

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LUC TARTAR

Un théorème de trace non linéaire

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 3, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971___A3_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE TRACE NON LINÉAIRE

par Luc TARTAR

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Q désignera le cylindre $\Omega \times]0, \infty[$. On considère l'ensemble des fonctions $u(x, t)$ définies dans Q et vérifiant :

$$(1) \quad u^3(x, t), \quad u^2(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in L^2(Q)$$

c'est-à-dire

$$(1 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^3 \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)) \end{array} \right. .$$

Le problème considéré ici est de définir la trace de u sur l'hyperplan $t = 0$, et de caractériser l'ensemble parcouru par la trace $u(0)$ quand u parcourt l'ensemble des u vérifiant (1).

Avant d'énoncer le théorème, il est nécessaire de rappeler quelques résultats d'interpolation linéaire et non linéaire.

Rappels :

Si $A_0 \subset A_1$ sont deux espaces de Hilbert, on note $[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}$ l'espace parcouru par $u(0)$ quand u parcourt l'espace W des fonctions vérifiant

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, \infty; A_0) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; A_1) \end{array} \right. .$$

On munit W de la norme

$$(3) \quad \|u\|_W = \left(\|u\|_{L^2(0, \infty; A_0)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; A_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et $[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}$ de la norme quotient qui en fait un espace de Hilbert. Naturellement

$$(4) \quad A_0 \subset [A_0, A_1]_{\frac{1}{2}} \subset A_1 .$$

Exemple 1 :

$$A_0 = H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$A_1 = L^2(\Omega) .$$

Alors $[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}$ est noté $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ et, si Ω est régulier, on peut montrer qu'il coïncide avec l'espace de $u \in L^2(\Omega)$ tels que

$$(5) \quad \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+1}} dx dy < + \infty .$$

Exemple 2 :

Si X est un espace localement compact muni d'une mesure de radon positive μ on peut définir les espaces de Hilbert $L^2(X, \mu; A_0)$ espaces des (classes d')applications μ -mesurables de X dans A_0 dont la norme appartient à $L^2(X, \mu)$.

(On n'utilisera plus loin que le cas où $X = \mathbb{Z}$ muni d'une mesure discrète).
Alors on a

$$(7) \quad [L^2(X, \mu; A_0), L^2(X, \mu; A_1)]_{\frac{1}{2}} = L^2(X, \mu; [A_0, A_1]_{\frac{1}{2}})$$

Les espaces ainsi définis ont la propriété d'interpolation non linéaire suivante:

PROPOSITION 1. Si T est une application non linéaire de A_1 dans B_1 qui applique aussi A_0 dans B_0 et qui vérifie

$$(8) \quad \begin{cases} \|Ta_0\|_{B_0} \leq c \|a_0\|_{A_0} & \forall a_0 \in A_0 \\ \|Ta_1 - Tb_1\|_{B_1} \leq c \|a_1 - b_1\|_{A_1} & \forall a_1, b_1 \in A_1 \end{cases}$$

Alors T applique $[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}$ dans $[B_0, B_1]_{\frac{1}{2}}$ avec

$$(9) \quad \|Ta\|_{[B_0, B_1]_{\frac{1}{2}}} \leq c \|a\|_{[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}}$$

Nous aurons encore besoin d'un résultat très simple concernant $[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}$.

PROPOSITION 2. Si u vérifie (2) et $u(0) = a$, alors on a :

$$(10) \quad \|a\|_{[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}} \leq c \|u\|_{L^2(0, \infty; A_0)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; A_1)}^{\frac{1}{2}};$$

si $a \in [A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}$ et $\lambda > 0$, alors on peut trouver u vérifiant (2) et $u(0) = a$ avec

$$(11) \quad \begin{cases} \|u\|_{L^2(0, \infty; A_0)} \leq c \lambda \|a\|_{[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}} \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; A_1)} \leq c \lambda^{-1} \|a\|_{[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

THÉORÈME. Soit u vérifiant (1 bis) alors $u(0) = a$ vérifie

$$(12) \quad |a|a \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

et

$$(13) \quad \| |a|a \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq c \|u^3\|_{L^2(0, \infty; H^1(\Omega))}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))}^{\frac{1}{2}}$$

Soit a vérifiant (12), Alors il existe u satisfaisant (1 bis) et $u(0) = a$.

On peut choisir u de manière que

$$(14) \quad \begin{cases} \|u^3\|_{L^2(0, \infty; H^1(\Omega))} \leq c \| |a| a \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} , \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} \leq c \| |a| a \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} . \end{cases}$$

La démonstration est assez longue et sera divisée en plusieurs étapes.

PREMIÈRE PARTIE

On se donne u vérifiant (1 bis) et on veut caractériser $u(0) = a$.

1ère étape

On peut se ramener au cas $u \geq 0$.

En effet l'application $u \rightarrow u_+$ est lipschitzienne et donc

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u_+ \right| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| .$$

De même

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} u_+^3 \right| \leq \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u^3 \right|$$

et par conséquent u_+ vérifie (1 bis). Si on démontre le théorème pour u_+ on aura montré que $|a_+| a_+ = a_+^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. De même pour u_- et donc $a_-^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Comme $|a| = a_+^2 - a_-^2$ on aura le théorème pour u . De plus ces manipulations donnent aussi l'inégalité (13) si on l'a démontrée pour u_+ .

2ème étape

On suppose maintenant $u \geq 0$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ définissons la fonction h_k par

$$(15) \quad \begin{cases} h_k \text{ linéaire par morceaux, } h_k(0) = h_k(2^k) = h_k(2^{k+3}) = 0 , \\ h_k(2^{k+1}) = 2^{k+1} ; h_k(2^{k+2}) = 2^{k+2} . \end{cases}$$

On a

$$(16) \quad \begin{cases} |h_k'(t)| \leq 2 \text{ et } h_k(t) \leq 2^{k+2} , \\ \sigma = \sup_{k \in \mathbb{Z}} h_k(\sigma) \text{ si } \sigma \geq 0 . \end{cases}$$

On pose

$$(17) \quad v_k(x, t) = h_k^2(u(x, t)) .$$

Alors, d'après (16), on a

$$(18) \quad u^2(x, 0) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} v_k(x, 0) .$$

Il s'agit d'évaluer $\|v_k(0)\|_{H^{\frac{1}{2}}}$

$$\left| \frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t) \right| = 2 |h_k(u(x,t))| |h'_k(u(x,t))| \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|$$

Par conséquent

$$\left| \frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t) \right| \leq \begin{cases} 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 2 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| & \text{si } u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}] , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx \leq 2^{2k+8} \int_{X_k} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 dx ,$$

l'intégrale étant étendue aux points x tels que $u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}]$.

Comme $X_k \cap X_{k+3} = \emptyset$, on peut sommer en k , après avoir multiplié par 2^{-2k} .
On obtient

$$\sum_k 2^{-2k} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx \leq 2^8 \cdot 3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx .$$

On peut ensuite intégrer en t .

En résumé, on a

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_k}{\partial t} \in L^{\infty}(0, \infty; L^2(\Omega)) , \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-2k} \left\| \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2)}^2 \leq c \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2)}^2 , \end{cases}$$

$$|v_k(x,t)| \leq \begin{cases} 2^{k+2} |u(x,t)| & \text{si } u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}] , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

mais si $u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}]$ on a $2^{k+2} |u(x,t)| \leq |u^3(x,t)|^{2^{-k+2}}$.

De même

$$\left| \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x,t) \right| \leq \begin{cases} 4 \cdot 2^{k+2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right| & \text{si } u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}] , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si $u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}]$ on a $4 \cdot 2^{k+2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right| \leq |3u^2(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)|^{\frac{4}{3}} 2^{-k+2}$.

Alors comme pour $\frac{\partial v_k}{\partial t}$ on déduit

$$(20) \quad \begin{cases} v_k \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)) , \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2k} \|v_k\|_{L^2(0, \infty; H^1(\Omega))}^2 \leq c \|u^3\|_{L^2(0, \infty; H^1(\Omega))}^2 , \end{cases}$$

(19) et (20) entraînent que $v_k(0) \in H^{\frac{1}{2}}$ et

$$\|v_k(0)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \leq c \|v_k\|_{L^2(0, \infty; H^1)} \left\| \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2)} .$$

D'où

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_k(0) \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) , \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v_k(0)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 \leq c \|u^3\|_{L^2(0, \infty; H^1)} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2)} . \end{array} \right.$$

Alors (13) sera conséquence de (18) $u^2(0) = \sup_k v_k(0)$ et du lemme suivant.

3ème étage

LEMME 1. Si $a_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 < +\infty$. Alors

$$a = \sup_k a_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \quad \text{et} \quad \|a\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 .$$

Démonstration. On considère l'application $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \sup a_k$. Il est facile de voir que si $\sum \|a_k\|_{L^2}^2 < +\infty$ alors $\sup a_k \in L^2$ et que si $\sum \|a_k\|_{H^1}^2 < +\infty$ alors $\sup a_k \in H^1$.

Plus précisément \sup envoie $A_0 = \ell^2(H^1)$ dans H^1 et $A_1 = \ell^2(L^2)$ dans L^2 . Utilisant le fait que $|\sup a_k - \sup b_k| \leq \sup |a_k - b_k|$ on voit que l'application \sup vérifie les conditions de la proposition 1 et donc envoie $[\ell^2(A_0), \ell^2(A_1)]_{\frac{1}{2}}$ c'est-à-dire $\ell^2(H^{\frac{1}{2}})$ dans $[A_0, A_1]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}$, d'où le lemme.

DEUXIÈME PARTIE

On se donne a vérifiant $|a|_a \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

1ère étape

Il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème dans le cas où a est ≥ 0 .

En effet, si $|a|_a \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, a_+ vérifie $a_+^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (c'est une conséquence de la proposition 1 et du fait que l'application $\varphi \rightarrow \varphi_+$ envoie $H^1(\Omega)$ dans lui-même et est une contraction sur $L^2(\Omega)$).

Alors on aura :

$$a_+ = u(0) \quad \text{avec } u \text{ vérifiant (1 bis) et (14) et } u \geq 0 ,$$

$$a_- = v(0) \quad \text{avec } v \text{ vérifiant (1 bis) et (14) et } v \geq 0 .$$

Alors on aura :

$$a = w(0) \quad \text{avec } w \text{ vérifiant (1 bis) et (14) ,}$$

où w est définie ci-après

$$w = F(u, v) \quad F \text{ définie dans le quadrant } u \geq 0, v \geq 0 :$$

$$(22) \quad F(u, v) = \begin{cases} (u^3 + v^3)^{1/3} & \text{si } v \leq \frac{u}{2}, \\ -(u^3 + v^3)^{1/3} & \text{si } v \geq 2u, \\ \text{linéaire} & \text{si } \frac{u}{2} \leq v \leq 2u. \end{cases}$$

Alors on a :

$$(23) \quad \begin{cases} F(u, 0) = u \quad ; \quad F(0, v) = -v, \\ \left| \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right| \leq c, \\ \left| \frac{F^2}{u^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right| + \left| \frac{F^2}{v^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right| \leq c. \end{cases}$$

Ces propriétés entraînent que si u et v vérifient (1 bis) et (14) ainsi que $u \geq 0, v \geq 0$, alors w vérifie (1 bis) et (14).

2ème étape

On suppose $a \geq 0$ et on cherche $u \geq 0$ vérifiant (14).

On pose

$$(24) \quad a_{1k} = h_{1k}(a) = h_{1k}(\sqrt{a^2}).$$

On a

$$(25) \quad a_{1k} \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2k} \|a_{1k}\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \leq c \|a^2\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2.$$

La démonstration de (25) fait l'objet de la troisième étape.

On a :

$$0 \leq a_{1k} \leq 2^{k+2} \quad \text{par formation.}$$

Comme $a_{1k} \in H^{\frac{1}{2}}$ on peut le relever par une fonction u_{1k} vérifiant (cf. Proposition 2)

$$(26) \quad \begin{cases} \|u_{1k}\|_{L^2(0, \infty; H^1)} \leq c 2^{-k} \|a_{1k}\|_{H^{\frac{1}{2}}}, \\ \left\| \frac{\partial u_{1k}}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2)} \leq c 2^k \|a_{1k}\|_{H^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Comme $0 \leq a \leq 2^{k+2}$ on peut tronquer u_{1k} à 0 et 2^{k+2} (ce qui ne change pas la nature des inégalités (26))

$$(27) \quad 0 \leq u_{1k} \leq 2^{k+2}.$$

Alors $u_k^3 \equiv 2^{2k+4} u_k$ et donc $\|u_k^3\|_{L^2(0, \infty; H^1)} \equiv c 2^k \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}$.

De même

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} u_k^3 \right| \equiv 3 \cdot 2^{2k+4} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right| ,$$

et donc on a

$$(28) \quad \|u_k^3\|_{L^2(0, T; H^1)} \equiv c \cdot 2^k \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

On pose alors

$$(29) \quad u = \sup_k u_k .$$

et donc

$$u^3 = \sup_k u_k^3 .$$

Comme $\sum_k 2^{2k} \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2$ on obtient, comme au lemme 1, $u^3 \in L^2(0, \infty; H^1)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; L^2)$ et

$$(30) \quad \|u^3\|_{L^2(0, \infty; H^1)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \infty; L^2)}^2 \equiv c \sum_k 2^{2k} \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \equiv c \|a^2\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 .$$

3ème étape

LEMME 2. Si $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ et $b_k = h_k(\sqrt{b_+})$ alors $b_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2k} \|b_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \equiv c \|b\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 .$$

Alors (25) est tout simplement le lemme 2 appliqué à $b = a^2$.

Démonstration. Désignons par $\tilde{\mathcal{L}}^2(Y)$ l'ensemble des suites $y_k (k \in \mathbb{Z})$ de Y telles que $\sum_k 2^{2k} \|a_k\|_Y^2 < +\infty$.

Soit $b \in L^2(\Omega)$ alors $h_k(\sqrt{b_+}(x)) \equiv \begin{cases} \sqrt{b_+(x)} & \text{si } b(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}] , \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$

mais si $b(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}]$ on a $\sqrt{b_+}(x) \equiv \frac{|b(x)|}{2^k}$. Par conséquent si $b \in L^2(\Omega)$, on a

$$(h_k(\sqrt{b_+}))_{k \in \mathbb{Z}} \in \tilde{\mathcal{L}}^2(L^2(\Omega)) = A_1 \quad \text{et} \quad \|h_k(\sqrt{b_+})\|_{A_1} \equiv c \|b\|_{L^2} .$$

Si b et $c \in L^2(\Omega)$ alors $|h_k(\sqrt{b_+}(x)) - h_k(\sqrt{c_+}(x))| \equiv 2 |\sqrt{b_+(x)} - \sqrt{c_+(x)}|$ si $b(x)$ ou $c(x)$ appartient à l'intervalle $[2^{2k}, 2^{2k+6}]$. Mais

$$|\sqrt{b_+} - \sqrt{c_+}| = \frac{|b_+ - c_+|}{\sqrt{b_+} + \sqrt{c_+}} \equiv \frac{1}{2^k} |b_+ - c_+| ,$$

car $\sqrt{b_+} + \sqrt{c_+} \cong 2^k$. Donc on a

$$|h_k(\sqrt{b_+}) - h_k(\sqrt{c_+})| \cong \begin{cases} 2 \cdot 2^{-k} |b-c|, & \text{si } b(x) \text{ ou } c(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}] , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Par conséquent

$$\|h_k(\sqrt{b_+}) - h_k(\sqrt{c_+})\|_{A_1} \cong c \|b-c\|_{L^2} .$$

Soit $b \in H^1(\Omega)$ alors

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} (h_k(\sqrt{b_+}(x))) \right| \cong |h'_k(\sqrt{b_+}(x))| \left| \frac{\partial b}{\partial x_i}(x) \right| \frac{1}{\sqrt{b_+}(x)} \quad \text{si } b \cong 0$$

donc

$$\cong 2 \cdot 2^{-k} \left| \frac{\partial b}{\partial x_i}(x) \right| \quad \text{si } b(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}] .$$

Donc si $b \in H^1(\Omega)$, on a

$$(h_k(\sqrt{b_+}))_{k \in \mathbb{Z}} \in \tilde{\ell}^2(H^1(\Omega)) = A_0 \quad \text{avec} \quad \|h_k(\sqrt{b_+})\|_{A_0} \cong c \|b\|_{H^1} .$$

Alors la proposition 1 et l'exemple 2 entraînent que si $b \in H^{\frac{1}{2}}$ alors $h_k(\sqrt{b_+}) \in \tilde{\ell}^2(H^{\frac{1}{2}})$ c'est-à-dire le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

Pour l'interpolation linéaire :

J.L. LIONS-J. PÉREZ. Sur une classe d'espaces d'interpolation. I.H.E.S., Publ. Math. 19 (1964), p. 5-68.

J.L. LIONS-E. MAGENES. Problème aux limites non homogènes et applications. Dunod Paris 1968, vol. 1.

Pour l'interpolation non linéaire :

J.L. LIONS. Some remarks on variational inequalities, International Conference on Functional Analysis, Tokyo, avril 1969.

Pour d'autres applications :

L. TARTAR. C.R.A.S. t. 270, pp. 1729-31, 1970.
C.R.A.S. t. 271, pp. 789-91, 1970
Thèse, Paris, 1971.