Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Pierre Schapira

Hyperfonctions et valeurs au bord des solutions des équations elliptiques

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1969-1970), p. 25-36
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___2_25_0>

HYPERFONCTIONS ET VALEURS AU BORD DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

par Pierre SCHAPIRA

Introduction

Nous nous proposons de montrer comment les hyperfonctions s'introduisent naturellement dans l'étude des "valeurs au bord" des solutions des équations elliptiques.

C'est d'ailleurs comme valeurs au bord de fonctions holomorphes qu'elles avaient été introduites par M. Sato [14], mais la construction (par "recollement" de fonctionnelles analytiques) qu'en a donnée ensuite A. Martineau [13] est plus naturelle, et c'est elle que nous commencerons par rappeler. Nous montrerons que si P est un opérateur elliptique d'ordre p sur une variété analytique réelle non compacte V et S une hypersurface de V, on peut représenter les p-uples d'hyperfonctions de S comme "valeurs au bord" des solutions de l'équation $Pu = 0$ dans $V-S$. Nous utiliserons pour cela un théorème de dualité de A. Grothendieck [4] et des techniques de la théorie des faisceaux.

Nous utiliserons ce résultat pour démontrer, en reprenant une méthode due à G. Bengel [1] dans le cas des opérateurs à coefficients constants, que les solutions hyperfonctions de l'équation $Pu = 0$ sont analytiques.

1. Préliminaires

Soit V une variété analytique réelle dénombrable à l'infini et S une hypersurface analytique de V. On supposera V et S orientées et munies de mesures analytiques positives dv et ds.

On désignera par $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{B}$ les faisceaux sur V des germes de fonctions analytiques, de fonctions C^∞, de distributions, d'hyperfonctions ([14], [13], [15]). Ce sont des faisceaux d'espaces vectoriels complexes.

On désignera par $\tilde{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{D}}'$, $\tilde{\mathcal{B}}$ les faisceaux analogues sur la variété S.

Les espaces $\mathcal{D}(V)$ et $\mathcal{E}'(V)$ sont définis dans [19]. Rappelons [13] comment est défini le faisceau $\mathcal{B}$.

Soit K un compact de V. L'espace $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(K)$ des fonctions analytiques au voisinage de K a une topologie naturelle du type $\mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{S}$ [5] et $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(V)$ est dense dans $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(K)$.

On munit $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(V)$ de la topologie

$$\mathcal{O}\!\mathcal{C}(V) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ K \subset V}} \mathcal{O}\!\mathcal{C}(K) .$$

Son dual, $\mathcal{O}\!\mathcal{C}'(V)$, est l'espace des fonctionnelles analytiques sur V.

Si $u \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}'(V)$ on dit que u est portable par un compact K si $u \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}'(K)$. On démontre que si u est non nulle, il existe un plus petit compact, $\sigma(u)$, qui porte u. On l'appelle le support de u. On démontre alors :

THÉORÈME 1. <u>Il existe un faisceau</u> $\mathcal{B}$ <u>d'espaces vectoriels complexes sur</u> V <u>tel que</u> :

1) $\mathcal{B}$ <u>est flasque</u> (i.e. : les opérations de restriction sont surjectives) ;

2) <u>pour tout compact</u> K <u>de</u> V <u>on a</u> :

$$\Gamma_K(V,\mathcal{B}) = \mathcal{O}\!\mathcal{C}'(K) .$$

($\Gamma_K(V,\mathcal{B})$ désigne l'ensemble des sections de $\mathcal{B}$ sur V à support dans K. Nous renvoyons à [3] pour ce qui concerne la théorie des faisceaux).

Remarquons que $\mathcal{B}$ est uniquement déterminé car étant flasque on a, pour tout ouvert ω relativement compact dans V, un isomorphisme :

$$\mathcal{B}(\omega) \simeq \frac{\Gamma_{\overline{\omega}}(V,\mathcal{B})}{\Gamma_{\partial\omega}(V,\mathcal{B})} = \frac{\mathcal{O}\!\mathcal{C}'(\overline{\omega})}{\mathcal{O}\!\mathcal{C}'(\partial\omega)} .$$

Le premier isomorphisme, valable pour tout faisceau flasque de groupes abéliens sur un espace localement compact entraîne :

LEMME 1. <u>Soit</u> X <u>un espace localement compact,</u> F <u>et</u> G <u>deux faisceaux flasques de groupes abéliens sur</u> X, u <u>un morphisme de</u> F <u>dans</u> G. <u>On suppose que pour tout compact</u> K <u>de</u> X, u <u>induit un isomorphisme</u> :

$$\Gamma_K(X,F) \underset{u}{\xrightarrow{\sim}} \Gamma_K(X,G) .$$

<u>Alors</u> u <u>est un isomorphisme et en particulier induit un isomorphisme</u>

$$\Gamma(X,F) \underset{u}{\xrightarrow{\sim}} \Gamma(X,G) .$$

DÉFINITION 1. <u>Soit</u> ω <u>un ouvert de</u> V. <u>On appelle hyperfonctions sur</u> ω <u>les éléments de</u> $\mathcal{B}(\omega)$.

Signalons que $\mathcal{D}'$ est un sous-faisceau de $\mathcal{B}$

2. <u>Valeurs au bord.</u>

Soit P un opérateur différentiel (linéaire) sur V à coefficients analytiques, tel que S soit non caractéristique pour P.

Soient P_j $(j = 1 \dots p)$ des opérateurs frontières, normaux sur S, à coefficients analytiques, d'ordre $j-1$. Soit γ l'opérateur de "trace" sur S, qui à une fonction définie au voisinage de S associe sa restriction à S. Les opérateurs P_j sont de la forme $\gamma \circ R_j$ où R_j est un opérateur différentiel défini au voisinage de S, d'ordre $j-1$, et où S est non caractéristique pour R_j.

Pour tout compact K de S, un opérateur frontière P_j opère de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(K)$ dans $\tilde{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}(K)$ et son transposé ${}^tP_j$, de $\tilde{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}'(K)$ dans $\mathcal{O}\!\mathcal{L}'(K)$. Par suite ${}^tP_j$ se prolonge en application linéaire de $\tilde{\mathcal{B}}(S)$ dans $\mathcal{B}_S(V)$ (espace des hyperfonctions de V à support dans S).

Désignons par $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(V-S, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$ l'espace des fonctions analytiques de $V-S$ dont les restrictions aux composantes connexes de $V-S$ se prolongent analytiquement à travers S.

Soit $(S_i)_{i\in I}$ les composantes connexes de S, $(V_i)_{i\in I}$ des voisinages connexes des S_i tels que

- $i \neq i' \Rightarrow V_i \cap V_{i'} = \emptyset$
- S_i sépare V_i en deux régions, V_i^+ et V_i^-.

De tels V_i existent car V et S sont orientables.

On définit les opérateurs P'_j $(j = 1 \dots p)$ en posant, si $f \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}(V-S, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$:

$$P'_j f = \sum_{i\in I} P_j(f|V_i^+ - f|V_i^-)$$

On sait (11) qu'il existe des opérateurs frontières Q_j $(j = 1 \dots p)$ normaux sur S à coefficients analytiques d'ordre $p-j$ tels que si $f \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}(V-S, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$ on ait la "formule des sauts":

$$P(f_o) = (Pf)_o + \sum_{j=1}^{p} {}^tQ_j(P'_j f)$$

où $f_o \in \mathcal{D}'(V)$ est le prolongement canonique de f défini par :

$$< f_o, \varphi > = \int_{V-S} f\varphi dv \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(V) .$$

LEMME 2. <u>L'application</u> $\tilde{P}$:

$$\mathcal{B}_S(V) \times \tilde{\mathcal{B}}(S)^p \to \mathcal{B}_S(V)$$

$$(u,(u_j)_{j=1}^p) \to Pu + \sum_{j=1}^{p} {}^tQ_j\, u_j$$

<u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u>. Désignons par $\mathcal{B}_S$ le faisceau des germes de sections de $\mathcal{B}$ à support dans S . C'est un faisceau flasque sur S . L'application $\tilde{P}$ définit un morphisme de faisceaux :

$$\mathcal{B}_S \times \tilde{\mathcal{B}}^p \to \mathcal{B}_S$$

et d'après le lemme 1 il suffit de vérifier que, pour tout compact K de S, $\tilde{P}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}\!\iota'(K) \times \tilde{\mathcal{O}\!\iota}'(K)^p$ sur $\mathcal{O}\!\iota'(K)$. Mais c'est alors l'application transposée de l'application (continue) :

$$\mathcal{O}\!\iota(K) \to \mathcal{O}\!\iota(K) \times \tilde{\mathcal{O}\!\iota}(K)^p$$

$$f \to ({}^tPf,(Q_jf)_{j=1}^p)$$

et cette application est un isomorphisme vectoriel topologique d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski et le théorème du graphe fermé.

Désignons par $\mathcal{O}\!\iota_P$ le faisceau sur V des germes de solutions analytiques de l'équation $Pu = 0$. Soit $f \in \mathcal{O}\!\iota_P(V-S)$. Comme le faisceau $\mathcal{B}$ est flasque, il existe $\bar{f} \in \mathcal{B}(V)$ qui prolonge f. D'après le lemme 2 on peut écrire de manière unique :

$$P\bar{f} = Pu + \sum_{j=1}^{p} {}^tQ_j\, u_j$$

$$u \in \mathcal{B}_S(V) \quad , \quad u_j \in \tilde{\mathcal{B}}(S) \quad j = 1 \dots p \; .$$

Les hyperfonctions $\bar{f}-u$ et u_j $(j = 1 \dots p)$ ne dépendent que de f et pas du prolongement choisi.

DÉFINITION 2. <u>Si</u> $f \in \mathcal{O}\!\iota_P(V-S)$ <u>on pose</u>

$$f_o = \bar{f}-u$$

$$P_j^! f = u_j$$

$$b(f) = (P_j^! f)_{j=1}^p$$

f_o <u>s'appelle le prolongement canonique de</u> f <u>et</u> $b(f)$ <u>la valeur au bord de</u> f.

THÉORÈME 2. Soit V^+ une composante connexe de $V-S$. Supposons S adhérent à V^+. Soit $f \in \mathfrak{A}_P(V-S)$, nulle partout sauf éventuellement sur V^+. Supposons que $b(f) = 0$. Alors $f = 0$.

Ce théorème résulte de l'extention aux hyperfonctions du théorème de Holmgren ([8], théorème 5.3.1), extension qui se démontre à l'aide du théorème de Cauchy-Kowalewski [17].

3. Dualité

Nous ferons l'hypothèse :

(H) | V est sans composantes connexes compactes et l'opérateur P est elliptique

Le transposé de P, ${}^tP$, sera lui aussi elliptique.

Rappelons ([8], [12]) que :

$$f \in \mathcal{D}'(V) \ , \quad Pf \in \mathcal{E}(V) \ (\text{resp. } \mathfrak{A}(V)) \ \Rightarrow f \in \mathcal{E}(V) \ (\text{resp. } \mathfrak{A}(V))$$

et que :

$$P\,\mathcal{D}'(V) = \mathcal{D}'(V)$$

et donc

$$P\,\mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(V)$$

$$P\,\mathfrak{A}(V) = \mathfrak{A}(V)$$

$$H^1(V, \mathfrak{A}_P) = 0 \ .$$

Ces résultats sont évidemment encore vrais pour tout ouvert de V.

Si K est un compact de V on munira l'espace $\mathfrak{A}_{{}^tP}(K)$ de la topologie induite par $\mathfrak{A}(K)$. C'est un espace du type $\mathcal{D}\mathcal{F}S$ et son dual est l'espace $\dfrac{\mathfrak{A}'(K)}{P\mathfrak{A}'(K)}$.

Si ω est un ouvert de V on munira l'espace $\mathfrak{A}_P(\omega)$ de la topologie induite par $\mathcal{E}(\omega)$. C'est un espace du type $\mathcal{F}S$. Son dual, $\mathfrak{A}'_P(\omega)$, s'identifie à

$$\frac{\mathcal{E}'(\omega)}{{}^tP\mathcal{E}'(\omega)} \ .$$

On définit une application

$$\lambda \ : \ \frac{\mathfrak{A}_P(V-K)}{\mathfrak{A}_P(V)} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{A}'_{{}^tP}(K)$$

en posant, si $f \in \mathfrak{A}_P(V-K)$

$$\lambda(f) = \text{classe de } P\bar{f} \text{ modulo } P\,\mathfrak{A}'(K)$$

où $\bar{f} \in \mathcal{B}(V)$ est un prolongement de f .

THÉORÈME 3 [4]. <u>Sous l'hypothèse</u> (H) <u>l'application</u> λ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u>. Définissons l'application

$$\mu : \mathfrak{A}_{{}^tP}(K) \to \frac{\mathcal{E}'(V-K)}{{}^tP\mathcal{E}'(V-K)}$$

de la manière suivante : soit $g \in \mathfrak{A}_{{}^tP}(K)$; il existe un ouvert $\omega \supset K$ avec $g \in \mathfrak{A}_{{}^tP}(\omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\varphi = 1$ au voisinage de K . On pose :

$$\mu(g) = \text{classe } {}^tP(\varphi g) \ .$$

Soit $f \in \mathfrak{A}_P(V-K)$. On a

$$< \lambda(f), g > \ = \ < f, \mu(g) >$$

car

$$< P\bar{f}, g > \ = \ < P(1-\theta)f, g >$$

$\forall\ \theta \in \mathcal{D}(\omega), \theta = 1$ au voisinage de K .

Si $\varphi = 1$ au voisinage du support de θ on a :

$$\begin{aligned} < P(1-\theta)f, g > &= < P(1-\theta)f, \varphi g > \\ &= < (1-\theta)f, {}^tP(\varphi g) > \\ &= < f, {}^tP(\varphi g) > . \end{aligned}$$

Pour montrer que la suite

$$0 \to \mathfrak{A}_P(V) \to \mathfrak{A}_P(V-K) \xrightarrow[\lambda]{} \mathfrak{A}'_{{}^tP}(K) \to 0$$

est exacte il suffit, d'après des arguments classiques d'analyse fonctionnelle, de montrer que la suite "transposée" :

$$0 \to \mathfrak{A}_{{}^tP}(K) \xrightarrow[\mu]{} \frac{\mathcal{E}'(V-K)}{{}^tP\mathcal{E}'(V-K)} \to \frac{\mathcal{E}'(V)}{{}^tP\mathcal{E}'(V)} \to 0$$

est exacte, ce qui est laissé au lecteur.

4. <u>Théorème d'isomorphisme</u>

THÉORÈME 4. <u>Sous l'hypothèse</u> (H) <u>l'application</u>

$$b : \frac{\mathfrak{A}_p(V-S)}{\mathfrak{A}_p(V)} \to \tilde{\mathcal{B}}(S)^p$$

<u>est un isomorphisme.</u>

<u>Démonstration.</u> A tout ouvert $\tilde{\omega}$ de S associons le groupe $H^1_{\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p)$. On définit ainsi un préfaisceau sur S que l'on note $H^1_S(\mathfrak{A}_p)$. Si ω est un ouvert de V coupant S suivant $\tilde{\omega}$ on a par définition

$$H^1_{\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) = H^1_{\tilde{\omega}}(\omega,\mathfrak{A}_p)$$

et on a la suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 = H^0_{\tilde{\omega}}(\omega,\mathfrak{A}_p) \to H^0(\omega,\mathfrak{A}_p) \to H^0(\omega-\tilde{\omega},\mathfrak{A}_p) \\ \to H^1_{\tilde{\omega}}(\omega,\mathfrak{A}_p) \to H^1(\omega,\mathfrak{A}_p) = 0 \end{aligned}$$

d'où un isomorphisme

$$\frac{\mathfrak{A}_p(\omega-\tilde{\omega})}{\mathfrak{A}_p(\omega)} \simeq H^1_{\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) \text{ .}$$

Considérons alors le préfaisceau $H^1_S(\mathfrak{A}_p)$. C'est un faisceau : cela résulte de ce que $H^0_S(\mathfrak{A}_p) = 0$ [3],[6]. Ce faisceau est même flasque. Soit en effet $\tilde{\omega}$ un ouvert de S. On a la suite exacte de cohomologie à support :

$$0 \to H^1_{S-\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) \to H^1_S(V,\mathfrak{A}_p) \to H^1_{\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) \to H^2_{S-\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) \to \dots$$

et $H^2_{S-\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) = 0$ d'après la suite exacte :

$$0 = H^1(V-(S-\tilde{\omega}),\mathfrak{A}_p) \to H^2_{S-\tilde{\omega}}(V,\mathfrak{A}_p) \to H^2(V,\mathfrak{A}_p) = 0 \text{ .}$$

L'application b définit alors un morphisme de faisceaux flasques sur V :

$$H^1_S(\mathfrak{A}_p) \to \tilde{\mathcal{B}}^p \text{ .}$$

D'après le lemme 1 il suffit, pour démontrer le théorème, de vérifier que pour tout compact K de S, b induit un isomorphisme :

$$\Gamma_K(S,H^1_S(\mathfrak{A}_p)) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathfrak{A}}'(K)^p \text{ .}$$

Comme on a un isomorphisme

$$\Gamma_K(S,H^1_S(\mathfrak{A}_p)) \simeq \frac{\mathfrak{A}_p(V-K)}{\mathfrak{A}_p(V)}$$

le théorème résulte du théorème 3 et du lemme 2.

5. Théorème de régularité

THÉORÈME 5. Soit Q un opérateur elliptique à coefficients analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ vérifiant

$$Qu = 0 .$$

Alors $u \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. En remplaçant éventuellement Q par $\bar{Q}Q$ on peut supposer la partie principale de Q à coefficients réels.

Plongeons $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$x \to (x,0)$$

et soit (x,t) les coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit

$$V = \Omega \times \mathbb{R} \qquad S = \Omega \times \{0\}$$

$$V^+ = \Omega \times \mathbb{R}^+ \qquad V^- = \Omega \times \mathbb{R}^-$$

$$P = Q + i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \qquad (p : \text{ordre de } Q)$$

$$Q_j = \gamma \circ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-j} \qquad j = 1 \dots p$$

(γ : opérateur de trace sur S).

Soit P_j des opérateurs frontières tels que l'on ait la formule des sauts :

$$P(f_o) = (Pf)_o + \sum_{j=1}^{p} {}^tQ_j(P'_j f)$$

où

$$P'_j f = P_j(f|V^+ - f|V^-) .$$

Soit

$$b = (P'_j)_{j=1}^{p} \quad .$$

Si $f \in \mathfrak{A}_P(V-S)$ on a

$$b(Qf) = Qb(f) .$$

En effet, si $\bar{f} \in \mathcal{B}(V)$ désigne un prolongement de f

$$P\bar{f} = Pu + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j(P'_j f)$$

$$PQ\bar{f} = PQu + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j(QP'_j f)$$

puisque $PQ = QP$, ${}^tQ_jQ = Q\,{}^tQ_j$. Comme $Q\tilde{f}$ est un prolongement de Qf ,

$$QP_j^!f = P_j^!Qf .$$

Soit $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ avec $Qu = 0$ et soit $f \in \mathfrak{A}_p(V-S)$ avec

$$b(f) = (u, 0 \dots 0) .$$

Un tel f existe d'après le théorème 4, et $Qf \in \mathfrak{A}_p(V)$. Soit $h_j \in \mathfrak{A}(\Omega)$ avec

$$Qh_j = Q_j(Qf) .$$

Soit h la solution analytique au voisinage de S des équations :

$$\begin{cases} Ph = 0 \\ Q_jh = h_j \qquad j = 1 \dots p . \end{cases}$$

On a

$$Qh = Qf$$

car ces deux fonctions vérifient l'équation $Pu = 0$ et que de plus :

$$Q_j(Qh) = Q(Q_jh) = Qh_j = Q_j(Qf) .$$

Par suite

$$P(f-h) = 0 \qquad\qquad Q(f-h) = 0$$

d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p (f-h) = 0 .$$

Cela entraîne que les restrictions de $f-h$, donc de f , aux composantes connexes de $V-S$ se prolongent analytiquement à travers S .

On en conclut, grâce à la formule des sauts, que $b(f) \in \tilde{\mathfrak{A}}(S)^p$ donc que $u \in \mathfrak{A}(\Omega)$.

COROLLAIRE. Soit R un opérateur elliptique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, P un opérateur elliptique sur un ouvert V voisinage de $S = \Omega \times \{0\}$ dans $\Omega \times \mathbb{R}$.

On suppose P et R à coefficients analytiques (dans V et dans Ω) et on suppose que $PR = RP$. Soit $V^+ = V \cap (\Omega \times \mathbb{R}^+)$, $f \in \mathfrak{A}(V^+)$ satisfaisant les équations :

$$Pf = 0 \qquad\qquad Rf = 0 .$$

Alors f se prolonge analytiquement à travers $\Omega \times \{0\}$.

Démonstration. Soit p l'ordre de P , P_j et Q_j les opérateurs frontières définis précédemment

$$f \in \mathfrak{A}_p(V-S) \qquad\qquad Rf = 0 .$$

Soit $u = b(f) \in \mathcal{B}(\Omega)^p$

$$Ru = 0$$

donc $u \in \mathcal{O}(\Omega)^p$, d'après le théorème précédent.

Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski que l'on peut trouver $g \in \mathcal{O}_P(S)$ tel que si l'on désigne par g^+ la fonction qui vaut g dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$ et 0 dans $\Omega \times \mathbb{R}^-$ on ait

$$b(g^+) = u .$$

Alors $b(f-g^+) = 0$ et par suite $f-g^+$, donc f, se prolonge à travers S.

6. Résolution flasque du faisceau $\mathcal{O}_P$

THÉORÈME 6. On a la suite exacte de faisceaux sur V :

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{B} \xrightarrow[P]{} \mathcal{B} \to 0 .$$

Démonstration. L'exactitude de la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

résulte du théorème précédent. Soit ω un ouvert relativement compact de V, V étant supposé sans composantes connexes compactes (ce qui est licite puisque le théorème est "local").

D'après le théorème 3, si $u \in \mathcal{B}(\omega)$, il existe $f \in \mathcal{O}_P(V-\bar{\omega})$ avec :

$$P\bar{f} = P\rho + \bar{u}$$

où $\bar{u} \in \mathcal{O}'(\bar{\omega})$ est un prolongement de u, $\bar{f} \in \mathcal{B}(V)$ un prolongement de f et où $\rho \in \mathcal{O}'(\bar{\omega})$.

Cela entraîne :

$$P((\bar{f}-\rho)|\omega) = u .$$

7. Remarques

1) Le théorème 6 permet de retrouver le théorème 4.

2) L'application b a aussi été introduite, indépendamment, par H. Komatsu [9].

3) Le problème des valeurs au bord "unilatérales" (problème de Dirichlet) est plus difficile. On peut démontrer [18] que si V est une variété à bord non compacte de bord S et si P est proprement elliptique d'ordre $2m$ on peut représenter les m-uples d'hyperfonctions de S comme valeurs au bord de solutions dans $V-S$ de l'équation $Pu = 0$. Ce théorème généralise un théorème de Lions et Magenes [10].

4) Le théorème 5 a été démontré par G. Bengel [1] et R. Harvey [7] pour les opérateurs à coefficients constants, et L. Boutet de Monvel et P. Kree [2] pour les coefficients analytiques. Notre démonstration est une adaptation de celle de Bengel. Il existe d'autres démonstrations de ce théorème (cf. par exemple [16]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BENGEL, Das Weyl'sche Lemma in der Theorie der Hyperfunktionen, Math. Zeit. t. 96 (1967) pp. 373-392.

[2] L. BOUTET de MONVEL et P. KREE, Pseudo-differential operators and Gevrey classes., Ann. Inst. Fourier 17 (1967), pp. 295-323.

[3] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux, Hermann, Paris 1964.

[4] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, J. Anal. Math. 2 (1952-53), pp. 243-280.

[5] — Espaces vectoriels topologiques, Soc. Mat. Saõ-Paulo 1964.

[6] — Local cohomology, Lecture Notes in Math. 41 (1967), Springer.

[7] R. HARVEY, Hyperfunctions and partial differential operators, Thesis, Stanford 1966.

[8] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer 1961.

[9] H. KOMATSU, Boundary values for solutions of elliptic equations, Congrès d'Analyse Fonctionnelle, Tokyo 1969.

[10] J.L. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes (7), Ann. Mat. pura appl. 63 (1963) pp. 201-224.

[11] J.L. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites elliptiques et applications. t. 1, Dunod 1968.

[12] B. MALGRANGE, Existence et approximations des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, t. 6, (1955-56) pp. 271-355.

[13] A. MARTINEAU, Les hyperfonctions de M. Sato, Sém. Bourbaki, 13e année, 214 (1960-61).

[14] M. SATO, Theory of hyperfunctions, J. Fac. Sci. Tokyo, t. 8 (1959-60) pp. 139-193 et pp. 287-437.

[15] P. SCHAPIRA, Théorie des hyperfonctions, Lecture Notes in Math. 126 (1970) Springer.

[16] P. SCHAPIRA, Problème de Dirichlet et solutions hyperfonctions des équations elliptiques, Bull. U.M.I. (4) N°3 (1969) pp. 367-372.

[17] P. SCHAPIRA, Théorème d'unicité de Holmgren et opérateurs hyperboliques dans l'espace des hyperfonctions, Anaïs da Acad. Brasil da Sci., à paraître.

[18] P. SCHAPIRA, Hyperfonctions et problèmes aux limites elliptiques. A paraître.

[19] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, T. 1 et 2, Hermann.