

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. S. WIGHTMAN

**Exposé de la thèse de Speer sur la renormalisation, l'interpolation,
et la sommation des intégrales de Feynman**

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1969), p. 31-46

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969__3_31_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ DE LA THÈSE DE SPEER SUR LA RENORMALISATION,
L'INTERPOLATION, ET LA SOMMATION DES INTÉGRALES DE FEYNMAN

par

A.S. WIGHTMAN*

(I.H.E.S., Bures-sur-Yvette)

La thèse de Speer contient quatre résultats principaux :

- a) Démonstration de l'équivalence des opérations R de Bogoliubov-Parasink-Hopp à l'addition de contre-termes au Lagrangien d'interaction.
- b) Construction des opérations R par une méthode analytique (cette partie est déjà publiée au Jour. Math. Phys., 9 (1968) 1404-1410.)
- c) Introduction des intégrales de Feynman généralisées interpolant toutes les intégrales ordinaires d'un ordre donné.
- d) Construction d'une intégrale sommant toutes les intégrales de Feynman d'un ordre donné.

Je voudrais commencer en donnant une idée générale de ces résultats, et des difficultés que Speer a domptées. Ensuite, j'énoncerai quelques-uns de ses théorèmes en détail. Puisque a) est un théorème technique et folklorique très compliqué, même à énoncer, je considère d'abord b), c), d).

La méthode Riemann-Liouville-Riesz en théorie quantique des champs.

Je rappelle que Riemann et Liouville ont étudié l'intégrale

$$(1) \quad \int_0^x (x-y)^{\lambda-1} f(y) dy, \quad f \in C^\infty,$$

et ont trouvé qu'elle est fonction méromorphe de λ , avec des pôles simples à $\lambda = -n$, n entier positif. Un tel comportement est analogue à celui de $[\Gamma(\lambda)]^{-1}$. Ceci suggère l'introduction de

$$(2) \quad (I^\lambda f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-y)^{\lambda-1} f(y) dy.$$

Alors,

$$(3) \quad (I^{-n} f)(x) = f^{(n)}(x)$$

et $I^\lambda f$ donne une définition de la dérivée fractionnaire d'ordre $-\lambda$. Il est clair qu'en général

*) en congé à l'Université de Princeton, U.S.A.

$$(4) \quad \frac{d}{dx} (I^\lambda f) = I^{\lambda-1} f .$$

Je rappelle aussi comment H. Riesz a généralisé cette opération pour construire une solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Il a démontré que

$$(5) \quad (I^\lambda f)(x) = \frac{1}{H(\lambda)} \int_{x-y \in \bar{V}_+} [(x-y)^2]^{\frac{\lambda-4}{2}} f(y) dy$$

est une fonction entière de λ sous des hypothèses convenables sur f . $(x)^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2$, \bar{V}_+ est le cône $(x)^2 \geq 0$, $x^0 > 0$ et l'intégration est sur l'espace-temps de dimension quatre.

$$(6) \quad H(\lambda) = 2^{\lambda-1} \pi \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)$$

est choisi tel que

$$(7) \quad I^0 f = f, \square I^{\lambda+2} = I^\lambda .$$

Ainsi $g = I^2 f$ donne une solution de l'équation

$$(8) \quad \square g = f .$$

Les physiciens de Lund, à l'époque de l'après-guerre, sont tombés sur l'idée d'employer la méthode de Riesz pour rendre "finies" les fameuses divergences de la théorie quantique des champs (Gustafson, Nilsson). Prenant comme guides les résultats obtenus par Fremberg dans la théorie classique de l'électron de Dirac, ils cherchaient une méthode pour rendre finie l'énergie d'interaction de l'électron. Ils n'ont pas réussi sauf par des expédients extrêmes ; les divergences logarithmiques persistaient. Dans l'intervalle, la théorie de la renormalisation dans sa forme crue apparaissait, et, par la suite, de nouveaux auteurs, à Lund (Källén, Karlson) regardaient la méthode de Riesz comme technique auxiliaire dans la théorie conventionnelle de la renormalisation des fonctions de Green. (La méthode réussit ; c'est un problème différent !)

Mais, l'idée que la méthode de Riesz doit donner toute la théorie de la renormalisation est intarissable. Presque quinze ans plus tard, la théorie des distributions étant devenue bien connue, Bollini, Grambiagi et Dominguez l'ont proposée encore une fois. L'exposition est plus élégante ; on pourrait faire appel au grand traité de Guelfand-Naumarck, où se trouvent les formules requises. Le problème des corrections radiatives aux ordres supérieurs qui occupe Karlson n'était pas touché par Bollini, Grambiagi et Dominguez. On verra que ce problème est non-trivial.

Voici l'essentiel du problème pour le cas le plus simple traité par Bollini, Grambiagi et Dominguez. Considérons la solution élémentaire $\rightarrow_{\mathbb{F}}$ de Feynman de

l'équation d'ondes à masse

$$(9) \quad (\square + m^2) \Delta_{\mathbb{F}}(x) = \delta(x) ,$$

$\square = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2$, $m > 0$, δ est la distribution de Dirac pour l'espace-temps de dimension $s+1$.

$\Delta_{\mathbb{F}}$ est défini par

$$(10) \quad \Delta_{\mathbb{F}}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (2\pi)^{-(s+1)} \int [-p^2 + m^2 - i\varepsilon]^{-1} \exp[-ip \cdot x] d^{s+1} p ,$$

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = (p^0)^2 - \sum_{j=1}^s (p^j)^2 ,$$

$$p \cdot x = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} = p^0 x^0 - \sum_{j=1}^s p^j x^j .$$

Problème. Donner un sens à la partie finie de $[\Delta_{\mathbb{F}}(x)]^2$.

En remplaçant la distribution

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [-p^2 + m^2 - i\varepsilon]^{-1}$$

dans (10) par

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [-p^2 + m^2 - i\varepsilon]^{-\lambda} ,$$

on obtient une nouvelle distribution $\Delta_{\mathbb{F}}(\lambda, x)$. Pour $\text{Re} \lambda$ suffisamment grand, $\Delta_{\mathbb{F}}(\lambda, x)$ est une fonction de x localement intégrable, holomorphe dans la variable λ . En fait

$$(11) \quad \Delta_{\mathbb{F}}(\lambda, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{m^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma(\lambda)}^{-\lambda} \frac{e^{-\frac{1}{2} i \lambda \pi i}}{2^{\lambda-1}} \frac{K_{\frac{s+1}{2}}^{-\lambda} [m[x^2 + i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}]}{[[x^2 + i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{s+1}{2}}^{-\lambda}}$$

(Voir Guelfand-Šilov, Chap. IX, § 2. On y trouve aussi la relation entre les distributions retardées employées par Riesz et les distributions de Feynman.)

Solution. Démontrer que $\Delta_{\mathbb{F}}(\lambda, x) \Delta_{\mathbb{F}}(x)$ est méromorphe comme fonction de λ à valeurs distributions en x . Définir la partie finie comme étant

$$[\Delta(\lambda, x) \Delta(x) - \frac{\text{Résidu}}{\lambda-1}]_{\lambda} = 1 .$$

Suivant une notation courante, une telle règle donnant un sens à un produit de distributions s'appelle une régularisation.

À première vue, cette régularisation peut sembler tout à fait arbitraire. Mais, en fait, $[\Delta_{\mathbb{F}}(x)]^2$ est naturellement déterminé sauf à l'origine. On peut démontrer que

$$(12) \quad \Delta_{\mathbb{F}}(x) = \theta(x_0) \Delta^{(+)}(x) - \theta(-x_0) \Delta^{(-)}(x)$$

où

$$\theta(x_0) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x_0)$$

$$(13) \quad \Delta^{(\pm)}(x) = \frac{\pm i}{(2\pi)^S} \int \theta(\pm p^0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip \cdot x} .$$

On voit à partir de (13), que pour $x^0 > 0$, $\Delta_{\mathbb{F}}(x)$ est valeur au bord d'une fonction holomorphe $\Delta^{(+)}(x-iy)$, $y \in V_+$ (V_+ étant l'intérieur du cône de lumière futur, $y^2 > 0$, $y^0 > 0$). Pareillement, $\Delta_{\mathbb{F}}(x)$ est valeur au bord d'une fonction holomorphe $-\Delta^{(-)}(x+iy)$, $y \in V_+$ pour $x^0 < 0$. Or on sait que les fonctions holomorphes à croissance polynômiale dans un tube forment un anneau et la définition de multiplication peut être étendue au bord. Par conséquent, $[\Delta_{\mathbb{F}}(x)]^2$ est définie naturellement sauf sur $x^0 = 0$. Mais, sur $x^0 = 0$, $\Delta_{\mathbb{F}}(x)$ est une fonction holomorphe sauf à l'origine. Par conséquent, $[\Delta_{\mathbb{F}}(x)]^2$ est naturellement déterminée sauf à $x = 0$.

Cette argumentation peut s'étendre à un produit quelconque

$$\Delta_{\mathbb{F}}(x-y) \Delta_{\mathbb{F}}(x-z) \Delta_{\mathbb{F}}(y-z) \dots .$$

L'ambiguïté a son support sur les hyperplans où au moins deux des vecteurs x, y, z, \dots sont égaux.

Ainsi, la régularisation donnée est moins arbitraire qu'à première vue, mais néanmoins elle est arbitraire, et on est forcé de considérer la question : quelles propriétés doit-on demander à une régularisation. Les physiciens auraient pu répondre après ~1955 : choisir la régularisation pour qu'elle soit une renormalisation. Mais, je crois qu'aucun ne l'a fait complètement avec la méthode de Riemann-Liouville-Riesz avant Speer. Je vais expliquer ce qu'on veut dire par le mot renormalisation après avoir donné les définitions de Speer.

* * *

Il est convenable d'introduire la terminologie graphique qui suit pour décrire les objets que nous voulons discuter. Un graphe \mathfrak{g} est un triple $\mathfrak{g} = \{v, \mathcal{L}, \pi\}$ formé de deux ensembles $v(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ les sommets et les lignes de \mathfrak{g} resp, et une fonction $\pi_{\mathfrak{g}}$ définie sur $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ qui donne pour une ligne ℓ , une paire de sommets (ces deux sommets peuvent être confondus.) Un graphe est orienté si on ordonne les valeurs de $\pi_{\mathfrak{g}}$. Le premier s'appelle le sommet initial; le deuxième le sommet final. La fonction $\pi_{\mathfrak{g}}$ d'un graphe orienté \mathfrak{g} est aussi définie par sa matrice d'incidence

$$(14) \quad e_{\ell}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ n'est pas sommet de } \ell \\ 1 & \text{si } i \text{ est sommet final et n'est pas sommet initial} \\ -1 & \text{si } i \text{ est sommet initial et n'est pas sommet final} \\ +1 & \text{si } i \text{ est sommet final et sommet initial} \end{cases}$$

$\ell \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \quad , \quad i \in v(\mathfrak{g}) .$

Un graphe de Feynman sur l'espace-temps de dimension $s+1$ est une paire qui consiste en un graphe orienté dont les sommets sont des points de \mathbb{R}^{s+1} , soient x_1, \dots, x_n , et une fonction qui fait correspondre à chaque ligne $\ell \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ une distribution

$$\Delta_{\mathbb{F}} \left(\sum_{i \in v(\mathfrak{g})}^n e_{\ell}^i x_i \right).$$

(Dans le cas général, $\Delta_{\mathbb{F}}$ peut être un opérateur différentiel matriciel agissant sur le $\Delta_{\mathbb{F}}$ de (10), mais pour le moment, nous considérons le cas le plus simple.) Nous convenons que si i est sommet initial et final de ℓ

$$\sum_{i \in v(\mathfrak{g})}^n e_{\ell}^i x_i = 0 ,$$

et $\Delta_{\mathbb{F}}(0)$ est une constante arbitraire.

Avec cette terminologie l'amplitude de Feynman formelle appartenant au graphe de Feynman \mathfrak{g} est

$$(15) \quad \prod_{\ell \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})} \Delta_{\mathbb{F}} \left(\sum_{i \in v(\mathfrak{g})} e_{\ell}^i x_i \right) .$$

Suivant Speer nous allons régulariser cette expression formelle.

La méthode analytique de Speer.

Speer introduit une variable complexe différente, λ_{ℓ} , pour chaque ligne ℓ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Il remplace l'amplitude formelle (15) par

$$(16) \quad \prod_{\ell \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})} \Delta_{\mathbb{F}}(\lambda_{\ell}, \sum_{i \in v(\mathfrak{g})} e_{\ell}^i x_i) .$$

Il montre que cette expression est bien définie comme fonction méromorphe des λ_{ℓ} à

valeurs distributions en $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$. L'ensemble polaire est plus compliqué que dans le cas de $\Delta_{\mathbb{F}}(\lambda, x) \Delta_{\mathbb{F}}(x)$. En fait, par le point $\lambda_\ell = 1$, $\ell \in \mathcal{L}(g)$, il passe toute une famille d'hyperplans polaires. Plus précisément, si L est le nombre des lignes, n le nombre des sommets et $N = L - n + 1$, les surfaces polaires sont

$$(17) \quad \sum_{\ell \in A} \lambda_\ell = 2N - m$$

m un entier positif, A un sous-ensemble de $\mathcal{L}(g)$ arbitraire. La façon dont on doit retrancher ces pôles pour obtenir la partie finie n'est nullement évidente. C'est là la difficulté principale que Speer a surmontée, en introduisant une classe de parties finies qu'il appelle évaluations généralisées (generalized evaluations).

La notion d'une évaluation généralisée à $(1, \dots, 1)$ est définie comme suit. Soit $V \subset \mathbb{C}^L$ ($L \geq 1$) un voisinage ouvert de $(1, \dots, 1)$. Soit

$$(18) \quad \mathcal{A}_L(V) = \{f; f(\underline{\lambda}) \prod_{A \subset [1, \dots, n]} [\sum_{\ell \in A} (\lambda_\ell - 1)]^m \text{ est holomorphe dans } V \text{ pour un } m \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_L = \bigcup_V \mathcal{A}_L(V) \quad .$$

Alors une famille d'applications $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_L; L = 1, 2, \dots\} \mathcal{A}_L \rightarrow \mathbb{C}$ est une évaluation généralisée à $\{1, \dots, 1\}$ si pour chaque $L = 1, 2, \dots$

- (1) \mathcal{F}_L est linéaire.
- (2) Si $f \in \mathcal{A}_L$ est holomorphe à $\{1, \dots, 1\}$, $\mathcal{F}_L f = f(1, \dots, 1)$.
- (3) Si $f_n \in \mathcal{A}_L(V)$ et si

$$g_n(\underline{\lambda}) = f_n(\underline{\lambda}) \prod_{A \subset [1, \dots, n]} [\sum_{\ell \in A} (\lambda_\ell - 1)]^m$$

est holomorphe dans V et $g_n \rightarrow g_0$ uniformément dans V alors

$$\mathcal{F}_L f_n \rightarrow \mathcal{F}_L f_0 \quad .$$

- (4) Si σ est une permutation de $\{1, \dots, L\}$, $f \in \mathcal{A}_L$, et $f_\sigma \in \mathcal{A}_L$ est définie par

$$f_\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_L) = f(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(L)})$$

alors

$$\mathcal{F}_L f_\sigma = \mathcal{F}_L f$$

- (5) Si $f \in \mathcal{A}_L$ ne dépend que de $\lambda_1, \dots, \lambda_{L'}$, où $L' \subset L$, alors $\mathcal{F}_{L'} f = \mathcal{F}_L f$.
- (6) Si $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_L$ et f_1 ne dépend que de $\lambda_1, \dots, \lambda_{L'}$ et f_2 ne dépend que de $\lambda_{L'+1}, \dots, \lambda_L$, alors

$$\mathcal{F}_L (f_1 f_2) = (\mathcal{F}_L f_1) \times (\mathcal{F}_L f_2).$$

Exemple

Soit $f \in \mathcal{H}_L(V)$, V contenant un disque $|\lambda_\ell - 1| < R$, $\ell = 1, \dots, L$. Soit $0 < R_1 < R_2 < \dots < R_L < R$ et $R_i > \sum_{j=1}^i R_j$. Soit C_ℓ le cercle $|\lambda - 1| = R_\ell$. Alors on peut définir

$$(19) \quad \mathcal{K}_L f = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma} \frac{1}{(2\pi i)^L} \int_{C_{\sigma(1)}} d\lambda_1 \dots \int_{C_{\sigma(L)}} d\lambda_L f(\lambda) \prod_{\ell=1}^L (\lambda_\ell - 1)^{-1} .$$

Cette définition satisfait à (1), ..., (6) et est indépendante de $\{R_i\}$.

La définition donnée s'applique aux fonctions à valeurs complexes. Pour l'étendre aux amplitudes de Feynman régularisées, on l'applique aux valeurs de la distribution évaluée à chaque fonction d'essai $f \in \mathcal{G}$.

Il est étonnant qu'une définition si simple soit compatible avec les complications combinatoires de la théorie de la renormalisation.

Interpolation et sommation des amplitudes de Feynman

Une amplitude de Feynman est une fonction de la matrice d'incidence e qui détermine son graphe. Définissons les matrices

$$(20) \quad Q_{jk}^{(\ell)} = e_j^\ell e_k^\ell \quad \ell = 1, \dots, L ; \quad j, k = 1, \dots, n ,$$

qui, comme nous le verrons, apparaissent naturellement. Alors, dans l'application à la théorie quantique des champs, on s'intéresse à la somme des amplitudes de Feynman appartenant à une classe finie de graphes déterminés par quelque théorie particulière. On a de bonnes raisons de croire que les cancellations entre les termes sont importantes. Dans de telles circonstances, cela vaut la peine d'obtenir des formules d'interpolation et de sommation d'une telle classe de graphes.

Comme interpolation, Speer propose de remplacer (20) par

$$(21) \quad Q_{jk}^{(\ell)} = \sum_{\mathfrak{g}} c_{\mathfrak{g}} e(\mathfrak{g})_j^\ell e(\mathfrak{g})_k^\ell , \quad \sum_{\mathfrak{g}} c_{\mathfrak{g}} = 1 , \quad c_{\mathfrak{g}} \geq 0 .$$

Les $c_{\mathfrak{g}}$ sont des coordonnées barycentriques d'un corps convexe dans l'espace

$$\mathbb{R}^{\ln(n-1)/2}$$

dont les coordonnées sont les $Q_{jk}^{(\ell)}$, $\ell = 1, \dots, L$, $j, k = 1, \dots, n$. (Les matrices $Q^{(\ell)}$ sont symétriques et satisfont à

$$\sum_{k=1}^n Q_{jk}^{(\ell)} = 0 .)$$

Les points extrêmes sont les $Q_{j_1 \dots j_k}^{(\lambda)}$ de la forme (20). Il démontre que les amplitudes interpolées ont les mêmes propriétés que celles qui appartiennent aux points extrêmes.

Pour la sommation on a le problème suivant : étant donné une fonction f , définie sur un corps convexe \mathcal{C} , trouver une formule exprimant la somme des valeurs de f aux points extrêmes. Speer donne la solution : il existe un polynôme \mathcal{P} dans les coordonnées barycentriques c , et les dérivées par rapport aux c telles que la somme est

$$(22) \quad \int_{\mathcal{C}} dc \mathcal{P} f .$$

Pour l'instant, cette formule reste inutilisable parce qu'elle n'a un sens que pour $\text{Re} \lambda$ suffisamment grand. On ne sait pas comment faire effectivement l'opération de prolongement analytique à $\lambda_j = 1$. C'est un problème ouvert très intéressant.

Ayant donné ce sommaire schématique je passe aux détails (donnés pour s , le nombre de dimensions de l'espace égal à 3).

Représentations

$\Delta_{\mathbb{F}}(\lambda, x)$ a une transformée de Fourier

$$(23) \quad \hat{\Delta}_{\mathbb{F}}(\lambda, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\pi)^{-2} (-p^2 + m^2 - i\varepsilon)^{-\lambda} .$$

On introduit une régularisation supplémentaire en définissant

$$(24) \quad \hat{\Delta}_{\mathbb{F}, \varepsilon, r}(\lambda, p) = (2\pi)^{-2} [i\Gamma(\lambda)]^{-1} \int_r^{\infty} d\alpha \alpha^{\lambda-1} \exp[i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)] .$$

Pour $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\hat{\Delta}_{\mathbb{F}, \varepsilon, r} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^4)$, c'est-à-dire, sa transformée de Fourier est indéfiniment différentiable et à croissance polynômiale. Par conséquent,

$$(25) \quad \tilde{\gamma}_{\lambda_1 \dots \lambda_L, \varepsilon, r}(\underline{x}, \underline{g}) = \prod_{\ell \in \mathbb{Z}(3)} \Delta_{\mathbb{F}, \varepsilon, r}(\lambda_{\ell}, \sum_i e^{\ell} i x_i)$$

est bien définie comme fonction C^{∞} de \underline{x} entière en $\lambda_1 \dots \lambda_L$.

Formellement, l'amplitude de Feynman est obtenue en prenant la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $r \rightarrow 0^+$, $\lambda_1 \dots \lambda_L \rightarrow 1$. Mais, en général, la limite n'existe pas. Pour examiner l'origine de cette divergence, nous passons à la représentation de la transformée de Fourier

$$(26) \quad \tilde{\gamma}_{\lambda_1 \dots \lambda_L, \varepsilon, r}(\underline{p}, \underline{g}) = b(\lambda_1, \dots, \lambda_L) \delta\left(\sum_{j=1}^n p_j\right) \int_r^{\infty} \dots \int_r^{\infty} d\alpha_1 \dots d\alpha_L \prod_{\ell \in \mathbb{Z}(g)} \{\alpha_{\ell}^{\lambda_{\ell}-3} [\det a_{\mathbb{E}}]^{-\frac{1}{2}} \exp i[p \cdot a_{\mathbb{E}}^{-1} \cdot \underline{p} - \alpha_{\ell} \Pi_{\ell}^2]\}$$

où $\alpha_{\mathbb{E}}$ est la restriction de α à l'hyperplan $\sum_{j=1}^n p_j = 0$ et

$$(27) \quad \alpha_{jk} = - \sum_{\lambda \in \mathbb{E}(\mathfrak{g})} \frac{Q_{jk}^{\lambda}}{\alpha_{\lambda}}$$

(où Q^{λ} est définie par (20) .)

et

$$(28) \quad b(\lambda_1, \dots, \lambda_L) = 2^{2n-4L} \pi^{2n-2L-2} (-i)^{2n-2} \left[\prod_{\lambda \in \mathbb{E}(\mathfrak{g})} \Gamma(\lambda_{\lambda}) \right]^{-1} .$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_L = 1$, on a divergence de l'intégrale à l'origine, si les puissances de $\alpha_1 \dots \alpha_L$ qui viennent de

$$\prod \alpha_{\lambda}^{-\lambda} \quad \text{et de} \quad [\det \alpha_{\mathbb{E}}]^{-\frac{1}{2}}$$

sont trop grandes et négatives, on a des complications parce qu'un sous-ensemble des α peut donner une puissance trop négative, tandis que la puissance de l'ensemble total des α , n'est pas elle-même trop négative.

Si on ne considère que le degré total, c'est la divergence superficielle qui compte. Elle est définie par

$$(29) \quad \mu(\mathfrak{g}) = 2L(\mathfrak{g}) - 4[n(\mathfrak{g}) - 1] .$$

où $L(\mathfrak{g})$ est le nombre des lignes de \mathfrak{g} et $n(\mathfrak{g})$ est le nombre des sommets. Si $\mu(\mathfrak{g})$ est strictement négative l'intégrale est appelée superficiellement convergente parce qu'elle serait convergente si toutes ses sous-intégrations étaient convergentes. Mais, en fait, quelques-unes de ses sous-intégrations peuvent diverger. Nous reviendrons plus tard à la considération des sous-intégrations.

Les opérations R et la méthode de Speer

Ce sont Bogoliubov et Širkov qui, les premiers, ont dégagé de l'humus de la littérature physique une idée claire, concrétisée par l'"opération R", qui donne les conditions pour qu'une régularisation soit une renormalisation. Une opération R est une fonction sur les graphes de Feynman. A chaque graphe de Feynman, elle fait correspondre une amplitude de Feynman renormalisée; à chaque graphe de Feynman régularisé, elle fait correspondre une amplitude de Feynman régularisée renormalisée. Pour les méthodes de régularisation usuelles (comme celle mentionnée ci-dessus) la limite de l'amplitude de Feynman régularisée renormalisée, quand la régularisation est retirée, est l'amplitude de Feynman renormalisée.

Pour définir R nous allons introduire quelques définitions et faits de la théorie des graphes.

Etant donné un graphe orienté g , un sous-graphe orienté g' de g est un graphe tel que $\mathcal{V}(g') \subset \mathcal{V}(g)$, $\mathcal{L}(g') \subset \mathcal{L}(g)$ et $\pi_{g'} = \pi_g|_{\mathcal{L}(g')}$. Un sous-graphe orienté g' de g est un sommet généralisé si les lignes $\mathcal{L}(g')$ sont toutes les lignes de $\mathcal{L}(g)$ dont les sommets appartiennent à $\mathcal{V}(g')$. Un graphe orienté g est IPI (one particle irreducible) s'il est connexe et si tout sous-graphe obtenu de g en coupant une ligne est connexe. Un graphe est IPR (one particle reducible) s'il n'est pas IPI. Chaque graphe connexe g a une décomposition unique en IPI graphes $g^{(1)}, g^{(2)} \dots$ telle que les lignes qui ne sont pas parmi les lignes des $g^{(j)}$ mènent d'un $g^{(j)}$ à un autre. Correspondant à cette décomposition des graphes on a une décomposition des amplitudes de Feynman régularisées

$$(30) \quad \tau_{\epsilon, r}(g) = \prod_j \tau_{\epsilon, r}(g^{(j)}) \prod_K \Delta_F(\epsilon, r, \Sigma e_i^{(\ell_K)} x_i)$$

où le dernier produit est pris sur les lignes qui n'appartiennent pas à un des $g^{(j)}$. La chose importante est que c'est un produit tensoriel de distributions. Par conséquent, nous pouvons considérer le cas des IPI graphes.

Soit μ un entier et $\tau \in g'(\mathbb{R}^{4n})$ de la forme

$$(31) \quad \tau(p_1, \dots, p_n) = \delta(\sum_{i=1}^n p_i) F(p_1, \dots, p_n)$$

où F est une fonction indéfiniment différentiable. L'opération \mathfrak{M}_μ est définie par

$$(32) \quad (\mathfrak{M}_\mu \tau)(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu < 0, \\ \delta(\sum_{j=1}^n p_j) G(p_1, \dots, p_n) & \text{si } \mu \geq 0, \end{cases}$$

où G est la série de Taylor de F autour de $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ terminée à l'ordre μ .

Soit g un graphe de Feynman. Pour chaque sommet généralisé g' de g nous définissons récursivement des amplitudes

$$(33) \quad \mathfrak{R}_{\epsilon, r}(g') = \begin{cases} 1 & \text{si } g' \text{ a un seul point,} \\ 0 & \text{si } g' \text{ est IPR} \\ -i_\mu(g') \bar{\mathfrak{R}}_{\epsilon, r}(g') & \text{en tout autre cas.} \end{cases}$$

Ici on a

$$(34) \quad \bar{\mathfrak{R}}_{\epsilon, r}(g') = \sum \prod_{\text{CONN}} \mathfrak{R}_{\epsilon, r}(g'_j)$$

où la sommation est sur toutes les partitions des sommets de $g', g'_1, g'_2 \dots$ étant

les sommets généralisés correspondants. Le produit

$$\prod_{\text{CONN}} \Delta_{\varepsilon, r}$$

est sur toutes les lignes dont les sommets sont dans des \mathfrak{g}_j' distincts.

Définissant

$$(35) \quad R_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}) = \bar{R}_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{E}_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g})$$

nous avons enfin une définition de l'amplitude de Feynman régularisée renormalisée. L'opération R de Bogoliubov et Širkov regardée comme opération sur les graphes de Feynman régularisés est donnée par $\gamma_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}) \rightarrow R_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g})$.

Speer a généralisé quelque peu cette définition de Bogoliubov et Širkov, en englobant la notion d'une renormalisation finie, définie comme suit.

Soit \mathfrak{g} un graphe de Feynman. Une renormalisation finie est une application qui, pour chaque sommet généralisé ν de \mathfrak{g} donne une distribution $\hat{\chi}_{\varepsilon}(\nu)$

$$(36) \quad \hat{\chi}_{\varepsilon}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \text{ a un seul point,} \\ 0 & \text{si } \nu \text{ est IPR,} \\ \delta\left(\sum_{j=1}^m p_j\right) Z_{\nu}(p_j) & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

où Z_{ν} est un polynôme de degré $\mu(\mathfrak{G})$.

La définition de Speer est la même que (35) sauf qu'on remplace $\mathfrak{E}_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}')$ par $\mathfrak{E}'_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}')$ où

$$(37) \quad \mathfrak{E}'_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{g}' \text{ a un seul point,} \\ 0 & \text{si } \mathfrak{g}' \text{ est IPR,} \\ -i^{\mu(\mathfrak{g}')} \bar{R}'_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}') + \hat{\mathfrak{X}}(\mathfrak{g}'), \end{cases}$$

avec

$$(38) \quad \bar{R}'_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}') = \sum \prod \mathfrak{E}'(\mathfrak{g}'_j) \prod_{\text{CONN}} \Delta_{\varepsilon, r}$$

et, enfin,

$$(39) \quad R_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}) = \bar{R}'_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{E}'_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g}) .$$

Hepp a démontré le théorème suivant pour les opérations R données par (35) et Speer l'a étendu aux opérations R données par (39).

THÉORÈME. La limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+, r \rightarrow 0+} R_{\varepsilon, r}(\mathfrak{g})$$

existe dans $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^{4n})$.

Alors Speer a démontré

THÉORÈME. Soit \mathcal{F} une évaluation généralisée à $\{1, \dots, 1\}$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_L(g) \lim_{r \rightarrow 0^+} \tau_{\lambda_1} \dots \lambda_{L, \varepsilon, r}(g)$$

existe dans $\Delta'(\mathbb{R}^{4n})$ pour chaque graphe g , et définit une opération R dans le sens de (39).

Speer a aussi démontré ce théorème pour l'amplitude interpolante donnée par (21) et pour les cas de particules à spin.

La thèse de Speer laisse ouverts deux problèmes importants :

1) la démonstration que les opérations R et les évaluations généralisées sont aussi bien définies, quand les masses m_x , qui apparaissent dans les $\Delta_{\mathbb{F}}$, sont égales à zéro ;

2) la définition des opérations R et les évaluations généralisées invariantes sous un groupe de jauge.

J'en viens maintenant à la démonstration de l'équivalence entre l'utilisation des opérations R et l'introduction de contre-terme dans le Lagrangien d'interaction. Cela demande une excursion assez longue vers la théorie quantique des champs.

Esquisse de la théorie des champs quantiques libres

Espace monoparticulaire.— Soit \mathcal{H} un espace hilbertien séparable,

$$U\{a, A\} \rightarrow \mathcal{H}(a, A)$$

une représentation unitaire dans \mathcal{H} du groupe $i SL(2, \mathbb{C})$ (c'est le groupe de recouvrement du groupe de Lorentz inhomogène). Supposons que cette représentation a masse m et spin s et est donnée par un système d'équations différentielles

$$(*) \quad (\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0$$

c'est-à-dire qu'il existe une matrice hermitienne non-singulière η telle que

$$-\gamma^\mu = \eta \gamma^{\mu*} \eta^{-1} .$$

Alors, si $\bar{\psi}$ est une autre solution de (*) on a, en passant au conjugué complexe

$$-\partial_\mu \bar{\psi} \eta \gamma^\mu + m \bar{\psi} \eta = 0$$

et, par conséquent,

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \eta \gamma^\mu \psi) = 0 .$$

Cela veut dire que

$$(\bar{\psi}, \psi) = \int_{\Sigma} d\sigma^\mu(x) \bar{\psi}(x) \eta i \gamma^\mu \psi(x)$$

l'intégrale prise sur Σ , un hyperplan de genre espace est indépendant de Σ pour Φ et ψ convenablement restreintes. Supposons de plus qu'il existe une représentation de $SL(2, \mathbb{C}) : A \rightarrow S(A)$ telle que

$$S(A)^{-1} \gamma^\mu S(A) = \Lambda(A)^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

où $\Lambda(A)$ est la transformation de Lorentz appartenant à $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Alors

$$(U(a, A)\psi)(x) = S(A)\psi(\Lambda(A^{-1})(x-a))$$

et

$$(U(a, A)\Phi, U(a, A)\psi) = (\Phi, \psi) .$$

Puisque nous avons supposé que la représentation a la masse m , la transformée de Fourier $\hat{\psi}$ de ψ a son support sur $p^2 = m^2$. Le sous-espace des solutions à énergie positive $\{\hat{\psi}(p) = 0, p^0 < 0\}$ est invariant et nous supposons que $(\psi, \psi) > 0$ pour une telle solution.

Etant donné une solution ψ à énergie positive nous pouvons construire des solutions d'énergie négative par l'opération

$$\psi \rightarrow C \bar{\psi}$$

où C est une matrice qui satisfait à

$$\bar{\gamma}^\mu = C \gamma^\mu C^{-1} .$$

L'espace \mathcal{H} des solutions à énergie positive s'appelle espace monoparticulaire.

Espaces de FOK.— D'un espace monoparticulaire \mathcal{H} on passe à un espace de FOK qui décrit des systèmes d'un nombre arbitraire de particules.

On forme l'algèbre tensorielle sur \mathcal{H} . C'est un espace préhilbertien dans la norme naturelle. Son complété hilbertien est un espace de FOK :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n} .$$

L'expérience nous dit que les sous-espaces de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ venant de l'algèbre symétrique et de l'algèbre grassmannienne sont les sous-espaces à considérer. On écrit :

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} [\mathcal{H}^{\otimes n}]_\varepsilon$$

où $[\]_\varepsilon$ indique le produit tensoriel symétrique ou anti-symétrique selon que $\varepsilon = \pm 1$.

Les calculs dans les espaces de FOK deviennent plus simples si on introduit les opérateurs création et les opérateurs annihilation $a(f)^*$, $a(g)$, $f, g \in \mathcal{H}$. Ils sont

définis par

$$a(f)^* \sum_{j=1}^n f_j = \sqrt{n+1} \bar{f} \otimes f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n$$

$$a(f) \otimes \sum_{j=1}^n f_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\bar{f}, f_k) f_1 \otimes \dots \hat{f}_k \otimes \dots \otimes f_n, & \varepsilon = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (\bar{f}, f_k) f_1 \otimes \dots \hat{f}_k \otimes \dots \otimes f_n, & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

et étendus par linéarité. Ces opérateurs satisfont à

$$[a(f), a(g)]_\varepsilon \equiv a(f)a(g) + \varepsilon a(g)a(f) = 0$$

$$[a(f), a(g)^*]_\varepsilon \equiv a(f)a(g)^* + \varepsilon a(g)^*a(f) = (g, f).$$

Si on a plusieurs espaces monoparticulaires, l'espace de $\mathfrak{F}OK$ du système composé est le produit tensoriel (sans symétrisation ou anti-symétrisation) des espaces de $\mathfrak{F}OK$ individuels.

Champs libres.— On a deux types de champs libres : champs auto-conjugués et champs à anti-particules. Dans le premier cas, le champ est défini par

$$(40) \quad \mathfrak{F}(f) = a(f) + a(f^c)^*$$

(où $f^c = Cf$) agissant sur un espace $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ avec un seul type de particule. Dans le deuxième cas, le champ est défini par

$$(41) \quad \mathfrak{F}(f) = a(f) + b(f^c)^*$$

agissant sur $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_{\text{part}}) \otimes \mathfrak{F}(\mathcal{H}_{\text{anti-part}})$ où $\mathcal{H}_{\text{part}}$ est l'espace monoparticulaire des particules et $\mathcal{H}_{\text{anti-part}}$ est la même chose pour les anti-particules. $a(f)$ est ici l'opérateur annihilation sur $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_{\text{part}}) \otimes$ identité sur $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_{\text{anti-part}})$. D'autre part, $b(f)$ est $(-1)^{N_{\text{part}}}$ sur $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_{\text{part}}) \otimes$ l'opérateur annihilation sur $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_{\text{anti-part}})$. (N_{part} est l'opérateur du nombre de particules ; il apparaît ici pour faire anti-commuter les $a(f)$ et $b(g)$.)*

*) D. KASTLER, Introduction à l'électrodynamique quantique, Dunod, Paris 1961, Chapitres II, VI, VIII.

Théorie formelle des perturbations pour les fonctions de Green

Les champs donnés par (40) et (41) satisfont à l'équation linéaire

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Phi(x) = 0$$

qui est formellement dérivable d'un Lagrangien

$$(42) \quad \mathcal{L}(x) = \Phi^\dagger(x)(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Phi(x) .$$

Dans la théorie des champs en interactions on a un Lagrangien qui est une somme de quelques Lagrangiens de la forme (42), fonctions de quelques champs et d'un Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_I qui est un polynôme dans ces champs. Les coefficients dans \mathcal{L}_I s'appellent les constantes de couplage. En partant de ce Lagrangien on peut arriver, par un procédé tout à fait formel, à une expression des fonctions de Green de la théorie comme séries en puissances des constantes de couplage. Par exemple, si on a un seul champ scalaire $\underline{\phi}$, et le Lagrangien d'interaction étant $\mathcal{L}_I(x)$, on a

$$(43) \quad (\bar{\psi}_0, (\underline{\phi}(x_1) \dots \underline{\phi}(x_n))_+ \psi_0) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int \dots \int (\Phi_0, (\mathcal{L}_I(y_1), \dots, \mathcal{L}_I(y_k))_+ \Phi_0) \right]^{-1} \\ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int dy_1 \dots dy_k (\Phi_0, (\mathcal{L}_I(y_1) \dots \mathcal{L}_I(y_k) \underline{\phi}(x_1) \dots \underline{\phi}(x_n))_+ \Phi_0) \right].$$

À gauche, on a la célèbre fonction de Green à n points. ψ_0 est l'état du vide et $\underline{\phi}$ le champ en interaction (rendu un peu gras pour le distinguer du champ libre ϕ qui apparaît à droite). La parenthèse $(\dots)_+$ veut dire que les opérateurs $\underline{\phi}(x_j)$ sont ordonnés selon les temps $x_1^0 \dots x_n^0$.

Chaque terme de la série (43) donne une somme des contributions qu'on peut étiqueter par des graphes. Voilà l'origine des intégrales de Feynman associées à un graphe.

Il y a des simplifications si on passe des fonctions de Green aux fonctions de Green tronquées. Ces dernières sont définies par récurrence

$$(44) \quad (\psi_0, (\underline{\phi}(x_1) \dots \underline{\phi}(x_n))_+ \psi_0) = \sum \Pi (\psi_0, (\underline{\phi}(x_{i_1}) \dots \underline{\phi}(x_{i_p}))_+ \psi_0)^{\Pi} \\ (\psi_0, \underline{\phi}(x) \psi_0) = (\psi_0, \underline{\phi}(x) \psi_0)^{\Pi}$$

où la somme est sur toutes les partitions de $1 \dots n$ et le produit est sur les fonctions de Green appartenant à un sous-ensemble de la partition. Pour les fonctions de Green tronquées, la série perturbative est obtenue en ne retenant que les contributions des graphes connexes.

Tous ces développements peuvent être résumés dans des règles de Feynman. Ces règles donnent pour un Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_I , l'ensemble des graphes qui apparaissent dans la série perturbative des fonctions de Green, et pour chaque graphe,

les distributions qui doivent être associées aux lignes du graphe. En d'autres termes, employant la notation introduite ci-dessus, nous pouvons dire que, pour chaque fonction de Green les règles de Feynman associent un ensemble de graphes de Feynman à un Lagrangien \mathcal{L}_I . Les fonctions de Green sont ainsi données comme séries formelles en puissance des constantes de couplage.

Après cette introduction très longue nous pouvons décrire le théorème folklorique démontré par Speer.

Il est exprimé par l'identité entre deux séries formelles.

THÉORÈME.

$$(\text{GF})_{\text{reg,ren}}(\mathcal{L}_I) = (\text{GF})_{\text{reg}}(\mathcal{L}_I + \delta\mathcal{L}_I) .$$

A gauche, on a une fonction de Green régularisée, renormalisée selon l'opération R de Bogoliubov-Širkov, pour un Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_I . A droite, on a la fonction de Green régularisée mais non renormalisée pour un Lagrangien altéré. $\delta\mathcal{L}_I$ consiste en "contre termes" formés en employant les sommets généralisés $\mathcal{X}_{\varepsilon,r}$ de la théorie \mathcal{L}_I selon des règles trop compliquées pour qu'on puisse les résumer ici.

L'importance de ce théorème est claire. Il dit que l'opération R est équivalente à l'addition de contre termes au Lagrangien initial. C'est la justification de la définition de l'opération R.

BIBLIOGRAPHIE

- M. RIESZ, L'intégrale de Riemann-Liouville et le Problème de Cauchy, Acta Math. 81 (1948)
- T. GUSTAFSON, Elimination of divergences in quantum field theory, Förh. Lund 15 (1945), N° 28.
- Divergences in the interaction of a nuclear with a scalar field, Nature 158 (1946) 273.
 - On the elimination of certain divergences in quantum electrodynamics, Arkiv för Mat. och Fys. 34 (1946) N° 2.
- S.B. NILSSON, On the calculation of self-energies in quantum theory by analytic continuation, Phys. Rev. 73 (1948) 903.
- Interaction of electrons and an electromagnetic field treated by analytic continuation, Arkiv för Fysik 1 (1950) 369-423.
- G. KÄLLEN, Formalistic regularization in quantum electrodynamics, Arkiv för Fysik, 5 (1951) 130-131.
- E. KARLSON, On regularization by means of analytic continuation, Arkiv för Fysik, 7 (1954) 221-237.
- C.G. BOLLINI, J.J. GRAMBIAGI, A.G. DOMINGUEZ, Analytic renormalization and the divergences of quantum field theories, Nuovo Aniento 31 (1964) 550.
- W. GRÜTTINGER, Generalized functions and dispersion relations, Fortschritte der Phys. 14 (1966) 483-601.