Il résulte de l'identité d'Euler que :

$$\partial^{\alpha}A_A^B(\pi)\pi_{\alpha} = 0 .$$

Les directions de dérivation sont toutes dans le plan $\pi_{\alpha}x^{\alpha} = 0$.

c) Nous aurons besoin de construire des bases du noyau de $(H_B^A(\pi))$ et des bases du noyau de la matrice transposée. Nous donnerons une première construction adaptée à la détermination d'une onde asymptotique au d).

On notera $A_{12}^{\tilde{c}2}$ le cofacteur de $H_{\tilde{c}}^1$, $3 \leq \tilde{c} \leq m$, dans le déterminant A_2^2, et $A_{12}^{1\tilde{c}}$ le cofacteur de $H_{\tilde{c}}^2$ dans le déterminant A_1^1 et de façon analogue les éléments transposés.

On définira le vecteur δ_1 de R^m par ses coordonnées ([12], [13]) :

$$\delta_1^1 = A_{12}^{12}(\pi) \quad , \qquad \delta_1^2 = 0 \, , \qquad \delta_1^{\tilde{c}} = A_{12}^{\tilde{c}2}(\pi)$$

et le vecteur δ_2 par :

$$\delta_2^1 = 0 \, , \qquad \delta_2^2 = A_{12}^{12}(\pi) \, , \quad \delta_2^{\tilde{c}} = A_{12}^{1\tilde{c}}(\pi) .$$

Il sera commode, au § 2.3, de noter aussi $\delta_1 = \delta^+$, $\delta_2 = \delta^-$.

De même, on définira γ^1 et γ^2 par transposition.

On vérifie que :

$$H_B^A(\pi)\delta_1^B = 0 \qquad\qquad H_B^A(\pi)\delta_2^B = 0$$

et que δ_1 et δ_2 sont linéairement indépendants.

De même :

$$\gamma_A^1 \; H_B^A(\pi) = 0 \quad , \qquad \gamma_A^2 \; H_B^A(\pi) = 0$$

et γ^1 et γ^2 sont linéairement indépendants.

On posera aussi

$$\gamma^1 = \gamma^+ \quad ; \quad \gamma^2 = \gamma^- .$$

d) On pose :

$$\varphi(x) = \pi_o x^o + \pi_i x^i ,$$

de sorte que :

$$\operatorname{grad} \varphi = \pi = (\pi_o, \pi_i) .$$

On cherche une solution sous forme d'onde asymptotique de phase φ ([5], [8], [14]).

$$y^B(x) = e^{i\omega\varphi(x)}\left(\mathcal{Y}^B_t(x) + \frac{\mathcal{Y}^B_{t+1}(x)}{i\omega} + \ldots\right) \qquad \omega \in \mathbb{R}^{+*} \quad ;$$

$\mathcal{Y}^B_p$ indéfiniment différentiable.

On annule le coefficient de $(i\omega)^t$ dans $h(D)y$

$$H^A_B(\pi)\mathcal{Y}^B_t(x) = 0 .$$

D'où :

$$\mathcal{Y}^B_t(x) = \mathcal{U}^+_t(x)\delta^B_1 + \mathcal{U}^-_t(x)\delta^B_2$$

où $\mathcal{U}^+_t$ et $\mathcal{U}^-_t$ sont indéfiniment différentiables.

En annulant le coefficient de $(i\omega)^{t-1}$, on a :

$$H^A_B(\pi)\mathcal{Y}^B_{t+1} + \partial^\alpha H^A_B(\pi)[\delta^B_1\partial_\alpha \mathcal{U}^+_t + \delta^B_2\partial_\alpha \mathcal{U}^-_t] + H^{*A}_B(\pi)[\delta^B_1\mathcal{U}^+_t + \delta^B_2\mathcal{U}^-_t] = 0 ,$$

(H^{*A}_B) est la partie homogène de degré $t-1$ de la matrice (h^A_B).

Les conditions de compatibilité de ce système en $\mathcal{Y}^B_{t+1}$ s'écrivent :

$$\gamma^1_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_1\partial_\alpha\mathcal{U}^+_t + \gamma^1_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_2\partial_\alpha\mathcal{U}^-_t + \gamma^1_A H^{*A}_B(\pi)[\delta^B_1\mathcal{U}^+_t + \delta^B_2\mathcal{U}^-_t] = 0$$

$$\gamma^2_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_1\partial_\alpha\mathcal{U}^+_t + \gamma^2_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_2\partial_\alpha\mathcal{U}^-_t + \gamma^2_A H^{*A}_B(\pi)[\delta^B_1\mathcal{U}^+_t + \delta^B_2\mathcal{U}^-_t] = 0$$

La matrice caractéristique de ce système :

$$\begin{pmatrix} \gamma^1_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_1\xi_\alpha & \gamma^1_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_2\xi_\alpha \\ \gamma^2_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_1\xi_\alpha & \gamma^2_A\partial^\alpha H^A_B(\pi)\delta^B_2\xi_\alpha \end{pmatrix}$$

est égale à la matrice:

$$A_{12}^{12}(\pi) \begin{pmatrix} \partial^{\alpha}A_2^2(\pi)\xi_{\alpha} & -\partial^{\alpha}A_2^1(\pi)\xi_{\alpha} \\ -\partial^{\alpha}A_1^2(\pi)\xi_{\alpha} & \partial^{\alpha}A_1^1(\pi)\xi_{\alpha} \end{pmatrix} = A_{12}^{12}(\pi)\mathcal{H}(\xi) .$$

Elle est donc fortement hyperbolique par rapport à N d'après la proposition I. Le problème de Cauchy pour $x^0 = 0$ plan initial et $\mathcal{U}_t^+$, $\mathcal{U}_t^-$ fonctions inconnues est bien posé dans $\mathcal{E}^{\infty}$. On détermine de même tous les $\mathcal{Y}_p$.

e) Les vecteurs $\left(\partial^{\alpha}A_2^2(\pi)\right)$, $\left(-\partial^{\alpha}A_2^1(\pi)\right)$, $\left(-\partial^{\alpha}A_1^2(\pi)\right)$ et $\left(\partial^{\alpha}A_1^1(\pi)\right)$ ne sont pas linéairement indépendants, car cela entraînerait l'ultrahyperbolicité du déterminant de la matrice $\mathcal{H}$.

On a vu que :

$$\det \mathcal{H}(\xi) = \tfrac{1}{2} K_{\pi}(\xi)\, A_{12}^{12}(\pi)$$

avec

$$K_{\pi}(\xi) = \partial^{\alpha\beta}H(\pi)\xi_{\alpha}\xi_{\beta} .$$

On a toujours, à cause de l'hyperbolicité de K_{π} par rapport à N,

$$\partial^{00}H(\pi) \neq 0$$

et K_{π} se décompose en carrés sous la forme :

$$K_{\pi}(\xi) = \partial^{00}H(\pi)\left[\left(\xi_0 + \frac{\sum_i \partial^{0i}H(\pi)\xi_i}{\partial^{00}H(\pi)}\right)^2 - \frac{\Delta(\xi_k)}{(\partial^{00}H(\pi))^2}\right] .$$

La forme quadratique :

$$\Delta(\xi_k) = \Delta(\ldots,\xi_k,\ldots) = (\sum_i \partial^{0i}H(\pi)\xi_i)^2 - \partial^{00}H(\pi)(\sum_{i,j} \partial^{ij} H(\pi)\xi_i\xi_j)$$

est donc positive de signature $+,+$ ou $+$, ou est identiquement nulle. On aura donc 3 cas :

<u>1er cas</u>. Δ a pour signature $+,+$, c'est-à-dire K_{π} a pour signature $+,-,-$.

Il y a trois directions de dérivations linéairement indépendantes parmi $\left(\partial^{\alpha}A_2^2(\pi)\right)$, $\left(-\partial^{\alpha}A_2^1(\pi)\right)$, $\left(-\partial^{\alpha}A_1^2(\pi)\right)$ et $\left(\partial^{\alpha}A_1^1(\pi)\right)$, puisque la dimension du noyau de K_{π} est $(n-2)$ et est égale d'après l'hyperbolicité forte de $\mathcal{H}$ à la dimension du sous-espace orthogonal aux quatre vecteurs ci-dessus.

La dimension "réduite" de $\{K_{\pi}(\xi)=0\}$ est donc 3 et la propagation a lieu comme pour l'équation des ondes à deux dimensions d'espace. Dans le cas $n = 3$, on retrouve le cas du "point conique" de [8]. Ce cas n'existe pas pour $n < 3$. Nous dirons par suite encore que π est un point conique.

2e cas. Δ a pour signature +, c'est-à-dire K_π a pour signature +,-0.

On voit de même qu'il y a deux directions de dérivation linéairement indépendantes. La dimension réduite de K_π est 2 et la propagation a lieu comme pour l'équation des ondes à une dimension d'espace. Dans le cas $n = 2$, on retrouve le cas de la "self intersection" de [8]. Ce cas n'existe pas pour $n < 2$. Nous dirons encore que π est un point de self intersection.

3e cas. $\Delta \equiv 0$; K_π est un carré, les quatre vecteurs ont la même direction.

Il y a propagation le long d'une droite "bicaractéristique". Ce cas contient le cas où la multiplicité est localement constante au voisinage de π que nous avons déjà étudié par ailleurs [14]. En général, deux nappes de $\{H\}$ sont tangentes. Ce cas sera laissé de côté dans la suite.

THÉORÈME I. Les coefficients des solutions oscillatoires correspondant à une phase dont le gradient est un point double du cône normal caractéristique sont déterminés par des systèmes linéaires fortement hyperboliques, à mêmes parties principales, de deux équations du 1.er ordre à deux fonctions inconnues dans un espace de dimension au plus 3.

§ 2

Nous rappellerons d'abord un résultat de ([1], [4]) que nous adapterons à notre étude :

$$r \in R \ ; \quad \mu = (0,\mu_i) \text{ est un élément non nul de } R^{n+1} \ ; \quad s \in C \ .$$

PROPOSITION II. Le polynôme :

$$(r,s) \rightsquigarrow H(\pi + r\mu + sN)$$

se factorise sous la forme :

$$H(\pi + r\mu + sN) = H(N)[s-\lambda^+(r)][s-\lambda^-(r)]Q(s,r)$$

où les fonctions

$$r \in R \rightsquigarrow \lambda^{\pm}(r)$$

sont en fait analytiques, réelles, telles que $\lambda^{\pm}(0) = 0$.

Q se décomposerait d'une façon analogue en faisant intervenir les racines autres que la racine double π_0 de l'équation en ℓ_0, $H(\ell_0,\pi_i) = 0$.

LEMME I. On posera

$$\frac{d\lambda^+}{dr}(0) = \mu^+ \; ; \quad \frac{d\lambda^-}{dr}(0) = \mu^- .$$

Du fait que

$$H[\pi + r\mu + \lambda^{\pm}(r)N] = 0 \quad \text{pour tout } r ,$$

on déduit en dérivant deux fois:

$$\partial^{oo}H(\pi)(\mu^{\pm})^2 + 2\partial^{oi}H(\pi)\mu^{\pm}\mu_i + \partial^{ij}H(\pi)\mu_i\mu_j = 0$$

qui exprime que les tangentes en π aux courbes

$$r \rightsquigarrow \pi + r\mu + \lambda^{\pm}(r)N$$

appartiennent au cône (hyperbolique par rapport à N) $\{K_{\pi}(\xi) = 0\}$.

On remarquera que :

$$|\mu^+ - \mu^-| = \frac{2\sqrt{\Delta(\mu_i)}}{|\partial^{oo}H(\pi)|} .$$

On fera l'hypothèse

$$\Delta(\mu_i) \neq 0 .$$

Cela revient à étudier les droites passant par (π_i) telles que les tangentes aux courbes correspondant sur la variété $\{H(\xi) = 0\}$ ne soient pas confondues.

Nous poserons pour simplifier les notations :

$$\mu^+ - \mu^- = D .$$

Remarques

1) Les résultats suivants s'obtiendraient aussi bien si on remplaçait les droites $r \rightsquigarrow (\pi_i) + r\mu$ par des courbes analytiques :

$$r \rightsquigarrow (\pi_i) + \mu(r) \quad \text{avec} \quad \frac{d\mu}{dr}(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu(0) = 0 ,$$

d'après le théorème classique sur les séries de Puiseux.

2) Si $\Delta(\mu_i) = 0$, on a nécessairement :

$$\partial^{o}A_1^1(\pi)\mu^{\pm} + \partial^{i}A_1^1(\pi)\mu_i = 0$$

et les égalités analogues pour les autres mineurs. En considérant le développement en r de $A_1^1(\pi + r\mu + \lambda^{\pm}(r)N)$, on voit que $r = 0$ est racine double de cette fonction.

Cette remarque peut servir à généraliser au cas $\Delta(\mu_i) = 0$ les calculs que nous allons faire dans le cas $\Delta(\mu_i) \neq 0$.

On notera, si $\xi \rightsquigarrow A(\xi)$ est polynomiale :

$$r \in \mathbb{R} \overset{A^{\pm}}{\rightsquigarrow} A[\pi + r\mu + \lambda^{\pm}(r)N] .$$

De l'identité (2), on déduit les lemmes :

LEMME II.

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{dA_1^{1\pm}}{dr}(0) & \dfrac{dA_2^{1\pm}}{dr}(0) \\ \dfrac{dA_1^{2\pm}}{dr}(0) & \dfrac{dA_2^{2\pm}}{dr}(0) \end{pmatrix} = 0$$

LEMME III.

$$\det \begin{pmatrix} \partial^o A_1^1(\pi) & \partial^o A_2^1(\pi) \\ \partial^o A_1^2(\pi) & \partial^o A_2^2(\pi) \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\partial^{oo}H(\pi).A_{12}^{12}(\pi) \neq 0$$

et l'identité transposée.

LEMME IV.

$$\left[\det \begin{pmatrix} \partial^o A_1^1(\pi) & \partial^i A_2^1(\pi) \\ \partial^o A_1^2(\pi) & \partial^i A_2^2(\pi) \end{pmatrix}\right] \xi_i + \left[\det \begin{pmatrix} \partial^i A_1^1(\pi) & \partial^o A_2^1(\pi) \\ \partial^i A_1^2(\pi) & \partial^o A_2^2(\pi) \end{pmatrix}\right] \xi_i$$
$$= \partial^{oi}H(\pi)\xi_i.A_{12}^{12}(\pi)$$

et l'identité transposée.

LEMME V.

$$\left[\det \begin{pmatrix} \partial^i A_1^1(\pi) & \partial^j A_2^1(\pi) \\ \partial^i A_1^2(\pi) & \partial^j A_2^2(\pi) \end{pmatrix}\right] \xi_i\xi_j = \tfrac{1}{2}\,\partial^{ij}H(\pi)\xi_i\xi_j A_{12}^{12}(\pi)$$

et l'identité transposée.

On peut supposer $\partial^o A_1^1(\pi) \neq 0$ (Lemme III). Puisque $\mu^+ \neq \mu^-$, on ne peut avoir à la fois :

$$\frac{dA_1^{1+}}{dr}(0) \equiv \partial^o A_1^1(\pi)\mu^+ + \partial^i A_1^1 \mu_i = 0$$

et

$$\frac{dA_1^{1-}}{dr}(0) \equiv \partial^0 A_1^1(\pi)\mu^- + \partial^i A_1^1 \mu_i = 0 \,.$$

En choisissant convenablement les notations, on peut donc supposer que :

$$\frac{dA_1^{1-}}{dr}(0) \neq 0 \,.$$

On posera :

$$d^{-B}(0) = \frac{\partial A_1^{B-}}{dr}(0) \;;\quad g_A^-(0) = \frac{dA_A^{1-}}{dr}(0) \quad ,$$

et l'on distinguera quatre cas :

1) $\dfrac{dA_2^{2+}}{dr}(0) \neq 0$.

Dans ce cas, on posera :

$$d^{+B}(0) = \frac{dA_2^{B+}}{dr}(0) \quad;\quad g_A^+(0) = \frac{dA_A^{2+}}{dr}(0) \quad .$$

Démontrons que les vecteurs $d^+(0)$ et $d^-(0)$ sont linéairement indépendants. On vérifie à l'aide des lemmes précédents que :

$$\det\begin{pmatrix} d^{-1}(0) & d^{+1}(0) \\ d^{-2}(0) & d^{+2}(0) \end{pmatrix} = D \det\begin{pmatrix} d^{-1}(0) & \partial^0 A_2^1(\pi) \\ d^{-2}(0) & \partial^0 A_2^2(\pi) \end{pmatrix}$$

$$= -D \det\begin{pmatrix} \partial^0 A_1^1(\pi) & d^{+1}(0) \\ \partial^0 A_1^2(\pi) & d^{+2}(0) \end{pmatrix} \,.$$

Comme $D \neq 0$ et

$$\det\begin{pmatrix} \partial^0 A_1^1(\pi) & \partial^0 A_2^1(\pi) \\ \partial^0 A_1^2(\pi) & \partial^0 A_2^2(\pi) \end{pmatrix} \neq 0 \quad ,$$

on a :

$$\det\begin{pmatrix} d^{-1}(0) & d^{+1}(0) \\ d^{-2}(0) & d^{+2}(0) \end{pmatrix} \neq 0 \,.$$

De même $g^+(0)$ et $g^-(0)$ sont linéairement indépendants.

2) $\frac{dA_2^{2+}}{dr}(0) = 0$, $\frac{dA_2^{1+}}{dr}(0) \neq 0$.

On posera alors

$$d^{+B}(0) = \frac{dA_2^{B+}}{dr}(0) \quad , \quad g_A^+(0) = \frac{dA_A^{1+}}{dr}(0) \ .$$

Pour $d^+(0)$ et $d^-(0)$ les résultats du 1er cas restent valables.

Montrons que $g^+(0)$ et $g^-(0)$ sont linéairement indépendants.

On a :

$$\det\begin{pmatrix} g_1^-(0) & g_2^-(0) \\ g_1^+(0) & g_2^+(0) \end{pmatrix} = -D \det\begin{pmatrix} \partial^o A_1^1(\pi) & \partial^o A_2^1(\pi) \\ \partial^i A_1^1(\pi)\mu_i & \partial^i A_2^1(\pi)\mu_i \end{pmatrix} \ .$$

Si ce déterminant était nul, on aurait :

$$\partial^i A_1^1(\pi)\mu_i = -\nu\partial^o A_1^1$$
$$\partial^i A_2^1(\pi)\mu_i = -\nu\partial^o A_2^1$$

et comme $\frac{dA_1^{2+}}{dr}(0) = 0$ d'après le lemme II et $\frac{dA_2^{2+}}{dr}(0) = 0$, dans ce cas, on aurait (lemmes IV et III) :

$$A_{1\,2}^{1\,2}(\pi)\partial^{oi}H(\pi)\mu_i = -\det\begin{pmatrix} \partial^o A_1^1(\pi) & \partial^o A_2^1(\pi) \\ \partial^o A_1^2(\pi) & \partial^o A_2^2(\pi) \end{pmatrix}(\mu^+ + \nu)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\partial^{oo}H(\pi)A_{1\,2}^{1\,2}(\pi)(\mu^+ + \nu) \ ,$$

c'est-à-dire aussi :

$$\mu^+ + \mu^- = \mu^+ + \nu \ ,$$

soit :

$$\mu^- = \nu$$

et par suite :

$$\frac{dA_1^{1-}}{dr}(0) = 0$$

ce qui n'est pas.

3) $\frac{dA_2^{2+}}{dr}(0) = 0$; $\frac{dA_2^{1+}}{dr}(0) = 0$; $\frac{dA_1^{2+}}{dr}(0) \neq 0$.

On pose :

$$d^{+B}(0) = \frac{dA_1^{B+}}{dr}(0) \quad ; \quad g_A^+(0) = \frac{dA_A^{2+}}{dr}(0) .$$

Par un calcul analogue à celui du cas 2), on voit que $d^+(0)$ et $d^-(0)$ sont linéairement indépendants; par un calcul analogue à celui du cas 1) pour les $g^{\pm}(0)$, on voit que $g^+(0)$ et $g^-(0)$ sont linéairement indépendants.

4) $\dfrac{dA_2^{2+}}{dr}(0) = 0$; $\dfrac{dA_2^{1+}}{dr}(0) = 0$; $\dfrac{dA_1^{2+}}{dr}(0) = 0$.

On a alors $\dfrac{dA_1^{1+}}{dr}(0) \neq 0$; en effet, sinon on aurait :

$$\partial^o A_1^1(\pi)\mu^+ + \partial^i A_1^1(\pi)\mu_i = 0$$
$$\partial^o A_2^2(\pi)\mu^+ + \partial^i A_2^2(\pi)\mu_i = 0$$
$$\partial^o A_2^1(\pi)\mu^+ + \partial^i A_2^1(\pi)\mu_i = 0$$
$$\partial^o A_1^2(\pi)\mu^+ + \partial^i A_1^2(\pi)\mu_i = 0 .$$

et par les lemmes IV et III :

$$\partial^{oi}H(\pi)\mu_i = -\partial^{oo}H(\pi)\mu^+$$

d'où : $\mu^+ = \mu^-$, ce qui est exclu.

On pose alors :

$$d^{+B}(0) = \frac{dA_1^{B+}}{dr}(0) \quad ; \quad g_A^+(0) = \frac{dA_A^{1+}}{dr}(0) .$$

Les vecteurs $d^+(0)$, $d^-(0)$ sont linéairement indépendants comme dans le cas 3) et $g^+(0)$ et $g^-(0)$ le sont comme dans le cas 2).

Dans chaque cas maintenant on construira des vecteurs $d^+(r)$, $d^-(r)$ tels que :

i) $d^{\pm B}(r)$ soient des fonctions analytiques de r

ii) $\begin{cases} H_B^{A+}(r)d^{+B}(r) = 0 \\ H_B^{A-}(r)d^{-B}(r) = 0 \end{cases}$ pour tout r .

iii) $d^+(r)$ et $d^-(r)$ soient linéairement indépendants pour tout r d'un voisinage de 0.

Dans le premier cas, il suffira de poser :

$$\begin{cases} d^{+B}(r) = \dfrac{A_2^{B+}(r)}{r}, & \text{si} \quad r \neq 0 \\[2ex] d^{+B}(0) = \dfrac{dA_2^{B+}}{dr}(0) & \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d^{-B}(r) = \dfrac{A_1^{B-}(r)}{r}, & \text{si} \quad r \neq 0 \\[2ex] d^{-B}(0) = \dfrac{dA_1^{B-}}{dr}(0) . & \end{cases}$$

Les autres cas se traiteront de façon analogue. On obtiendra de même aussi les vecteurs $g^+(r)$, $g^-(r)$ relatifs à la matrice transposée.

On a le :

THÉORÈME II. Pour toute droite de direction μ dans R^{n-1} avec $\Delta(\mu_i) \neq 0$, passant par $(0,\pi_i)$ paramétrée par r de sorte qu'un point de cette droite soit $(0,\pi_i + r\mu_i)$, on peut construire des vecteurs $d^{\pm}(r)$, (resp $g^{\pm}(r)$) qui soient, dans un voisinage de $r = 0$,

i) fonctions analytiques de r ;

ii) tels que, pour $r \neq 0$, $d^+(r)$, (resp $g^+(r)$) soit une base du noyau de $(H^A_B(\pi + r\mu + \lambda^+(r)N))$, (resp de sa transposée) et $d^-(r)$, (resp $g^-(r)$) soit une base du noyau de $(H^A_B(\pi + r\mu + \lambda^-(r)N))$, (resp de sa transposée) ;

pour $r = 0$, $d^+(0)$ et $d^-(0)$, (resp $g^+(0)$ et $g^-(0)$) forment une base du noyau de $(H^A_B(\pi))$, (resp de sa transposée).

Les vecteurs ainsi construits auront des propriétés supplémentaires utiles dans la suite.

PROPOSITION III. On a :

$$g^-_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi)d^{+B}(0) = 0 \quad , \quad g^+_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi)d^{-B}(0) = 0 .$$

Démontrons, par exemple, la première égalité. On a pour tout r :

$$g^-_A(r)[(H^{A+}_B(r) - H^{A-}_B(r)]d^{+B}(r) = 0$$

et en posant $\dfrac{\lambda^+(r) - \lambda^-(r)}{2} = \Phi_T(r)$ (cette notation sera justifiée par la suite) et en utilisant la formule de Taylor pour le polynôme $H^A_B(\pi_0+\lambda^+, \pi_i + r\mu_i)$ et sa première variable pour la valeur $\pi_0+\lambda^-$:

$$g_A^-(r)[(2\Phi_T)(\partial^0 H_B^A)^-(r) + \frac{(2\Phi_T)^2}{2!}(\partial^{00}H_B^A)^-(r) + \dots + \frac{(2\Phi_T)^t}{t!}(\overbrace{\partial^{0\dots0}}^{t\ \text{fois}} H_B^A)^-(r)]d^{+B}(r) = 0 .$$

Si $r \to 0$ et $r \neq 0$, $\lambda^+(r) \neq \lambda^-(r)$, puisque $\mu^+ \neq \mu^-$, on peut donc diviser par Φ_T et à la limite on obtient l'égalité cherchée.

LEMME VI.

$$g_A^-(0)\partial^i H_B^A(\pi)d^{+B}\mu_i = 0 \quad ; \quad g_A^+(0)\partial^i H_B^A(\pi)d^{-B}(0)\mu_i = 0 .$$

On a :

$$H_B^{A+}(r)d^{+B}(r) = 0 ,$$

d'où :

$$\frac{dH_B^{A+}}{dr}(r)d^{+B}(r) + H_B^{A+}(r)\frac{dd^{+B}}{dr}(r) = 0$$

où, à l'aide de la formule de Taylor :

$$\frac{dH_B^{A+}}{dr}(r)d^{+B}(r) + [H_B^{A-}(r) + 2\Phi_T(\partial^0 H_B^A)^-(r) + \dots + \frac{(2\Phi_T)^t}{t!}(\partial^{000}H_B^A)^-(r)]\frac{dd^{+B}}{dr}(r) = 0$$

donc

$$g_A^-(r)\frac{dH_B^{A+}}{dr}(r)d^{+B}(r) + \Phi_T F(r) = 0$$ (F fonction analytique de r) .

Si r tend vers 0, on obtient :

$$g_A^-(0).\frac{dH_B^{A+}}{dr}(0)d^{+B}(0) = 0 .$$

Le résultat s'en déduit à l'aide de la proposition précédente.

PROPOSITION IV. On pose :

$$p^{+\alpha}(r) = \frac{(\partial^\alpha H)^+(r)}{r} , \qquad \text{si } r \neq 0$$

$$p^{+\alpha}(0) = \frac{d[(\partial^\alpha H)^+]}{dr}(0)$$

et de même pour $p^{-\alpha}(r)$.

On a ainsi défini deux vecteurs de R^{n+1}, fonctions analytiques de r dont les directions, pour $r \neq 0$, sont celles de vecteurs bicaractéristiques classiques.

On a, pour tout r, :

$$g_A^-(r)(\partial^\alpha H_B^A)^-(r).d^{-B}(r) = C^-(r)p^{-\alpha}(r)$$

$$g_A^+(r)(\partial^\alpha H_B^A)^+(r).d^{+B}(r) = C^+(r)p^{+\alpha}(r) .$$

$C^+(r)$, $C^-(r)$ sont des fonctions analytiques réelles dépendant de chaque cas de la démonstration du théorème II (leur nature est précisée au cours de la démonstration) ;

$$C^+(0) \neq 0 \text{ , } C^-(0) \neq 0 \text{ ; } p^+(0) \neq 0 \text{ , } p^-(0) \neq 0 .$$

Les directions de $p^+(0)$ et $p^-(0)$ sont donc les limites des directions des vecteurs bicaractéristiques classiques.

Enfin :

$$p^{+\alpha}(0) = \tfrac{1}{2}\,\partial^\alpha K_\pi(\mu^+,\mu_i)$$

$$p^{-\alpha}(0) = \tfrac{1}{2}\,\partial^\alpha K_\pi(\mu^-,\mu_i)$$

p^+, p^- sont les "conjugués" de (μ^+,μ_i) et (μ^-,μ_i) par rapport à K_π .

En effet, si $r \neq 0$.

$$g_A^-(r)(\partial^\alpha H_B^A)^-(r)d^{-B}(r) = \frac{A_A^{1-}(r)}{r}(\partial^\alpha H_B^A)^-(r)\,\frac{A_1^{B-}(r)}{r} = \frac{A_1^{1-}(r)}{r}\,\frac{(\partial^\alpha H)^-(r)}{r}$$

d'où, si r tend vers 0 :

$$g_A^-(0).\partial^\alpha H_B^A(\pi)d^{-B}(0) = \frac{dA_1^{1-}}{dr}(0)p^{-\alpha}(0) ,$$

avec

$$C^-(0) = \frac{dA_1^{1-}}{dr}(0) \neq 0 .$$

De même, dans le cas 1) précédent :

$$g_A^+(r)(\partial^\alpha H_B^A)^+(r)d^{+B}(r) = \frac{A_2^{2+}(r)}{r}\,p^{+\alpha}(r)$$

$$C^+(0) = \frac{dA_2^{2+}}{dr}(0) \neq 0 .$$

De plus :

$$p^{-o}(0) = \partial^{oo}H(\pi)\mu^- + \partial^{io}H(\pi)\mu_i = \varepsilon\sqrt{\Delta(\mu)} \neq 0 \quad (\text{avec } \varepsilon = \pm 1) ,$$

et :

$$p^{+o}(0) = -\,\varepsilon\sqrt{\Delta(\mu)} \neq 0 .$$

Enfin :

$$p^{-\alpha}(0) = \partial^{0\alpha}H(\pi)\mu^- + \partial^{i\alpha}H(\pi)\mu_i$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\partial^{\alpha}K_\pi(\mu^-,\mu_i)$$

et l'égalité analogue pour $p^{+\alpha}(0)$.

Les autres cas (2), 3), 4)) donnent des résultats analogues.

COROLLAIRE.

$$\begin{cases} g^+_A(0)[\partial^0 H^A_B(\pi)\mu^+ + \partial^i H^A_B(\pi)\mu_i]d^{+B}(0) = 0 \\ g^-_A(0)[\partial^0 H^A_B(\pi)\mu^- + \partial^i H^A_B(\pi)\mu_i]d^{-B}(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Cela revient à dire que :

$$\partial^0 K_\pi(\mu^+,\mu_i).\mu^+ + \partial^j K_\pi(\mu^+,\mu_i).\mu_j = 0$$

et l'égalité analogue, d'après l'identité d'Euler.

On peut aussi obtenir ce corollaire par une démonstration semblable à celle du Lemme VI.

LEMME VII.

$$\mathcal{H}_\mu(\xi) = \begin{pmatrix} g^+_A(0)\partial^\alpha H^A_B(\pi)d^{+B}(0)\xi_\alpha & g^+_A(0)\partial^\alpha H^A_B(\pi)d^{-B}(0)\xi_\alpha \\ \\ g^-_A(0)\partial^\alpha H^A_B(\pi)d^{+B}(0)\xi_\alpha & g^-_A(0)\partial^\alpha H^A_B(\pi)d^{-B}(0)\xi_\alpha \end{pmatrix}$$

est fortement hyperbolique par rapport à N .

Cela résulte du critère de Kasahara Yamaguti [6], (ou de ceux de Strang [10] et Svensson [11]). On a (cf. § 1) :

$$d^+(0) = \rho\delta^+ + \rho'\delta^-$$

$$d^-(0) = \sigma\delta^+ + \sigma'\delta^-$$

avec $\rho\sigma' - \rho'\sigma \neq 0$, puisque $d^+(0)$ et $d^-(0)$ forment une base. De même pour $g^+(0)$, $g^-(0)$ avec γ^+ , γ^-.

On en déduit facilement que :

$$\det \mathcal{H}_\mu(\xi) = \mathfrak{h}(\mu).\det \mathcal{H}(\xi) \;, \qquad \mathfrak{h}(\mu) \neq 0 \;, \qquad \mathfrak{h}(\mu) \in \mathbb{R}$$

$\det \mathcal{H}_\mu$ est donc hyperbolique. Enfin, comme au § 1, tout ξ tel que $\Delta(\xi_i) = 0$ et ξ_0 soit la racine double de $K_\pi(\xi)$ correspondante annule la matrice $\mathcal{H}_\mu(\xi)$.

LEMME VIII. On a

ou bien : $$\Big(\sum_{A,B} \mathfrak{g}_A^+(0)\partial^o H_B^A(\pi)d^{+B}(0)\Big).\Big(\sum_{C,D} \mathfrak{g}_C^-(0).\partial^i H_D^C(\pi)d^{+D}(0)\Big)$$
$$= k\Big(\sum_{A,B} \mathfrak{g}_A^-(0)\partial^o H_B^A(\pi)d^{-B}(0)\Big)\Big(\sum_{C,D} \mathfrak{g}_C^+(0).\partial^i H_D^C(\pi)d^{-D}(0)\Big)$$

pour tout i, avec $k \in \mathbb{R}^+$, $k \neq 0$,

ou bien : $$\sum_{A,B} \mathfrak{g}_A^-(0)\partial^i H_B^A(\pi)d^{+B}(0) = 0 \text{ , pour tout } i \text{ ,}$$

et

$$\sum_{A,B} \mathfrak{g}_A^+(0)\partial^i H_B^A(\pi)d^{-B}(0) = 0 \text{ , pour tout } i \text{ ,}$$

(ceci ne pouvant se produire que dans le cas de la "self-intersection".)

<u>Notations</u>. On posera :

$$\mathcal{H}_\mu^{++\alpha} = \mathfrak{g}_A^+(0)\partial^\alpha H_B^A(\pi)d^{+B}(0) \qquad C_\mu^+ = C^+(0)$$
$$\mathcal{H}_\mu^{+-\alpha} = \mathfrak{g}_A^+(0)\partial^\alpha H_B^A(\pi)d^{-B}(0) \qquad C_\mu^- = C^-(0)$$
$$\mathcal{H}_\mu^{-+\alpha} = \mathfrak{g}_A^-(0)\partial^\alpha H_B^A(\pi)d^{+B}(0)$$
$$\mathcal{H}_\mu^{--\alpha} = \mathfrak{g}_A^-(0)\partial^\alpha H_B^A(\pi)d^{-B}(0)$$

Explicitons l'identité :

$$\text{dét}\,\mathcal{H}_\mu = \mathfrak{h}(\mu)\det\mathcal{H}$$

sous la forme :

$$\mathcal{H}_\mu^{++o}\,\mathcal{H}_\mu^{--o}\,\xi_o^2 + (\mathcal{H}_\mu^{++o}\,\mathcal{H}_\mu^{--i}\,\xi_i + \mathcal{H}_\mu^{--o}\,\mathcal{H}_\mu^{++i}\xi_i)\xi_o$$
$$+ \mathcal{H}_\mu^{++i}\,\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{--j}\,\xi_j - \mathcal{H}_\mu^{+-i}\,\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{-+j}\,\xi_j$$
$$= \mathfrak{h}'(\mu)(\partial^{oo}H(\pi)\xi_o^2 + 2\partial^{oi}H(\pi)\xi_i\xi_o + \partial^{ij}H(\pi)\xi_i\xi_j)$$

pour tout ξ, avec $\mathfrak{h}'(\mu) \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{h}'(\mu) \neq 0$.

On en déduit :

$$\partial^{oo}H(\pi)(\mathcal{H}_\mu^{++i}\,\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{--j}\,\xi_j - \mathcal{H}_\mu^{+-i}\,\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{-+j}\,\xi_j)$$
$$= \mathcal{H}_\mu^{++o}\,\mathcal{H}_\mu^{--o}\,\partial^{ij}H(\pi)\xi_i\xi_j \qquad \text{pour tout } (\xi_i)$$

qui va permettre d'étudier $\mathcal{H}_\mu^{+-i}\,\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{-+j}\,\xi_j$, tous les autres éléments ayant été déjà calculés explicitement.

On obtient :

$$\partial^{oo}H(\pi)\mathcal{H}_\mu^{+-i}\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{-+j}\xi_j = C_\mu^+C_\mu^-[\partial^{oo}H(\pi)(\partial^{io}H(\pi)\mu^+ + \partial^{ik}H(\pi)\mu_k)\xi_i$$

$$.(\partial^{jo}H(\pi)\mu^- + \partial^{j\ell}H(\pi)\mu_\ell)\xi_j + \Delta(\mu)\partial^{ij}H(\pi)\xi_i\xi_j]$$

$$= C_\mu^+C_\mu^-\frac{1}{\partial^{oo}H(\pi)}\Big\{[(\partial^{oi}H(\pi)\xi_i).(\partial^{oj}H(\pi)\mu_j)$$

$$- \partial^{oo}H(\pi)\partial^{ij}H(\pi)\mu_i\xi_j]^2 - \Delta(\xi).\Delta(\mu)\Big\} .$$

En considérant la forme bilinéaire symétrique,

$$D(\mu,\xi) = (\partial^{io}H(\pi)\xi_i)(\partial^{jo}H(\pi)\mu_j) - \partial^{oo}H(\pi)\partial^{ij}H(\pi)\xi_i\mu_j ,$$

on déduit du fait qu'elle est positive $(D(\mu,\mu) \equiv \Delta(\mu))$ et de l'inégalité de Schwarz que

$$\mathcal{H}_\mu^{++o}\,\mathcal{H}_\mu^{--o}\,\mathcal{H}_\mu^{+-i}\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{-+j}\xi_j \geqq 0 \quad \text{quels que soient } \mu \text{ et } (\xi_i) .$$

On a donc

soit : $$\mathcal{H}_\mu^{++o}\,\mathcal{H}_\mu^{-+i} = k(\mu)\mathcal{H}_\mu^{--o}\,\mathcal{H}_\mu^{+-i} \quad \text{pour tout } i ,$$

$$\text{avec } k(\mu) \in \mathbb{R}^+,\ k(\mu) \neq 0 ,$$

soit : $$\mathcal{H}_\mu^{+-i} = 0 ,$$

soit : $$\mathcal{H}_\mu^{-+i} = 0 .$$

Mais en fait on a :

$$(\mathcal{H}_\mu^{+-i} = 0) \text{ implique } (\mathcal{H}_\mu^{-+i} = 0) \text{ et réciproquement.}$$

Nous démontrerons cette relation en remarquant que :

$$\det \mathcal{H}_\mu(\xi) \equiv \det \begin{pmatrix} \mathcal{H}_\mu^{++\alpha}\xi_\alpha & \mathcal{H}_\mu^{+-i}\xi_i \\ \mathcal{H}_\mu^{-+i}\xi_i & \mathcal{H}_\mu^{--\alpha}\xi_\alpha \end{pmatrix}$$

$$\equiv \mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--0}\left(\left[\xi_0 + \frac{1}{2}\frac{(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i}\xi_i + \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i}\xi_i)}{\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--0}}\right]^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\frac{(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i}\xi_i - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i}\xi_i)^2}{(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--0})^2} - \frac{\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{+-i}\xi_i\mathcal{H}_\mu^{-+j}\xi_j}{(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--0})^2}\right) .$$

Si, par exemple, $\mathcal{H}_\mu^{+-i} = 0$, K_π a pour signature +, -, on est dans le cas de self-intersection ; si $(\xi_i) \neq 0$ est racine de Δ et ξ_0 la racine double correspondante de K_π , on a :

$$\begin{cases} \xi_0 + \frac{1}{2}\dfrac{(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i}\xi_i - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i}\xi_i)}{\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--0}} = 0 \\ (\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i} - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i})\xi_i = 0 , \end{cases}$$

et tout ξ vérifiant cette relation doit annuler la matrice, puisqu'elle est fortement hyperbolique. On doit donc avoir :

$$((\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i} - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i})\xi_i = 0) \quad \text{implique} \quad (\mathcal{H}_\mu^{-+i}\xi_i = 0) .$$

Comme $(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i} - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i}) \neq 0$, puisque $\Delta \not\equiv 0$, il faut donc :

$$\mathcal{H}_\mu^{-+i} = \alpha(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i} - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i}) \quad \text{pour tout } i$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

et comme (lemme VI) :

$$\mathcal{H}_\mu^{-+i}\mu_i = 0$$

il faut :

$$\alpha(\mathcal{H}_\mu^{++0}\mathcal{H}_\mu^{--i} - \mathcal{H}_\mu^{--0}\mathcal{H}_\mu^{++i})\mu_i = 0 .$$

Soit à l'aide du corollaire de la proposition IV :

$$\alpha(\mu^+ - \mu^-) = 0 ,$$

c'est-à-dire que :

$$\mathcal{H}_\mu^{-+i} = 0 \, .$$

On a de même :

$$(\mathcal{H}_\mu^{-+i} = 0) \quad \text{implique} \quad (\mathcal{H}_\mu^{+-i} = 0)$$

Nous utiliserons plus tard la matrice de polynomes à $(n+2)$ variables : $(\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$:

$$\mathfrak{H}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_\mu^{++\alpha}\xi_\alpha + \mathcal{H}_\mu^{++o}\eta & \mathcal{H}_\mu^{+-i}\xi_i \\ \mathcal{H}_\mu^{-+i}\xi_i & \mathcal{H}_\mu^{--\alpha}\xi_\alpha - \mathcal{H}_\mu^{--o}\eta \end{pmatrix}$$

On a la :

PROPOSITION V. <u>La matrice</u> $\mathfrak{H}$ <u>est fortement hyperbolique par rapport à</u> : $(N,0) = (1,0,\ldots,0)$. <u>En effet</u> :

$$\det \mathfrak{H} = \mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--o} \left\{ \left[\xi_o + \frac{1}{2}\frac{(\mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--i} + \mathcal{H}_\mu^{--o}\mathcal{H}_\mu^{++i})\xi_i}{\mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--o}} \right]^2 - \left[\eta - \frac{1}{2}\frac{(\mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--i} - \mathcal{H}_\mu^{--o}\mathcal{H}_\mu^{++i})\xi_i}{\mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--o}} \right]^2 - \frac{\mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--o}\mathcal{H}_\mu^{+-i}\xi_i\,\mathcal{H}_\mu^{-+j}\xi_j}{(\mathcal{H}_\mu^{++o}\mathcal{H}_\mu^{--o})^2} \right\} .$$

La signature de cette forme quadratique, d'après le lemme VIII est soit $+,-,-$, soit $+,-$. Dans chaque cas on vérifie facilement la forte hyperbolicité de la matrice.

§ 3

On définit :

$$\varphi^+(x,r) \equiv \varphi(x) + \lambda^+(r)x^o + r\mu_i x^i$$
$$= (\lambda^+(r) + \pi_o)x^o + (\pi_i + r\mu_i)x^i$$

$$\varphi^-(x,r) \equiv \varphi(x) + \lambda^-(r)x^o + r\mu_i x^i$$

et [8] :

$$\Phi(x,\tau,r) \equiv \varphi^-(x,r) + (\lambda^+(r) - \lambda^-(r))(\frac{x^o+\tau}{2})$$
$$= \varphi^+(x,r) - (\lambda^+(r) - \lambda^-(r))(\frac{x^o-\tau}{2})$$
$$= (\pi_o + \frac{\lambda^+(r) + \lambda^-(r)}{2})x^o + (\pi_i+r\mu_i)x^i + \frac{\lambda^+(r) - \lambda^-(r)}{2}\,\tau .$$

On a :

$$\Phi(x,x^o,r) = \varphi^+(x,r)$$

$$\Phi(x,-x^o,r) = \varphi^-(x,r)$$

$$\operatorname{grad} \varphi^+ = (\partial_\alpha \varphi^+) = \pi + r\mu + \lambda^+ N$$

$$\operatorname{grad} \varphi^- = (\partial_\alpha \varphi^-) = \pi + r\mu + \lambda^- N$$

$$\operatorname{grad} \Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}) = \pi + r\mu + \frac{\lambda^+ + \lambda^-}{2} N$$

$$= \operatorname{grad} \varphi^+ - \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{2} N$$

$$= \operatorname{grad} \varphi^- + \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{2} N .$$

On posera :

$$\frac{\lambda^+(r) - \lambda^-(r)}{2} = \Phi_\tau(r) .$$

On cherchera des solutions asymptotiques de la forme :

$$y^B(x,r) = e^{i\omega\varphi^+(x,r)}\left(Y_t^{+B}(x,r) + \frac{Y_{t+1}^{+B}(x,r)}{i\omega} + \dots \right)$$

$$+ e^{i\omega\varphi^-(x,r)}\left(Y_t^{-B}(x,r) + \frac{Y_{t+1}^{-B}(x,r)}{i\omega} + \dots \right)$$

$$+ \int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi(x,\tau,r)}\left(Z_t^B(x,\tau,r) + \frac{Z_{t+1}^B(x,\tau,r)}{i\omega} + \dots \right) d\tau$$

où $Y_p^{\pm B}(x,r)$ sont des fonctions analytiques de x et de r dans un voisinage de 0,

et $Z_p^B(x,\tau,r)$ sont des fonctions analytiques de x, de τ et de r dans un voisinage de 0.

En remplaçant y^B par ce développement dans le système étudié (on pose $\partial^{(0)t} = (\frac{\partial}{\partial x^0})^t)$, on obtient :

$$(i\omega)^t[e^{i\omega\varphi^+} H_B^{A+}\, Y_t^{+B} + e^{i\omega\varphi^-} H_B^{A-} Y_t^{-B}]$$

$$+ (i\omega)^{t-1} e^{i\omega\varphi^+}\Big\{ H_B^{A+} Y_{t+1}^{+B} + (\partial^\alpha H_B^A)^+ \partial_\alpha Y_t^{+B} + H_B^{*A+} Y_t^{+B}$$

$$+ Z_t^B(x,x^0)\left[(\partial^0 H_B^A)^+ + \dots + (-1)^{t-1}\frac{(\partial^{(0)t} H_B^A)^+}{t!}(\Phi_\tau)^{t-1}\right]\Big\}$$

$$+ (i\omega)^{t-1} e^{i\omega\varphi^-}\Big\{ H_B^{A-} Y_{t+1}^{-B} + (\partial^\alpha H_B^A)^- \partial_\alpha Y_t^{-B} + H_B^{*A-} Y_t^{-B}$$

$$+ Z_t^B(x,-x^0)\left[(\partial^0 H_B^A)^- + \dots + \frac{(\partial^{(0)t} H_B^A)^-}{t!}(\Phi_\tau)^{t-1}\right]\Big\}$$

$$+ (i\omega)^t \int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi} H_B^A(\mathrm{grad}\,\Phi) Z_t^B(x,\tau,r)\,d\tau$$

$$+ (i\omega)^{t-1}\int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi}\big(H_B^A(\mathrm{grad}\,\Phi) Z_{t+1}^B(x,\tau,r)$$

$$+ \partial^\alpha H_B^A(\mathrm{grad}\,\Phi)(\partial_\alpha Z_t^B)(x,\tau,r) + H_B^{*A}(\mathrm{grad}\,\Phi) Z_t^B(x,\tau,r)\big)\,d\tau$$

$$+ (i\omega)^{t-2} R_{t-2}^A \,.$$

Chaque R_{t-2}^A est une série formelle du type de y^B .

On est conduit à imposer à $Y_t^{\pm B}$ les conditions :

$$H_B^{A+}(r)Y_t^{+B}(x,r) = 0$$

$$H_B^{A-}(r)Y_t^{-B}(x,r) = 0$$

qui seront réalisées en les choisissant sous la forme :

$$Y_t^{+B}(x,r) = U_t^+(x,r)d^{+B}(r)$$

$$Y_t^{-B}(x,r) = U_t^-(x,r)d^{-B}(r) .$$

$U_t^{\pm}$ sont analytiques en x,r .

On cherchera Z_t^B sous la forme :

$$Z_t^B(x,\tau,r) = V_t^+(x,\tau)d^{+B}(r) + V_t^-(x,\tau)d^{-B}(r)$$

où $V_t^{\pm}$ sont analytiques en (x,τ) et ne dépendent pas de r .

On remarque que :

$$\begin{aligned} H_B^A(\text{grad }\Phi) &= H_B^A(\pi_0+\lambda^+-\Phi_\tau,\pi_i+r\mu_i) \\ &= H_B^{A+} - \Phi_\tau(\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^t \frac{(\Phi_\tau)^t}{t!}(\partial^{(0)t}H_B^A)^+ \\ &= H_B^A(\pi_0+\lambda^-+\Phi_\tau,\pi_i+r\mu_i) \\ &= H_B^{-A} + \Phi_\tau(\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^t}{t!}(\partial^{(0)t}H_B^A)^- \quad . \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} H_B^A(\text{grad }\Phi)Z_t^B = {} & V_t^+\left[-\Phi_\tau(\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^t \frac{(\Phi_\tau)^t}{t!}(\partial^{(0)t}H_B^A)^+\right] d^{+B} \\ & + V_t^-\left[\Phi_\tau(\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^t}{t!}(\partial^{(0)t}H_B^A)^-\right] d^{-B} \end{aligned}$$

et en intégrant par partie

$$(i\omega)^t \int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi} H_B^A(\text{grad }\Phi)Z_t^B(x,\tau,r)d\tau$$

$$= (i\omega)^{t-1}\left\{ e^{i\omega\varphi^+}\left[V_t^+(x,x^0)(-(\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^t \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!} (\partial^{(0)t}H_B^A)^+\right] d^{+B}\right.$$

$$+ V_t^-(x,x^0)\left((\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^-\right) d^{-B}\Big]$$

$$-e^{i\omega\varphi^-}\Big[V_t^+(x,-x^0)\left(-(\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^t \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^+\right) d^{+B}$$

$$+ V_t^-(x,-x^0)\left((\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^-\right) d^{-B}\Big]$$

$$- \int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi}\Big[(\frac{d}{d\tau} V_t^+)(x,\tau)\left(-(\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^t \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^+\right) d^{+B}$$

$$+ (\frac{d}{d\tau} V_t^-)(x,\tau)\left((\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^-\right) d^{-B}\Big] d\tau\Big\}.$$

En regroupant les termes et en simplifiant, on a :

$$h_B^A(D)y^B = (i\omega)^{t-1} e^{i\omega\varphi^+}\Big[H_B^{A+} Y_{t+1}^{+B} + (\partial^\alpha H_B^A)^+ \partial_\alpha Y_t^{+B} + (H_B^{*A})^+ Y_t^{+B}$$

$$+ V_t^-(x,x^0)\Big((\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^-$$

$$+ (\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^{t-1} \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^+\Big) d^{-B}\Big]$$

$$+ (i\omega)^{t-1} e^{i\omega\varphi^-}\Big[H_B^{A-} Y_{t+1}^{-B} + (\partial^\alpha H_B^A)^- \partial_\alpha Y_t^{-B} + (H_B^{*A})^- Y_t^{-B}$$

$$+ V_t^+(x,-x^0)\Big((\partial^0 H_B^A)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^-$$

$$+ (\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots + (-1)^{t-1} \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t} H_B^A)^+\Big) d^{+B}\Big]$$

$$+ (i\omega)^{t-1}\int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi}\Big[H_B^A(\mathrm{grad}\ \Phi) Z_{t+1}^B(x,\tau,r) + (\partial^\alpha H_B^A)(\mathrm{grad}\ \Phi)(\partial_\alpha V_t^+)(x,\tau) d^{+B}$$

$$+ (\partial^\alpha H_B^A)(\mathrm{grad}\ \Phi)(\partial_\alpha V_t)^-(x,\tau) d^{-B} + (H_B^{*A})(\mathrm{grad}\ \Phi)\Big(V_t^+(x,\tau) d^{+B}$$

$$+ V_t^-(x,\tau) d^{-B}\Big) + (\frac{d}{d\tau} V_t^+)(x,\tau)\Big((\partial^0 H_B^A)^+ + \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{t-1}\frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t}H^A_B)^+\Big)\, d^{+B} - \left(\frac{d}{d\tau}V^-_t\right)(x,\tau)\Big((\partial^0 H^A_B)^- + \ldots +$$

$$\ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t}H^A_B)^-\Big)\, d^{-B}\Big]\, d\tau + (i\omega)^{t-2} R^A_{t-2} .$$

Le terme en $(i\omega)^{t-1}e^{i\omega\varphi^+}$ s'écrit encore :

(3)
$$H^{A+}_B Y^{+B}_{t+1} + (\partial^\alpha H^A_B)^+ d^{+B}\partial_\alpha U^+_t + (H^{*A}_B)^+ d^{+B} U^+_t$$

$$+ V^-_t(x,x^0)\Big((\partial^0 H^A_B)^- + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t}H^A_B)^-$$

$$+ (\partial^0 H^A_B)^+ + \ldots + \frac{(-1)^{t-1}}{t!}(\Phi_\tau)^{t-1}(\partial^{(0)t}H^A_B)^+\Big)\, d^{-B} .$$

Nous imposerons à U^+_t et $V^-_t(x,x^0)$ deux conditions qui nous permettront de les déterminer et par la suite d'obtenir aussi Y^{+B}_{t+1} . Soit :

(4)
$$g^+_A(r)(\partial^\alpha H^A_B)^+(r) d^{+B}(r)(\partial_\alpha U^+_t)(x,r) + g^+_A(r)(H^{*A}_B)^+(r) d^{+B}(r) U^+_t(x,r)$$

$$+ g^+_A(r)\Big((\partial^0 H^A_B)^-(r) + \ldots + (\partial^0 H^A_B)^+(r) + \ldots\Big) d^{-B}(r) V^-_t(x,x^0) = 0$$

et en $\pi, (r = 0)$:

(5)
$$g^-_A(0)\Big[(\partial^\alpha H^A_B)(\pi) d^{+B}(0)(\partial_\alpha U^+_t)(x,0) + H^{*A}_B(\pi) d^{+B}(0) U^+_t(x,0)\Big]$$

$$+ 2g^-_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi) d^{-B}(0) V^-_t(x,x^0) = 0 .$$

Or on remarque que, pour $r \neq 0$:

$$g^+_A(r) d^{-B}(r)\Big((\partial^0 H^A_B)^-(r) + \ldots + \frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t}H^A_B)^-(r)$$

$$+ (\partial^0 H^A_B)^+(r) + \ldots + (-1)^{t-1}\frac{(\Phi_\tau)^{t-1}}{t!}(\partial^{(0)t}H^A_B)^+(r)\Big)$$

$$= g^+_A(r) d^{-B}(r)\,\frac{(H^{A+}_B(r) - H^{A-}_B(r))}{\Phi_\tau}$$

$$= 0$$

et par suite cette expression est nulle pour tout r .

La première condition s'écrit donc en fait :

$$g^+_A(r)(\partial^\alpha H^A_B)^+(r) d^{+B}(r)(\partial_\alpha U^+_t)(x,r) + g^+_A(r)(H^{*A}_B)^+(r) d^{+B}(r) U^+_t(x,r) = 0$$

soit, compte tenu de la proposition IV :

$$C^{+}(r)p^{+\alpha}(r)(\partial_{\alpha}U_{t}^{+})(x,r) + g_{A}^{+}(r)\, H_{B}^{*A)+}(r)d^{+B}(r)U_{t}^{+}(x,r) = 0$$

où $C^{+}(r)$ est analytique en r et telle que $C^{+}(0) \neq 0$.

U_{t}^{+} pour chaque r est déterminé par une équation différentielle du premier ordre.

Si, comme usuellement, on suppose connu $U_{t}^{+}(0,x^{i},r)$, on détermine $U_{t}^{+}(x,r)$:

$$U_{t}^{+}(x,r) = U_{t}^{+}(0,x^{i} - \frac{p^{+i}(r)}{p^{+o}(r)}\, x^{o},r)e^{-Q(r)\frac{x^{o}}{p^{+o}(r)}} ,$$

$Q(r)$ fonction connue analytique en r .

Avec des conditions d'analyticité évidentes sur $U_{t}^{+}(0,x^{i},r)$, $U_{t}^{+}(x,r)$ est analytique en x et r dans un voisinage de 0 .

En remarquant que, d'après la proposition IV :

$$g_{A}^{-}(0)(\partial^{o}H_{B}^{A})(\pi)d^{-B}(0) = C^{-}(0)p^{-o}(0) \neq 0 ,$$

on obtient aussi $V_{t}^{-}(x,x^{o})$ en fonction des données de façon explicite ; $V_{t}^{-}(x,x^{o})$ est analytique en x dans un voisinage de 0 .

On obtient de même U_{t}^{-} et $V_{t}^{+}(x,-x^{o})$.

Nous chercherons $Z_{t+1}^{B}(x,\tau,r)$ sous la forme

$$Z_{t+1}^{B}(x,\tau,r) = V_{t+1}^{+}(x,\tau)d^{+B}(r) + V_{t+1}^{-}(x,\tau)d^{-B}(r) + T_{t+1}^{B}(x,\tau,r) .$$

Le terme intégral s'écrit alors (sous forme résumée) :

$$(i\omega)^{t-1}\int_{-x^{o}}^{x^{o}} e^{i\omega\Phi}\Big\{H_{B}^{A}(\mathrm{grad}\ \Phi)[V_{t+1}^{+}d^{+B} + V_{t+1}^{-}d^{-B}] + H_{B}^{A}(\mathrm{grad}\ \Phi)T_{t+1}^{B}$$
$$+ (\partial^{\alpha}H_{B}^{A})(\mathrm{grad}\ \Phi)d^{+B}\partial_{\alpha}V_{t}^{+} + (\partial^{\alpha}H_{B}^{A})(\mathrm{grad}\ \Phi)d^{-B}\partial_{\alpha}V_{t}^{-}$$
$$+ \frac{d}{d\tau}V_{t}^{+}d^{+B}[\ \ ] - \frac{d}{d\tau}V_{t}^{-}d^{-B}[\ \ ] + (\ \ )V_{t}^{+} + (\ \ )V_{t}^{-}\Big\}d\tau \quad .$$

Comme dans le calcul précédent de $H_{B}^{A}(\mathrm{grad}\ \Phi)[V_{t}^{+}d^{+B} + V_{t}^{-}d^{-B}]$ le terme analogue en $V_{t+1}^{\pm}$, donnera des termes en $(i\omega)^{t-2}$ que nous ajouterons à R_{t-2} . Il reste donc :

$$(6)\quad (i\omega)^{t-1}\int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi}\Big\{ H^A_B(\mathrm{grad}\ \Phi)T^B_{t+1} + (\partial^\alpha H^A_B)(\mathrm{grad}\ \Phi)d^{+B}\partial_\alpha V^+_t$$
$$+ (\partial^\alpha H^A_B)(\mathrm{grad}\ \Phi)d^{-B}\partial_\alpha V^-_t + \frac{d}{d\tau}V^+_t d^{+B}[\ ]$$
$$- \frac{d}{d\tau}V^-_t d^{-B}[\ ] + (\ )V^+_t + (\ )V^-_t\Big\}\, d\tau\ .$$

Cela nous conduit à imposer deux conditions différentielles à V^+_t et V^-_t qui nous permettront de les déterminer et par la suite d'obtenir un vecteur (T^B_{t+1}) annulant le terme intégral et régulier.

Soit :

$$(7)\quad g^+_A(0)\partial^\alpha H^A_B(\pi)d^{+B}(0)\partial_\alpha V^+_t(x,\tau) + g^+_A(0)(\partial_\alpha H^A_B)(\pi)d^{-B}(0)\partial_\alpha V^-_t(x,\tau)$$
$$+ g^+_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi)d^{+B}(0)\frac{d}{d\tau}V^+_t(x,\tau) - g^+_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi)d^{-B}(0)\frac{d}{d\tau}V^-_t(x,\tau)$$
$$+ g^+_A(0)H^{*A}_B(\pi)d^{+B}(0)V^+_t(x,\tau) + g^+_A(0)H^{*A}_B(\pi)d^{-B}(0)V^-_t(x,\tau) = 0$$

et

$$(8)\quad g^-_A(0)(\partial^\alpha H^A_B)(\pi)d^{+B}(0)\partial_\alpha V^+_t(x,\tau) + g^-_A(0)(\partial^\alpha H^A_B)(\pi)d^{-B}(0)\partial_\alpha V^-_t(x,\tau)$$
$$+ g^-_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi)d^{+B}(0)\frac{d}{d\tau}V^+_t(x,\tau) - g^-_A(0)(\partial^0 H^A_B)(\pi)d^{-B}(0)\frac{d}{d\tau}V^-_t(x,\tau)$$
$$+ g^-_A(0)H^{*A}_B(\pi)d^{+B}(0)V^+_t(x,\tau) + g^-_A(0)H^{*A}_B(\pi)d^{-B}(0)V^-_t(x,\tau) = 0\ .$$

Compte tenu des propositions précédentes, la matrice caractéristique de ce système en V^+_t, V^-_t de deux équations aux dérivées partielles est la matrice précédemment notée $\mathfrak{H}$ et on a vu que cette matrice était fortement hyperbolique. De plus, les hyperplans $x^0+\tau = 0$ et $x^0-\tau = 0$ sont caractéristiques, puisque les formes correspondantes $(1,0,\ldots,0,1)$ et $(1,0,\ldots,0,-1)$ annulent $\det \mathfrak{H}$.

Or on connaît $V^+_t(x,-x^0)$ c'est-à-dire la restriction de V^+_t à l'hyperplan $x^0+\tau = 0$ et de même la restriction de V^-_t à l'hyperplan $x^0-\tau = 0$. On obtient, par exemple, [15], en se ramenant à l'équation des ondes à trois variables d'espace, V^+_t et V^-_t comme fonctions analytiques de (x,τ), dans un voisinage de 0, en particulier pour $-x^0 \leq \tau \leq x^0$.

***

Y^{+B}_{t+1} sera cherchée sous la forme

$$Y^B_{t+1} = U^+_{t+1}d^{+B} + S^B_{t+1}\ .$$

Les conditions (4) et (5) vont permettre d'obtenir une solution particulière (S^{B}_{t+1}) de (3) analytique au voisinage de 0.

En effet (3) s'écrit sous forme abrégée :

$$H^{A+}_{B}(r)Y^{+B}_{t+1}(x,r) = F^{A}(x,r)$$

où F^{A} est analytique au voisinage de 0.

Nous allons mettre en évidence le changement de rang pour $r = 0$. On supposera qu'un indice surbarré varie de 1 à 2 : $1 \leq \bar{D} \leq 2$ et on utilisera des calculs de mineurs analogues à ceux de [12]. On rappelle qu'un indice surmonté d'un $\tilde{}$ varie de 3 à m : $3 \leq \tilde{C} \leq m$. (On convient que $\bar{D}-1$ est l'élément de $\{1,2\}$ différent de $\bar{D}$).

(3) équivaut alors à :

$$\begin{cases} H^{\tilde{C}+}_{\tilde{B}}\; Y^{+\tilde{B}}_{t+1} + H^{\tilde{C}+}_{\bar{D}}\; Y^{+\bar{D}}_{t+1} = F^{\tilde{C}} \\ H^{\bar{A}+}_{\tilde{B}}\; Y^{+\tilde{B}}_{t+1} + H^{\bar{A}+}_{\bar{D}}\; Y^{+\bar{D}}_{t+1} = F^{\bar{A}} \end{cases}$$

soit, puisque $A^{12+}_{12}(r) \neq 0$ au voisinage de 0

$$\begin{cases} Y^{+\tilde{C}}_{t+1} = \sum_{\bar{D}} \dfrac{A^{(\bar{D}-1)\tilde{C}+}_{12}}{A^{12+}_{12}}\, Y^{+\bar{D}}_{t+1} + \dfrac{A^{12\tilde{C}+}_{12\tilde{A}}F^{\tilde{A}}}{A^{12+}_{12}} \\ H^{\bar{A}+}_{\tilde{B}}\; Y^{+\tilde{B}}_{t+1} + H^{\bar{A}+}_{\bar{D}}\; Y^{+\bar{D}}_{t+1} = F^{\bar{A}} \end{cases}$$

et en remplaçant dans la deuxième ligne $Y^{+\tilde{C}}_{t+1}$ à l'aide de la première ligne et en effectuant des calculs de mineurs :

$$(9) \qquad - A^{1+}_{2}\; Y^{+2}_{t+1} + A^{2+}_{2}\; Y^{+1}_{t+1} - A^{12+}_{B2}\; F^{B} = 0$$

$$(10) \qquad A^{1+}_{1}\; Y^{2}_{t+1} - A^{2+}_{1}\; Y^{+1}_{t+1} - A^{12+}_{1B}F^{B} = 0$$

$$(11) \qquad Y^{\tilde{C}}_{t+1} = \sum_{\bar{D}} \frac{A^{(\bar{D}-1)\,\tilde{C}}_{12}}{A^{12+}_{12}}\, Y^{+\bar{D}}_{t+1} + \frac{A^{12\tilde{C}+}_{12\tilde{A}}F^{\tilde{A}}}{A^{12+}_{12}} \;.$$

On montrera d'abord que la condition $g^{+}_{A}(r)F^{A}(x,r) = 0$ implique que (9) et (10) sont proportionnelles pour tout r. On fera les calculs dans le cas du choix 1) pour d^{+}, d^{-}, g^{+}, g^{-} ; les calculs dans les autres cas sont les mêmes aux notations près.

i) On montre que :

$$(g^+_A F^A = 0) \text{ implique : } ((A^{2+}_1 A^{12+}_{B2} + A^{2+}_2 A^{12+}_{1B})F^B = 0) .$$

En effet, pour $r \neq 0$:

$$(g^+_A F^A = 0) \text{ entraîne } (A^{2+}_1 F^1 + A^{2+}_2 F^2 + A^{2+}_{\tilde{C}} F^{\tilde{C}} = 0),$$

soit :

$$A^{12+}_{12} A^{2+}_1 F^1 + A^{12+}_{12} A^{2+}_2 F^2 + A^{12+}_{12} A^{2+}_{\tilde{C}} F^{\tilde{C}} = 0 .$$

De l'identité (cf. [2] p. 115) :

$$A^2_{\tilde{C}} A^{12}_{12} = A^2_1 A^{12}_{\tilde{C}2} + A^2_2 A^{12}_{1\tilde{C}} ,$$

on déduit :

$$A^{2+}_1 A^{12+}_{B2} F^B + A^{2+}_2 A^{12+}_{1B} F^B = 0 .$$

ii) On montre que l'égalité obtenue implique que (9) et (10) sont compatibles, ou plus précisément que ces deux équations se réduisent à (9).

En effet, si $A^{2+}_1 \not\equiv 0$, (9) s'écrit :

$$A^{2+}_1 (-A^{1+}_2 Y^{+2}_{t+1} + A^{2+}_2 Y^{+1}_{t+1} - A^{12+}_{B2} F^B) = 0$$

soit [2] :

$$A^{2+}_2 (A^{1+}_1 Y^{+2}_{t+1} - A^{2+}_1 Y^{+1}_{t+1}) + A^{2+}_1 A^{12+}_{B2} F^B = 0$$

soit :

(10) $$A^{1+}_1 Y^{+2}_{t+1} - A^{2+}_1 Y^{+1}_{t+1} - A^{12+}_{1B} F^B = 0 .$$

Si $A^{2+}_1 \equiv 0$, on a aussi $A^{1+}_1 \equiv 0$ et le résultat est évident.

iii) Il reste à trouver une solution particulière analytique au voisinage de 0 de :

(9) $$-A^{1+}_2 Y^{+2}_{t+1} + A^{2+}_2 Y^{+1}_{t+1} - A^{12+}_{B2} F^B = 0 .$$

On sait que :

$$g^+_A(0) F^A(0) = 0$$

et aussi (2e condition de compatibilité)

$$g^-_A(0) F^A(0) = 0 .$$

($F^A(0)$ signifie $F^A(x,0)$.)

Mais ces conditions s'écrivent aussi bien :

$$\begin{cases} \gamma_A^+ F^A(0) = 0 \\ \gamma_A^- F^A(0) = 0 \end{cases}$$

et $\gamma_A^+ F^A(0) = 0$, s'écrit d'après la définition de γ_A^+ du § 1 :

$$A^{12}_{B2}(\pi) F^B(0) = 0 \ .$$

Comme $A_2^{2+}(r)$ a $r = 0$ comme racine simple, on en déduit sans difficulté une solution analytique particulière de (9) (11).

On se propose enfin de choisir (T^B_{t+1}) analytique et tel que la fonction à intégrer dans (6) soit nulle pour $-x^0 \leqq \tau \leqq x^0$. On est donc conduit à étudier un système de la forme :

(12) $$H^A_B(\text{grad } \Phi) Z^B_{t+1}(x,\tau,r) = G^A(x,\tau,r)$$

où G^A est analytique en (x,τ,r) au voisinage de 0 .

Comme précédemment ce système s'écrit encore :

$$\begin{cases} (13) \quad -A_2^1(\text{grad } \Phi) Z^2_{t+1} + A_2^2(\text{grad } \Phi) Z^1_{t+1} - A^{12}_{B2}(\text{grad } \Phi) G^B = 0 \\ (14) \quad A_1^1(\text{grad } \Phi) Z^2_{t+1} - A_1^2(\text{grad } \Phi) Z^1_{t+1} - A^{12}_{1B}(\text{grad } \Phi) G^B = 0 \\ (15) \quad Z^{\tilde{C}}_{t+1} = \sum_{\bar{D}} \dfrac{A_{12}^{(\bar{D}-\lambda)\,\tilde{C}}(\text{grad } \Phi)}{A^{12}_{12}(\text{grad } \Phi)} Y^{\bar{D}}_{t+1} + \dfrac{A^{12\tilde{C}}_{12\tilde{A}}(\text{grad } \Phi)}{A^{12}_{12}(\text{grad } \Phi)} G^{\tilde{A}} = 0 \ . \end{cases}$$

Il faut trouver une solution particulière analytique au voisinage de 0.
On sait que ($G^A(0)$ signifiant $G^A(x,\tau,0)$) :

$$\begin{cases} (7) \quad g_A^+(0) G^A(0) = 0 \\ (8) \quad g_A^-(0) G^A(0) = 0 \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} (16) \quad A^{12}_{B2}(\pi) G^B(0) = 0 \\ (17) \quad A^{12}_{1B}(\pi) G^B(0) = 0 \end{cases}$$

On remarque que :

$$H(\text{grad }\Phi)(0) = H(\pi_o + \frac{\lambda^+(0)+\lambda^-(0)}{2}, \pi_i) = 0 ,$$

ainsi que :

$$\frac{dH(\text{grad }\Phi)}{dr}(0) = 0$$

et que

$$\frac{d^2H(\text{grad }\Phi)}{dr^2}(0) = K_\pi(\frac{\mu^+ + \mu^-}{2}, \mu_i) \neq 0 ,$$

puisque $\mu^+ \neq \mu^-$.

On a alors pour $r \neq 0$, par les formules de Cramer une solution particulière analytique :

$$T^1_{t+1} = \frac{\det\begin{pmatrix} A^{1\,2}_{B\,2}(\text{grad }\Phi)G^B & -A^1_2(\text{grad }\Phi) \\ A^{1\,2}_{1\,B}(\text{grad }\Phi)G^B & A^1_1(\text{grad }\Phi)\end{pmatrix}}{A^{1\,2}_{1\,2}(\text{grad }\Phi).H(\text{grad }\Phi)}$$

et une formule analogue pour T^2_{t+1} .

On a encore :

$$T^1_{t+1} = \frac{\det\begin{pmatrix} \frac{A^{1\,2}_{B\,2}(\text{grad }\Phi)G^B}{r} & \frac{-A^1_2(\text{grad }\Phi)}{r} \\ \frac{A^{1\,2}_{1\,B}(\text{grad }\Phi)G^B}{r} & \frac{A^1_1(\text{grad }\Phi)}{r}\end{pmatrix}}{A^{1\,2}_{1\,2}(\text{grad }\Phi).\frac{H(\text{grad }\Phi)}{r^2}}$$

et la formule analogue, qui montrent, puisque l'on a (16), (17), que T^B_{t+1} est aussi analytique à l'origine par rapport à toutes les variables. On a donc bien annulé les termes en $(i\omega)^t$ et $(i\omega)^{\nu-1}$ de $h(D)y$. On détermine de même les Y^B_p et Z^B_p et on obtient ainsi une solution asymptotique. On peut en déduire des solutions approchées de tous ordres [5].

Enfin on peut résoudre formellement le problème de Cauchy à données singulières sur un hyperplan dans $x^o = 0$, variant avec r, comme usuellement (cf. [14]).

Remarque.

1) Pour $r = 0$, le développement obtenu s'écrit :

$$y^B = e^{i\omega\varphi}\Big\{[(U_t^+(x,0) + \int_{-x^0}^{x^0} V_t^+(x,\tau)d\tau)d^{+B}(0)$$

$$+ (U_t^-(x,0) + \int_{-x^0}^{x^0} V_t^-(x,\tau)d\tau)d^{-B}(0)] + \frac{1}{\omega}[\ldots]\Big\} \quad ;$$

on vérifie que :

$$U_t^+(x,0) + \int_{-x^0}^{x^0} V_t^+(x,\tau)d\tau$$

et

$$U_t^-(x,0) + \int_{-x^0}^{x^0} V_t^-(x,\tau)d\tau$$

vérifient des équations équivalentes aux équations de propagation déterminées au § 1.

Comme $U_t^+(x,0)$ et $U_t^-(x,0)$ sont déterminées par les équations limites des équations usuelles le long de bicaractéristiques, on voit que, pour une direction d'hyperplan singulière s'ajoutent aux termes usuels les deux termes intégraux ci-dessus "se propageant" en général dans un cône.

2) Pour $r \neq 0$, par intégration par parties, utilisant $\Phi_\tau \neq 0$, on obtient :

$$y^B = e^{i\omega\varphi^+}\left[Y_t^{+B}(x,r) + \frac{1}{i\omega}\left(Y_{t+1}^{+B}(x,r) + \frac{Z_t^B(x,x^0,r)}{\Phi_\tau}\right) + \frac{1}{(i\omega)^2}(\ldots)\right]$$

$$+ e^{i\omega\varphi^-}\left[Y_t^{-B}(x,r) + \frac{1}{i\omega}\left(Y_{t+1}^{-B}(x,r) - \frac{Z_t^B(x,-x^0,r)}{\Phi_\tau}\right) + \frac{1}{(i\omega)^2}(\ldots)\right]$$

Les termes obtenus vérifient les équations de propagation usuelle le long des bicaractéristiques.

3) Ainsi, pour $t = 1$ (par exemple), la solution approchée à l'ordre 0

$$y^B(x,r) = e^{i\omega\varphi^+}\Big(Y_1^{+B}(x,r) + \frac{Y_2^{+B}(x,r)}{i\omega}\Big) + e^{i\omega\varphi^-}\Big(Y_1^{-B}(x,r) + \frac{Y_2^{-B}(x,r)}{i\omega}\Big)$$

$$+ \int_{-x^0}^{x^0} e^{i\omega\Phi}\Big(Z_1^B(x,\tau,r) + \frac{Z_2^B}{i\omega}(x,\tau,r)\Big)d\tau$$

pour $r = 0$ donne une solution approchée à l'ordre 0 par un développement usuel

$$e^{i\omega\varphi}\left(y_1^{B} + \frac{y_2^{B}}{i\omega}\right)$$

et pour $r \neq 0$, redéveloppée en $\frac{1}{i\omega}$, sa partie approchée d'ordre 1 donne les développements usuels d'ordre 0 le long des deux bicaractéristiques.

Remarque

Dans tout ce qui précède, on a supposé $(h_B^A(D))$ à coefficients constants ; par des modifications faciles, on étend les résultats aux cas où seule la partie principale $(H_B^A(D))$ est à coefficients constants ; cela tient au fait que les équations de propagation obtenues, qui deviennent à coefficients non principaux variables, sont, en dimension réduite, à caractéristiques simples et hyperboliques.

Remarque

Les calculs précédents permettent aussi de déterminer des solutions asymptotiques dont les coefficients $Y_p^{\pm}$ soient $\mathscr{C}^{\infty}$ en (x,r) pour r assez petit, ainsi que les coefficients Z_p pour $-x^0 \leq \tau \leq x^0$, r petit; cela résulte encore du fait que les systèmes qui déterminent les $V_p^{\pm}$ sont, en dimension réduite, à caractéristiques simples et hyperboliques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH, BOTT, GÅRDING, Acta Mathematica, t. 124, 1970, p. 109-189.

[2] BOURBAKI, Algèbre multilinéaire, Hermann, Paris, 1958.

[3] CHAILLOU, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 268, 1969, p. 391-94.

[4] CHAILLOU, Thèse Sc. Math. Paris (1969), à paraître dans Memorial Sc. Math.

[5] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, J. Math. Pures et Appliquées, t. 48, 1969, p. 117-158.

[6] KASAHARA YAMAGUTI, Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, series A, vol. XXXIII, Mathematic, n° 1, 1960.

[7] LUDWIG, Singularities of the Riemann function, Courant Institute of Math., Report n° 9351, New York, 1961.

[8] LUDWIG et GRANOFF, Journal of Maths. Analysis and applications, t. 21, 1968, p. 556-574.

[9] RIESZ et NAGY, Leçon d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1953.

[10] STRANG, J. Math. Kyoto Univ. 63, 1967, p. 397-417.

[11] SVENSSON, Ark. Math. 8, 17, 1970, p. 145-162.

[12] VAILLANT, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 2, 1965, p. 225-311.

[13] VAILLANT, J. Maths. Pures et Appliquées, t. 47, 1968, p. 1-40.

[14] VAILLANT, J. Maths. Pures et Appliquées, t. 50, 1971, p. 25-51.

[15] COURANT-HILBERT, Methods of Mathematical Physics, vol. II, Interscience publishers, New York, 1965.

[16] J. LERAY, Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (Convegno internazionale Metodi valutativi nelle fisica matamatica Accad. naz. dei Lincei, Roma, 1972), Sém. sur les éq. aux dérivées part., Collège de France, I, 1972-1973.

[17] J. VAILLANT, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 276, 1973, p. 191-194.

[18] T. KANO, C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, t. 274, 1972, p. 1116-1119.

[19] R. HERSH et Y.W. CHEN, Journal of Math. and Mechanics, vol. 17, n° 5, 1967, p. 449-59.