Yvonne Choquet-Bruhat

Problème de Cauchy global en relativité générale

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1969-1970), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___2_1_0>

PROBLÈME DE CAUCHY GLOBAL EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par Yvonne CHOQUET-BRUHAT

INTRODUCTION

Je me propose d'exposer ici un théorème global d'unicité géométrique pour les solutions des équations d'Einstein, dû à R. Geroch et moi-même [8]. Un énoncé plus faible avait été obtenu précédemment (cf. [8]).

La méthode utilisée pour la démonstration de l'existence d'une solution maximale unique d'un problème de Cauchy pour les équations d'Einstein (définitions plus loin) repose sur la validité des théorèmes locaux d'existence et d'unicité (et non sur la forme particulière des équations d'Einstein), et sur le fait que la solution est une variété, munie d'une métrique globalement hyperbolique au sens de J. Leray, que l'on construit en résolvant le problème de Cauchy(*). Notre démonstration s'applique donc à tous les problèmes du même type (en particulier à tous les cas où les équations d'Einstein sont couplées avec des équations d'évolution de milieux matériels, de type hyperbolique(**)). Nous traiterons dans la suite, pour plus de simplicité, les équations d'Einstein du vide.

1. ÉQUATIONS D'EINSTEIN DU VIDE. PROBLÈME DE CAUCHY INTRINSÈQUE

Définition I. Un espace-temps est une variété différentiable de dimension 4, V_4, (de classe C^p, $p \geqq 1$), muni d'une métrique riemannienne hyperbolique g (de signature $+\ldots$), (de classe C^q, $q \geqq 0$).

Deux espaces-temps isométriques sont considérés comme identiques.

Un espace-temps (V_4, g) est dit einsteinien si le tenseur de Ricci R de son tenseur métrique g est nul, c'est-à-dire s'il satisfait les "équations d'Einstein" qui s'écrivent en coordonnées locales :

$$(1.1) \qquad R_{\alpha\beta} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\lambda} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\lambda\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} = 0$$

où

$$\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha , \qquad \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) .$$

Le problème de Cauchy, pour (1.1), est la détermination d'une solution g à partir de données initiales (ici la métrique et ses dérivées premières, car le système (1.1)

(*) Le théorème serait faux si l'on cherchait à construire la métrique sur une variété différentiable donnée.

(**) strict ou non.

est du 2e ordre) sur une sous-variété S de dimension 3. Ce problème est mal posé (le déterminant caractéristique de (1.1) est identiquement nul) : les données initiales ne peuvent pas être quelconques, et si le problème a une solution elle n'est pas unique(*). Les équations que doivent satisfaire les données initiales ne dépendent que des éléments géométriques (1ère et 2ème formes quadratiques fondamentales) caractérisant le plongement de S dans (V_4,g). Elles s'expriment en coordonnées locales (en prenant $x^0 = 0$ comme équation locale de S) :

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &\bar{R} + K^i{}_j K^j{}_i - (K_i{}^i)^2 = 0 \\ &\bar{\nabla}_j (K^i{}_j - \delta^i{}_j K^h{}_h) = 0 \end{aligned} \qquad i,j = 1,2,3$$

($\bar{R}$ courbure riemanienne scalaire et $\bar{\nabla}$ dérivation covariante de $\bar{g}$, métrique induite sur S par g ; $K_i{}^j$ courbure "extrinsèque" de S dans V_4).

Un problème fondamental est la résolution(**) globale du système (1.2).

On est ainsi conduit à la définition intrinsèque suivante du problème de Cauchy.

Définition II. Une donnée initiale $\mathcal{J}$, pour les équations d'Einstein du vide (1.1), est une variété différentiable Σ de dimension 3, une métrique riemanienne $\bar{g}$ sur Σ, définie > 0, et un tenseur sur Σ, d'ordre 2 symétrique K, vérifiant les équations (1.2).

Définition III. Une solution du problème de Cauchy, donnée initiale $\mathcal{J}$, pour les équations d'Einstein (1.1) est un espace temps $M = (V_4,g)$ à tenseur de Ricci nul ($R_{\alpha\beta} = 0$), tel qu'il existe un difféomorphisme Λ de Σ sur une sous-variété S de M, les deux formes quadratiques fondamentales induites sur S par M (métrique et courbure extrinsèque de S dans M) coïncidant avec l'image par Λ de $\bar{g}$ et K.

Une solution M est dite un développement de $\mathcal{J}$ si M est globalement hyperbolique et admet S pour surface de Cauchy : nous allons rappeler ces notions dans le paragraphe suivant.

2. GLOBALE HYPERBOLICITÉ

Cette notion a été introduite par J. Leray [1] pour des opérateurs hyperboliques d'ordre quelconque. Nous nous bornerons ici au cas du 2e ordre, associé à une métrique riemanienne hyperbolique g sur une variété différentiable V_n.

(*) En fait elle l'est, localement, à une isométrie près (cf. [6]).

(**) Ce problème a été résolu, sous des hypothèses de champ gravitationnel faible, avec S homéomorphe à R^3, par Mme A. Vaillant.

La métrique g définit sur V_n un champ continu de cônes convexes fermés C_x ($g_x(x,x) = 0$, dans l'espace tangent T_x à V_n en x). On suppose que l'on peut définir globalement, continuement, sur V_n les champs de demi-cônes C_x^+ (cône futur) et C_x^- (cône passé), c'est-à-dire que V_n, g est munie d'une orientation temporelle.

Un chemin(*) différentiable orienté de V_n est dit temporel si sa demi-tangente positive est, en chaque point x, dans C_x^+.

L'ensemble des chemins temporels sur V_n est la fermeture de l'ensemble des chemins temporels différentiables, dans la topologie définie par la métrique

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \operatorname*{Inf}_{\mathcal{P}} \sup_{t \in R} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \tag{2.1}$$

($\mathcal{P}$ ensemble des paramétrisations des chemins γ_1 et γ_2, $\| \ \|$ distance dans une métrique proprement riemanienne complète de V_n).

On montre qu'un chemin temporel est rectifiable.

On appelle émission ε_x^+ l'image dans V_n de l'ensemble des chemins temporels d'origine x, émission rétrograde ε_x^- l'image de l'ensemble des chemins temporels aboutissant en x.

<u>Remarque</u>. ε_x^+, ε_x^- et $\varepsilon_x = \varepsilon_x^+ \cup \varepsilon_x^-$ ne sont pas nécessairement des fermés : exemple, l'espace de Minkovski privé d'un point.

Une variété munie d'une métrique riemanienne hyperbolique, à orientation temporelle, est dite <u>globalement hyperbolique</u> si <u>l'ensemble des chemins temporels joignant deux points</u> x <u>et</u> y <u>est compact</u> (dans la topologie (2.1) de l'espace des chemins).

On montre (Hawking) que cette définition est équivalente à :

1) il n'y a pas de chemin temporel fermé ;

2) $\varepsilon_x^+ \cap \varepsilon_y^-$ est compact pour tous x, $y \in V_n$.

J'ai démontré d'autre part qu'elle impliquait la "forte causalité" de Penrose-Hawking (il n'y a pas de chemins temporels fermés ni presque fermés).

Le théorème suivant, énoncé par J. Leray, fournit de nombreux exemples de variétés globalement hyperboliques :

THÉORÈME. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> (V_n, g) <u>soit globalement hyperbolique est que, dans une métrique proprement riemanienne complète, sur</u> V_n, <u>tous les chemins temporels joignant deux points</u> x <u>et</u> y <u>aient une longueur bornée.</u>

(*) Un chemin est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés, applications continues de $\mathbb{R}$ dans V_n, $t \to \varphi(t) \sim t' \to \psi(t')$ si $\psi = \varphi \circ \theta$ avec $t' \to \theta(t)$ continue monotone.

Une démonstration possible est de choisir sur les chemins temporels joignant x à y un paramètre t tel que $\frac{dt}{ds} \geqq 1$ (où s est la longueur dans la métrique proprement riemanienne). L'ensemble de ces chemins ainsi paramétrés forment, à cause de la définition des chemins temporels et de la semi-continuité inférieure de la longueur, un sous-ensemble fermé de l'espace des applications continues de R dans V_n qui, sous l'hypothèse du théorème satisfait aux conditions de validité du théorème d'Ascoli.

Deux propriétés essentielles des variétés globalement hyperboliques sont

- la continuité de l'émission ;
- l'existence de "surfaces de Cauchy".

Une <u>surface de Cauchy</u> S , pour une variété hyperbolique, est une sous-variété telle que tout chemin temporel sans extrémité coupe S' une seule fois. L'existence, dans une variété globalement hyperbolique, d'une famille de surfaces de Cauchy, a été démontrée par Geroch [5].

3. THÉORÈMES SEMI-LOCAUX D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

THÉORÈME I. <u>Toute donnée initiale</u> $\mathcal{J}$ <u>admet un développement</u> M .

La démonstration consiste à recouvrir Σ par un atlas (Σ_a,φ_a) et à résoudre dans un ouvert de R^4 un problème de Cauchy sur $\varphi_a(\Sigma_a)$. Les données de Cauchy $g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ sont déterminées par l'image par φ_a de $\bar{g}$ et K et des conditions de coordonnées, on résoud ce problème pour les équations d'Einstein en coordonnées harmoniques qui sont un système de type classique :

$$(3.1) \qquad g^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}.g^{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}(\partial_\gamma g^{\lambda\mu}, g^{\lambda\mu}) = 0$$

qui a une solution unique si (W_2^μ espace de Sobolev, cf.Leray-Dionne pour V_2^μ)

$$g^{\lambda\mu}|_{x^\circ=0} \in W_2^\mu \qquad \partial_\lambda g^{\mu\nu}|_{x^\circ=0} \in V_2^{\mu-1}, \quad \mu \geqq 5$$

$g^{\lambda\mu}$ uniformément hyperbolique sur $x^\circ = 0$, et $x^\circ = 0$ uniformément spatial.

On montre qu'une solution de (3.1), avec les hypothèses faites sur les données initiales, vérifie

$$R_{\alpha\beta} = 0 .$$

On construit ainsi un développement M_a de $(\Sigma_a, \bar{g}, K)$.

Soient M_a et M_b deux tels développements de Σ_a et Σ_b respectivement, restreints(*) à des voisinages de S_a et S_b tels que les sous-ensembles $U_a \subset M_a$ et $U_b \subset M_b$, développements de $\varphi_a(\Sigma_a \cap \Sigma_b)$ et $\varphi_b(\Sigma_a \cap \Sigma_b)$ soient isométriques (isométrie ψ_{ab} telle que $\varphi_a^{-1}\psi_{ab}\varphi_b$ = identité de Σ). Soit alors M le quotient de la réunion disjointe des M_a par la relation d'équivalence

$$x_a \sim x_b \quad \text{si} \quad x_a \in U_a \text{ , } x_b = \psi_{ba}x_a .$$

(*) Cette restriction est possible d'après le théorème local d'unicité géométrique (cf. [6]). On suppose que Σ est paracompacte.

On vérifie, en utilisant l'unicité locale et la continuité de l'émission, que M est ainsi muni d'une structure de variété différentiable hyperbolique, séparée, et est un développement de $\mathcal{J}$.

<u>Définition</u> IV. Soient M et M' deux développements d'une même donnée $\mathcal{J} = (\Sigma, \bar{g}, K)$. Soient Λ et Λ' les isométries de Σ sur $S \subset M$ et $S' \subset M'$ respectivement. On dira que M est une extension de M' s'il existe une isométrie ψ de M' sur un voisinage de S dans M telle que $\Lambda^{-1}\psi\Lambda'$ soit l'identité sur Σ. Une telle isométrie sera dite admissible.

THÉORÈME II. <u>Deux développements d'une donnée</u> $\mathcal{J}$ <u>sont extensions d'un même développement</u>.

<u>Preuve</u>. Le théorème local d'unicité montre l'existence d'une isométrie ψ_a entre voisinages U_a de S_a dans M et U'_a de S'_a dans M' (développements de S_a et S'_a, images du même domaine $\Sigma_a \subset \Sigma$). On montre que les isométries ψ_a et ψ_b coïncident dans $U_a \cap U_b$ (d'où l'existence de l'isométrie ψ de $U = \bigcup_a U_a$ dans $U' \subset M'$) à l'aide du

LEMME 1. <u>Si deux ouverts d'une variété différentiable de dimension</u> n <u>sont isométriques dans une isométrie conservant point par point une sous-variété différentiable de dimension</u> $n-1$ <u>ils coïncident, et l'isométrie est l'identité</u>.

4. THÉORÈME GLOBAL D'UNICITÉ

Nous allons démontrer maintenant le

THÉORÈME III. <u>Toute donnée initiale</u> $\mathcal{J}$ <u>admet un développement maximal et un seul</u>.

La définition de "maximale" est relative à la notion d'ordre partiel suivante (qui en est une, pour l'ensemble $\mathfrak{M}$ des développements de $\mathcal{J}$, à cause du lemme 1 du § 3).

<u>Définition</u> V. Soient M et M' deux développements d'une donnée initiale $\mathcal{J}$. On dira que $M' \leq M$ si M est une extension de M'.

<u>Preuve du théorème</u>

1°) Tout développement admet une extension maximale. Soit en effet M_α un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{M}$. Considérons le quotient de l'union disjointe des M_α par la relation (qu'on prouve aisément être une relation d'équivalence)

$$x_\alpha \sim x_\beta \quad , \quad x_\alpha \in M_\alpha \quad , \quad x_\beta \in M_\beta$$

si et seulement si

$$x_\beta = \psi_{\beta\alpha} x_\alpha \quad , \quad M_\alpha \leq M_\beta \quad \text{ou} \quad x_\alpha = \psi_{\alpha\beta} x_\beta \quad , \quad M_\beta \leq M_\alpha$$

où $\psi_{\beta\alpha}$ (resp. $\psi_{\alpha\beta}$) est l'isométrie appliquant M_α dans M_β (resp. M_β dans M_α) : on voit aisément que l'on obtient ainsi un développement de $\mathcal{J}$ qui majore tous les M_α. Tout sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{m}$ a donc un majorant d'où (lemme de Zorn) l'existence d'un développement maximal M.

Remarque. Le raisonnement précédent ne fait pas intervenir les équations d'Einstein : il est valable pour des variétés riemanniennes quelconques.

2°) Tout développement M' admet M pour extension (c'est-à-dire $M' \leq M$, pour tout M').

Nous allons, pour la démonstration, construire un développement $\tilde{M}$ qui est une extension de M et M'.

LEMME 2. Si M' et M sont deux développements de $\mathcal{J}$ il existe un voisinage maximal unique U' développement de S' dans M' tel que U' soit isométrique à un voisinage de S dans M dans une isométrie admissible.

Une relation d'ordre partiel sur les couples (U',ψ) où U' est un développement de S' dans M' et ψ une isométrie de U' sur un développement de S dans M, est donnée par

$$(4.1) \qquad (U'_1,\psi_1) \leq (U'_2,\psi_2) \quad \text{si} \quad U'_1 \subset U'_2 \quad \text{et} \quad \psi_2 = \psi_1 \quad \text{sur} \quad U'_1$$

l'existence de l'élément maximal unique (et le fait que (4.1) est un ordre partiel) repose sur le fait que, si (U',ψ) et $(\hat{U}',\hat{\psi})$ sont deux tels couples, les isométries ψ et $\hat{\psi}$ coïncident dans $U' \cap \hat{U}'$ (cf. lemme 1), d'où on déduit l'existence d'une isométrie de $U' \cup \hat{U}'$ sur un développement de S dans M.

Soit alors (U',ψ) l'élément maximal du lemme 2 définissons $\tilde{M}$ comme le quotient de l'union disjointe $M \cup M'$ par la relation d'équivalence

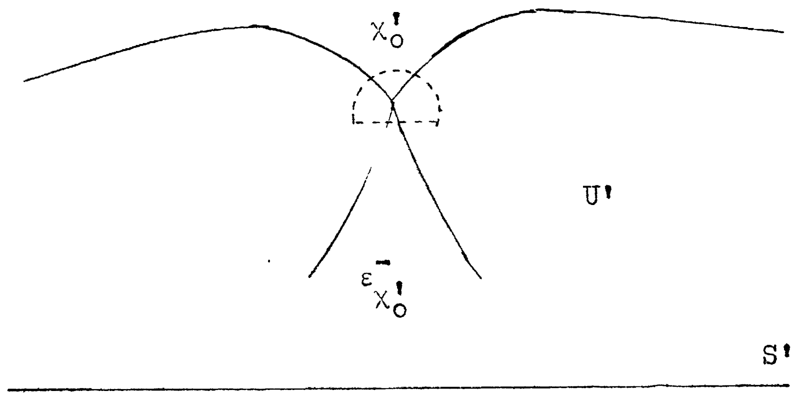
$$x \sim x' \text{ si et seulement si } x' \in U' \quad , \quad x = \psi(x') .$$

Il est facile de montrer que $\tilde{M}$ est muni par cette relation d'une structure différentiable et d'une métrique hyperbolique. Montrons que $\tilde{M}$ est séparée.

Il est clair que si on n'a pas $x' \in \partial U'$ (où $\partial U'$ désigne la frontière de U' dans M') x' a, avec un point quelconque x qui ne lui est pas identique, des voisinages disjoints. Désignons par H l'ensemble des points x' de $\partial U'$ où l'éventualité précédente n'a pas lieu. On démontre que le point x correspondant est unique et appartient à $\partial\psi(U')$ (frontière de $\psi(U')$ dans M).

LEMME 3. Si $x' \in H$ tout chemin temporel dans $\partial U'$ passant par x' est entièrement dans H, et a une extrémité x'_0.

Ce lemme résulte de la globale hyperbolicité de M et de M'. Les chemins temporels issus de x'_o sont entièrement dans U'



Les chemins temporels issus du point $x_o \in M$ associé à x'_o , sont entièrement dans $\psi(U')$: on peut alors, en résolvant le problème de Cauchy pour des morceaux de surface spatiale, situés dans U' (resp. $\psi(U')$) et voisins de x'_o (resp. x_o), construire un couple $(\hat{U}', \hat{\psi})$ strictement plus grand que (U', ψ') - ce qui contredit la maximalité de (U', ψ').

Nous avons ainsi construit un développement $\tilde{M}$ de $\mathcal{J}$ qui est une extension de M et M'. Il est identique à M puisque M est maximal, donc M est une extension de M'.

Problème : affaiblir les hypothèses sur la régularité de g : une approche dans ce sens figure dans [6] (1968).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. LERAY. Hyperbolic differential equations, Princeton 1952.
[2] R. PENROSE. Phys. Rev. Lett. 14, 57, 1965
[3] S. HAWKING. Proc. Roy. Soc. 294 A 511, 1966.
[4] A. LICHNEROWICZ. Théories relativistes de la gravitation, Masson, 1955.
[5] R. GEROCH. The domaine of dependence, Jour. of Math. Phys. 1969.
[6] Y. CHOQUET-BRUHAT. Acta Mat., 1952 et Ann. Poincaré, 1968.
[7] Y. CHOQUET-BRUHAT. Battelle Seattle rencontre, Benjamin, 1967.
[8] Y. CHOQUET-BRUHAT. Bull. Soc. Mat., 1968.
[9] Y. CHOQUET-BRUHAT.and R. GEROCH. Comm. on Maths. Phys. 1969.
[10] P. DIONNE. Jour. Analyse Math., 1962.