Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Bernard Malgrange

Pseudo-groupes de Lie elliptiques

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1969-1970), p. 1-59
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___1_1_0>

TABLE DES MATIÈRES

PSEUDO-GROUPES DE LIE ELLIPTIQUES

par

Bernard MALGRANGE

Introduction

Les notes qui suivent sont, en principe, la rédaction de conférences faites au Séminaire Leray en janvier-février 1968, et consacrées à la généralisation du théorème de Newlander-Nirenberg dans le cadre de la théorie des pseudo-groupes de Lie. Entre temps, une nouvelle version de la théorie "des déformations" de Spencer, inspirée du calcul différentiel dans les espaces analytiques de Grothendieck [1], a été élaborée en collaboration par lui-même et l'auteur ; on en trouvera ici une première rédaction (une rédaction plus définitive paraîtra ultérieurement, dans un article en commun).

D'autre part, pour faciliter la lecture, nous avons repris la théorie à partir du début, à une exception près : nous supposons connus les résultats de la théorie formelle des équations aux dérivées partielles que nous nous contentons de rappeler au § 1 . Cela nous a amené à redémontrer au passage un certain nombre de résultats bien connus des spécialistes, pour lesquels nous n'avons pas toujours cherché à donner toutes les références existantes ; nous les prions de bien vouloir nous en excuser.

Je tiens à remercier ici D. Spencer, qui m'a permis d'inclure dans ces notes une version de notre travail commun, et C. Buttin qui m'a aidé de façon décisive à comprendre la version originale (Spencer [1]) de la théorie.

1. Rappels sur la cohomologie de Spencer

Nous utiliserons la théorie formelle des équations différentielles linéaires de Spencer, Quillen, Goldschmidt, etc..., telle qu'elle est développée dans Goldschmidt [1]. Ce paragraphe est seulement destiné à fixer les notations et la terminologie que nous emploierons dans la suite.

Soit X une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, dont la dimension sera notée n. Elle sera toujours supposée paracompacte et connexe (en fait, les résultats étant locaux, on pourrait pratiquement se restreindre aux ouverts de R^n). Si E est un fibré vectoriel sur X , on note $\underline{E}$ le faisceau de ses sections ; si E est le fibré trivial $X \times \mathbb{R}$, $\underline{E}$ est le faisceau des fonctions différentiables à valeurs réelles sur X ; on écrit dans ce cas $\underline{E} = \mathcal{O}_X$.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules (nous dirons simplement, comme d'habitude, "un $\mathcal{O}_X$-module"), nous identifierons $\mathcal{F}$ à l'ensemble de ses germes de sections " $s \in \mathcal{F}$ " signifie donc " s est un germe de section de $\mathcal{F}$ ". Nous désignerons par "section de $\mathcal{F}$ " une section sur un ouvert de X non nécessairement explicité. Lorsqu'intervient une loi de composition entre faisceaux, les germes (resp. les sections) considérés seront sous-entendus au même point (resp. sur le même ouvert). Enfin, pour $a \in X$, la "fibre en a " de $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F}_a \otimes_{\mathcal{O}_{X,a}} \mathbb{R}$ sera notée $\mathcal{F}(a)$.

Soit Δ la diagonale de X^2, Π_1 et Π_2 les deux projections $X^2 \to X$, $\Pi_1|_\Delta$ et $\Pi_2|_\Delta$ leurs restrictions à Δ. Un faisceau sur X (resp. sur Δ) sera toujours identifié à son image réciproque par $\Pi_1|_\Delta$ (resp. à son image directe par l'injection $\Delta \to X^2$), (ceci n'aura pas d'inconvénients ici). Soit $\mathfrak{J}^{k+1}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{X^2}$ formé des fonctions qui s'annulent à l'ordre k sur Δ (d'après un lemme élémentaire sur les fonctions différentiables, $\mathfrak{J}^{k+1}$ est la puissance $(k+1)$ième de $\mathfrak{J}^1 = \mathfrak{J}$ faisceau des fonctions nulles sur Δ). Avec les identifications précédentes, on a $\mathcal{O}_{X^2}/\mathfrak{J}^{k+1} = \underline{J}^k$, J^k étant le fibré des jets d'ordre k de sections de $\mathcal{O}_X$; en coordonnées locales, et avec les notations usuelles, cette égalité s'écrit ainsi : la fonction

$$x \mapsto (a_\alpha(x))_{|\alpha| \leq k}$$

est identifiée à la classe de la fonction

$$(x,x') \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \frac{(x'-x)^\alpha}{\alpha!}$$

modulo les monômes $(x'-x)^\beta$, $|\beta| = k+1$

(Nous écri ons simplement dans la suite mod $(x'-x)^{k+1}$ ou mod $\mathfrak{J}^{k+1}$)

En particulier la fonction $x \mapsto a(x)$ est identifiée à : $(x,x') \longmapsto a(x) \bmod \mathfrak{J}^{k+1}$ et l'application "jet d'ordre k " est donnée par

$$j^k(a)(x,x') = a(x') = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha a(x) \frac{(x'-x)^\alpha}{\alpha!} \bmod (x'-x)^{k+1} .$$

Ces deux applications de $\mathcal{O}_X$ dans $\underline{J}^k$ définissent sur $\underline{J}^k$ deux structures de $\mathcal{O}_X$-module; pour les distinguer, on écrira la première à gauche et la seconde à droite. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, on pose $\underline{J}^k(\mathcal{F}) = \underline{J}^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$; si $\mathcal{F} = \underline{E}$, E fibré vectoriel sur X , on a $\underline{J}^k(\underline{E}) = \underline{J^k(E)}$, $J^k(E)$ étant le fibré des jets d'ordre k de sections de E (cette égalité s'écrit en coordonnées locales de la même manière que dans le cas particulier considéré plus haut, où E est le fibré trivial, et nous laissons au lecteur le soin de l'expliciter). On peut aussi, ce qui revient au même, poser $\underline{J}^k(\mathcal{F}) = \underline{J}^k \otimes_{\mathcal{O}_{X^2}} \Pi_2^*(\mathcal{F})$, avec des notations évidentes.

Il sera commode d'employer le langage suivant : on considère Δ , muni du faisceau $\underline{J}^k$ comme un "espace différentiable" i.e. une variété différentiable généralisée "avec éléments nilpotents", ceci par analogie avec le cas des espaces analytiques au sens de Grothendieck [1] ; comme cet auteur, nous noterons cet "espace" $\Delta^{(k)}$, et nous poserons $\underline{J}^k = \mathcal{O}_{\Delta^{(k)}}$. Il sera commode de parler par la suite de "champs de vecteurs sur $\Delta^{(k)}$", des "automorphismes Π_1-projetables de $\Delta^{(k)}$" etc... Tout cela se définira aisément dans chaque cas par passage en quotient, et ne nécessite donc pas la fabrication en bonne forme des espaces différentiables et de leurs morphismes (essentiellement, d'ailleurs, seuls les automorphismes interviennent ici) : bref, le calcul qui intervient ici consiste seulement à travailler dans les parties principales d'un certain ordre le long d'une sous-variété, en l'occurence Δ dans X^2, ce qui n'est qu'une variante triviale du calcul différentiel à la Whitney sur les fermés d'une sous-variété. A titre de distraction, et à l'usage des lecteurs avides de sorites, nous donnons cependant en appendice une définition des espaces différentiables copiée sur les "espaces analytiques banachiques" de Douady [1].

Soit T^* le fibré cotangent de X ; il est commode pour la suite de considérer $\mathcal{O}_X$ comme opérant à droite sur $\underline{T}^*$ (et, plus généralement, sur le faisceau $\underline{\Lambda^p T^*}$ des p-formes sur X). En remontant les formes différentielles sur X à X^2 par Π_1^*, on peut considérer les éléments de

$$\underline{\Lambda^p T^*} \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{J}^k$$

comme des germes de formes différentielles sur X^2, modulo $\mathcal{J}^{k+1}$ (ou, si l'on préfère, comme des germes de formes différentielles sur $\Delta^{(k)}$). Désignant alors par D la différentielle extérieure par rapport à la première variable seule, on trouve le complexe de Spencer :

$$(1.1)_k \quad 0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{j^k} \underline{J}^k \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{J}^{k-1} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \underline{\Lambda^n T^*} \otimes \underline{J}^{k-n} \to 0$$

(à partir de maintenant, on convient que $J^\ell = 0$ si $\ell < 0$, et l'on omet d'écrire $\mathcal{O}_X$ sous le symbole $\otimes$). En coordonnées locales, si $a = (a_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$, i.e. si

$$a(x,x') = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \frac{(x'-x)^\alpha}{\alpha!} \bmod (x'-x)^{k+1} ,$$

on aura :

$$Da = \sum_i dx_i \otimes \frac{\partial a}{\partial x_i} \bmod (x'-x)^k = \left(\sum_i dx_i \otimes \left[\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} - a_{\alpha+\varepsilon_i}\right]\right)_{|\alpha| \leq k-1}$$

ε_i désignant le multi-entier $(0,\ldots,0,1,\ldots,0)$, le 1 à la $i^{\text{ème}}$ place. De même pour les formes de degré supérieur. On démontre aisément (voir par exemple Goldschmidt [1]) que ce complexe est acyclique pour tout $k \geq 0$.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module ; en tensorisant à droite le complexe précédent par $\mathcal{F}$, on trouve, avec $j^k = j^k \otimes \mathrm{id}$, $D = D \otimes \mathrm{id}$ par abus de notation, et en remarquant que D est $\mathcal{O}_X$-linéaire à droite (mais non à gauche !), un complexe.

$$(1.2)_k \qquad 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{j^k} \underline{J}^k(\mathcal{F}) \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{J}^{k-1}(\mathcal{F}) \to \ldots .$$

Ce complexe est encore acyclique puisque le précédent est localement libre. Pour $\mathcal{F} = \underline{E}$ (E, fibré vectoriel sur X), on a encore des expressions en coordonnées locales analogues aux précédentes, que nous laissons au lecteur le soin d'écrire.

Soit enfin $\bar{\omega}_k$ la projection naturelle $J^{k+1} \to J^k$; le noyau de cette application s'identifie à $S^{k+1}(T^*)$ (S^k = puissance k-ième symétrique). Sur $\underline{S^k(T^*)}$, la restriction $-\delta$ de D est $\mathcal{O}_X$-linéaire à gauche (car les deux structures de $\mathcal{O}_X$-module de $\underline{J}^k$ coïncident) ; en coordonnées locales on a, pour $a = (a_\alpha)_{|\alpha|=k}$

$$\delta a = (\sum_i dx_i \otimes a_{\alpha+\varepsilon_i})_{|\alpha|=k-1} = \sum_i dx_i \otimes \frac{\partial a}{\partial x'_i} \bmod (x'-x)^k$$

δ est donc défini fibre par fibre ; si E est un fibré vectoriel sur X on en déduit un complexe

$$(1.3)_k \quad 0 \to S^k(T^*) \otimes E \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^{k-1}(T^*) \otimes E \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta}$$
$$\to \Lambda^p T^* \otimes S^{k-p}(T^*) \otimes E \xrightarrow{\delta} \ldots$$

dont le complexe des sections, dans le cas où $\mathcal{F} = \underline{E}$, est simplement le noyau de la projection $(1.2)_k \to (1.2)_{k-1}$.

Rappelons rapidement comment ces complexes interviennent dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires (voir Goldschmidt [1]). Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X, et soit φ un morphisme $J^k(E) \to F$; désignons encore par φ le morphisme de faisceaux associé ; à φ correspond de manière biunivoque un opérateur différentiel $\Phi : \underline{E} \to \underline{F}$ à savoir $\Phi = \varphi \circ j^k$; par abus de langage, on appelle φ un "opérateur différentiel d'ordre k". On définit alors le prolongement $p^\ell(\varphi)$ comme l'opérateur différentiel obtenu en dérivant Φ jusqu'à l'ordre ℓ, ce qui, en langage savant, s'écrit ainsi : on considère l'injection naturelle $\lambda^\ell : J^{k+1} \to J^\ell(J^k)$ définie ainsi : on prend une section s de $\mathcal{O}_X$ au voisinage d'un point x_o, d'où par j^k une section de J^k puis par j^ℓ une section de $J^\ell(J^k)$ dont la valeur en a ne dépend évidemment que de $j^{k+\ell}(s)(x_o)$ (en termes de faisceaux, λ^ℓ est l'application qui, à $a(x,x') \bmod (x'-x)^{k+\ell+1}$ fait correspondre $a(x,x'')\{\bmod(x-x')^{\ell+1},(x'-x'')^{k+1}\}$, qu'on peut considérer comme une fonction sur X^3 modulo le passage au quotient indiqué ; "l'espace différentiable" correspondant est un voisinage infinitésimal de la diagonale dans X^3, que nous noterons $\Delta^{(\ell,k)}$) ; on considère alors

$$\varphi^{\ell} = \mathrm{id} \otimes \varphi : \underline{J}^{\ell} \otimes \underline{J^k(E)} \to \underline{J^{\ell}(F)} ,$$

et l'on pose

$$p^{\ell}(\varphi) = (\lambda^{\ell})^{-1} \circ \varphi_{\ell} : \underline{J^{\ell+k}(E)} \to \underline{J^{\ell}(F)} ;$$

le morphisme de fibrés associé est encore noté $p^{\ell}(\varphi)$. On vérifie facilement qu'on a : $p^m(p^{\ell}(\varphi)) = p^{m+\ell}(\varphi)$.

Pour tout $x \in X$, posons $R^{k+\ell}(x) = \ker p^{\ell}(\varphi)(x)$: la collection des $R^{k+\ell}(x)$ est un "fibré à fibre variable", donc on dit que "c'est un fibré" si le rang de la fibre est constant ; une section a de $J^{k+\ell}(E)$ est dite section de $R^{k+\ell}$ si, $\forall\, x$, $a(x) \in R^{k+\ell}(x)$; ces sections définissent un faisceau, noté $\underline{R}^{k+\ell}$ (qui ne détermine $R^{k+\ell}$ que dans le cas où ce dernier est un fibré). On vérifie facilement que les $\underline{R}^{k+\ell}$ se déterminent par récurrence, de la manière suivante : $a \in \underline{R}^{k+\ell+1}$ si et seulement si $\bar{\omega}_{k+\ell}\, a \in \underline{R}^{k+\ell}$ et $Da \in \underline{T}^* \otimes \underline{R}^{k+\ell}$; d'où, par restriction de $(1.2)_{\ell}$ le complexe de Spencer (on pose par exemple $R^{\ell} = J^{\ell}(E)$ si $\ell < k$)

$$(1.4)_{\ell} \qquad 0 \to (\mathrm{Sol}) \xrightarrow{j^{\ell}} \underline{R}^{\ell} \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell-1} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \Lambda^p \underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell-p} \xrightarrow{D} \cdots$$

où (Sol) désigne les solutions a de $\Phi(a) = 0$ (on vérifie immédiatement que le noyau de $\underline{R}^{\ell} \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell-1}$ ne dépend pas de ℓ , si $\ell \geqq k$, et pour $\ell = k$, il est clair qu'il est bien égal à (Sol)).

Posons d'autre part, $\forall\, x \in X$ $g^{\ell}(x) = R^{\ell}(x) \cap [S^p(T^*)(x) \otimes E(x)]$; la collection des $g^{\ell}(x)$ est encore "un fibré à fibre variable", et l'on vérifie que le complexe $(1.3)_{\ell}$ donne par restriction un complexe

$$(1.5)_{\ell} \qquad 0 \to g^{\ell} \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g^{\ell-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda^p\, T^* \otimes g^{\ell-p} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

(bien entendu, ce complexe ne sera obtenu à partir de la projection $(1.4)_{\ell} \to (1.4)_{\ell-1}$ que dans le cas où des hypothèses de régularité convenables sur les R^m sont satisfaites). On désigne par $H^{\ell-p,p}(x)$ le p-ième groupe de cohomologie de $(1.5)_{\ell}$ au point x, et par $H^{\ell-p,p}$ la collection des $H^{\ell-p,p}(x)$. On dit que " g^{ℓ} (ou R^{ℓ}) est p-acyclique " si $H^{m,q} = 0$ pour $m \geqq \ell$, $0 \leqq q \leqq p$.

Lorsque R^{ℓ} $(\ell \geqq k)$ est un fibré, les $R^{\ell+m}$ $(m \geqq 0)$ sont égaux à $\lambda_m^{-1}\, J^m(R^{\ell})$, et donc "ne dépendent que de R^{ℓ} ". On dira alors que R^{ℓ} est "une équation différentielle".

DÉFINITION (1.6). <u>Nous dirons que " R^{ℓ} est formellement intégrable" si les $R^{\ell+m}$ sont des fibrés et si toutes les projections</u> $R^{m+\ell+1} \longrightarrow R^{m+\ell}$ <u>sont surjectives</u> $(m \geqq 0)$.

Rappelons le résultat suivant (Goldschmidt [1]) :

(1.7) <u>Supposons que</u> $R^{\ell+1}$ <u>soit un fibré, que</u> $R^{\ell+1} \to R^{\ell}$ <u>soit surjectif, et que</u> g^{ℓ} <u>soit 2-acyclique. Alors</u> R^{ℓ} <u>est formellement intégrable</u>.

Si R^{ℓ} est formellement intégrable, il est clair que les $g^{\ell+m}$ sont des fibrés pour $m \geqq 1$; supposons en outre R^{ℓ} 2-acyclique, et désignons par K^m le complexe $(1.4)_m$; par la suite exacte de cohomologie, on voit alors facilement que la projection $H^1(K^{\ell+m+1}) \to H^1(K^{\ell+m})$ est bijective pour tout $m \geqq 0$.

On a encore les résultats suivants :

(1.8) <u>Si</u> R^{ℓ} <u>est formellement intégrable et 2-acyclique, pour</u> $m \geqq 0$ <u>le complexe</u> $K^{\ell+m+1}$ <u>est "formellement exact" en</u> $\underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell+m}$ (i.e. il est exact en tout point x dans les "sections séries formelles" en x). <u>De plus, dans le cas analytique</u> (X, φ etc. analytiques, et le complexe est restreint aux sections analytiques) <u>ce complexe est exact en</u> $\underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell+m}$.

On montre que ce théorème équivaut à un théorème d'existence pour les équations avec second membre. Il ne s'étend donc pas en général aux sections $\mathscr{C}^\infty$ d'après les contre-exemples classiques de Lewy et Hörmander.

<u>Remarque</u> (1.9). Il semblerait plus simple <u>a priori</u> d'effectuer les prolongements "par les faisceaux" au lieu de le faire "fibre par fibre". Ce point de vue est trop grossier et ne permet pas d'obtenir des énoncés aussi simples que ceux que nous venons de rappeler : par exemple, il identifie l'équation (d'ordre 0) $xf = 0$ et l'équation $f = 0$. Un autre point de vue (Malgrange [1]) consiste à travailler sur les équations elles-mêmes ; si l'on veut, cela reviendrait à travailler dans les "fibrés dans la catégorie des espaces différentiables au-dessus de X " individus que l'on définirait aisément dans le cadre de l'appendice 1 en copiant les définitions de la géométrie algébrique ou analytique (Grothendieck [1]). Le point de vue adopté ici consiste en gros à travailler dans le "réduit" du "fibré" en question ; dans l'état actuel de la théorie des équations différentielles, où aucun résultat n'existe sans hypothèses de rang constant, même dans le cas analytique, cela semble parfaitement suffisant (le seul inconvénient, purement verbal, est le suivant : si R^k n'est pas de rang constant, il ne détermine pas forcément les $R^{k+\ell}$, et ne mérite donc pas le nom d' "équation différentielle").

2. <u>Equations de Lie</u> : <u>forme infinitésimale</u>

Nous allons appliquer les considérations précédentes à $E = T$, le fibré tangent à X ; nous identifierons $\underline{J^k(T)}$ avec le faisceau des champs Π_1<u>-verticaux</u> sur X^2, modulo ceux qui s'annulent à l'ordre k sur Δ (nous appellerons un élément du quotient "germe de champ vertical sur X^2 le long de $\Delta^{(k)}$ ") ; le crochet des champs de vecteur sur X^2 donne par restriction un crochet $[\ ,\ ]$:

$$\underline{J^k(T)} \underset{\Delta}{\times} \underline{J^k(T)} \rightarrow \underline{J^{k-1}(T)} ,$$

qui est d'ailleurs défini fibre par fibre, de la manière suivante : soient ξ et η deux jets d'ordre k en x_o , $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ des sections de T relevant ξ et η ; alors le crochet $[\xi,\eta]$ est le jet $j^{k-1}[\bar{\xi},\bar{\eta}](x_o)$, qui ne dépend évidemment que de ξ et η .

On prendra garde qu'avec l'identification précédente $J^\circ(T)$ est bien canoniquement isomorphe à T , mais ne lui est pas identique : ceci sera important pour la suite, où nous aurons à considérer des automorphismes de X^2 ne commutant pas à Π_2 , et qui ne respecteront donc pas cet isomorphisme.

En coordonnées locales, une section de $J^k(T)$ s'écrira donc

$$\sum_1^n a_i(x,x') \frac{\partial}{\partial x'_i}$$

les a_i étant définis mod $(x'-x)^{k+1}$, ce que nous écrivons encore

$$A(x,x') \frac{\partial}{\partial x'} , \quad A = (a_1,\ldots,a_n) , \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial}{\partial x'_n} \end{bmatrix} .$$

Définissons maintenant les champs de vecteurs <u>diagonaux</u> sur X^2 comme étant les champs Π_1-projetables et préservant Δ (i.e. tangents à Δ), et soit ε l'application qui fait correspondre à un tel champ sa partie verticale ; il est immédiat que ε est une bijection ; en coordonnées locales, si $\xi = A(x,x')\frac{\partial}{\partial x}$, on a :

$$\varepsilon^{-1}(\xi) = A(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} + A(x,x) \frac{\partial}{\partial x} .$$

Par passage en quotient, ε donne un isomorphisme de $\underline{J^k(T)}$ sur le faisceau quotient des champs diagonaux par ceux qui s'annulent à l'ordre k sur Δ ; nous appellerons ce quotient "faisceau des champs projetables sur $\Delta^{(k)}$ " et nous le noterons $\underline{\tilde{J}^k(T)}$.

Sur X^2, on a les notions usuelles de "crochet de champs de vecteurs" et de dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs ξ (notée $\mathcal{L}(\xi)$). Par passage au quotient, on trouve les résultats suivants :

(2.1) $\underline{\tilde{J}^k(T)}$ opère comme un faisceau de dérivation sur $\underline{J}^k = \mathcal{O}_{\Delta^{(k)}}$.

(2.2) $\underline{\tilde{J}^k(T)}$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur Δ (ou, si l'on préfère, sur X, par image directe par Π_1), ceci contrairement à $\underline{J^k(T)}$; mais ici, le crochet n'est plus $\mathcal{O}_X$-bilinéaire.

(2.3) Le crochet de Lie de $\underline{\tilde{J}^{k+1}}(T) \underset{\Lambda}{\times} \underline{J^k(T)}$ est bien défini, à valeurs dans $\underline{J^k(T)}$.

Plus généralement, considérons $\underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{J^k(T)}$ et $\underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{\tilde{J}^k(T)}$ comme des faisceaux de formes vectorielles sur X^2, modulo $\mathcal{J}^{k+1}$. Alors la dérivée de Lie $\mathcal{L}(\xi)$, pour ξ section de $\tilde{J}^{k+1}(T)$ opère dans $\underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{J^k(T)}$ et dans $\underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}$.

Les vérifications, immédiates, sont laissées au lecteur. Les géomètres vérifieront aisément que ces opérations coïncident avec celles que l'on définit usuellement sur $\underline{J^k(T)}$, à partir de la correspondance entre sections de ces faisceaux et champs invariants sur les espaces de repères (voir notamment Spencer [1]). A l'usage des non-géomètres, nous allons toutefois donner quelques indications sur ce point, qui donne la motivation des problèmes étudiés ici.

Soit Y une variété différentiable et $\Pi : Y \to X$ une submersion (i.e. une application de rang partout $n = \dim X$). Soit θ_Y le faisceau sur X des champs Π-projetables sur Y , i.e. le faisceau qui à tout U ouvert de X associé les champs projetables sur $\Pi^{-1}(U)$; θ_Y est un faisceau d'algèbres de Lie, et la projection Π induit un homomorphisme d'algèbres de Lie $\theta_Y \to \underline{T}_X$. Nous dirons avec C. Ehresmann que (Y,Π) est muni d'une structure de "prolongement d'ordre k de X " si l'on s'est donné un relèvement $p : \underline{T}_X \to \theta_Y$ (Πp = identité), qui soit un homomorphisme de faisceaux d'algèbres de Lie, et qui soit un opérateur différentiel linéaire d'ordre k , ce qui veut dire ceci : en coordonnées locales, si $Y = X \times Z$, $\xi = a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ on a, avec les notations usuelles :

$$p(\xi) = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} p_\alpha(x,z)D_x^\alpha a\Big)\frac{\partial}{\partial z} + a(x)\frac{\partial}{\partial x} .$$

Par exemple, si $Y = T_X$, ou $Y = T_X^*$, la considération du germe de groupe à un paramètre associé à un champ de vecteurs permet immédiatement de munir Y d'une structure de prolongement d'ordre 1 de X (en fait, lorsqu'on parle du "fibré tangent" ou "cotangent" à X , on sous-entend généralement cette structure supplémentaire, ce qui peut créer quelques confusions). De même, soit Y le fibré des opérateurs différentiels linéaires d'ordre k , par exemple de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X$; Y est muni, par le même procédé, d'une structure de prolongement d'ordre k de X . En fait, dans ces exemples, on a même une notion de prolongement plus précise i.e. un relèvement des automorphismes locaux de X dans ceux de Y , sur laquelle nous n'insisterons pas.

Cela étant, p définit une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\bar{p} : \underline{J^k(T)} \to \theta_Y$ $(T = T_X)$, avec $p = \bar{p}\, j^k$; d'où une application $\bar{p}\varepsilon = \tilde{p} : \underline{\tilde{J}^k(T)} \to \theta_Y$; et $\tilde{p}$ est un homomorphisme de faisceaux d'algèbres de Lie : pour le voir, on remarque que, localement, toute section de $\tilde{J}^k(T)$ s'écrit $\Sigma f_i \tilde{j}^k(\xi_i)$, $f_i \in \mathcal{O}_X$, $\xi_i \in \underline{T}$, $\tilde{j}^k = \varepsilon^{-1} j^k$;

il suffit alors d'établir qu'on a

$$\tilde{p}[f\,\tilde{j}^k(\xi), g\,\tilde{j}^k(\eta)] = [f\,p(\xi), g\,p(\eta)] \quad \text{(en identifiant } f \text{ et } g \text{ à } \Pi^*(f) \text{ et } \Pi^*(g)\text{)};$$

or cela résulte immédiatement des formules

$$\tilde{j}^k[\xi,\eta] = [\tilde{j}^k(\xi), \tilde{j}^k(\eta)] \;;\; \tilde{j}^k(\xi)g = \xi g \;,\; p(\xi)g = \xi g$$

et de l'hypothèse $p[\xi,\eta] = [p(\xi), p(\eta)]$. L'espace $(\Delta^{(k)}, \Pi_1)$ muni de $\tilde{j}^k$ apparaît ainsi comme un "prolongement d'ordre k" particulièrement économique (et même comme la solution d'un problème universel pour les prolongements d'ordre k, que nous laissons le lecteur énoncer).

Avant d'introduire les équations de Lie, prenons un exemple (les problèmes qui conduisent à ces équations en sont des variantes) : soit σ une section de $y \overset{\Pi}{\to} X$, en supposant par exemple Π surjective. Si ξ est un champ de vecteurs sur X l'équation " $p(\xi)$ est tangent à σ " exprime que ξ préserve σ (par exemple, si y est le fibré des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $\leq k$ de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X$, σ sera un opérateur différentiel et cette équation s'écrit $\xi\sigma - \sigma\xi = 0$, en identifiant ξ à un opérateur d'ordre 1). Soit N le fibré normal à y le long de σ i.e. le quotient du tangent à y le long de σ par les vecteurs tangents à σ, et soit $\mathcal{L}(p(\xi))\sigma$ la classe de $p(\xi)|_\sigma$ dans N ; on est amené à considérer l'opérateur différentiel (au sens du § 1) $\varphi : \xi \to \mathcal{L}(\tilde{p}(\xi)\sigma)$ de $J^k(T)$ dans N. Posons $\underline{\tilde{R}}^k = \varepsilon^{-1}\underline{R}^k$, on aura évidemment $[\underline{\tilde{R}}^k, \underline{\tilde{R}}^k] \subset \tilde{R}^k$. Ceci conduit naturellement à la définition suivante :

DÉFINITION (2.4). <u>Soit</u> R^k <u>une équation différentielle formellement intégrable dans</u> $J^k(T)$. <u>Nous dirons que c'est une équation de Lie si l'on a</u> $[\underline{\tilde{R}}^k, \underline{\tilde{R}}^k] \subset \underline{\tilde{R}}^k$.

Pour $\ell \geq 0$, posons encore $\underline{\tilde{R}}^\ell = \varepsilon^{-1}\underline{R}^\ell$

PROPOSITION (2.5). <u>Soit</u> $R^k \subset J^k(T)$ <u>une équation différentielle formellement intégrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) R^k <u>est une équation de Lie</u>.

2) <u>Le crochet sur</u> $\underline{\tilde{R}}^{k+1} \underset{\Delta}{\times} \underline{R}^k$ <u>est à valeurs dans</u> $\underline{R}^k$.

3) <u>Le crochet sur</u> $\underline{R^{k+1}} \underset{\Delta}{\times} \underline{R^{k+1}}$ <u>est à valeurs dans</u> R^k.

Démontrons par exemple qu'on a 1) $\Rightarrow$ 2) (la démonstration de 1) $\Rightarrow$ 3) est analogue) ; soient $\tilde{\xi} \in \underline{\tilde{R}}^{k+1}$, $\eta \in R^k$; en coordonnées locales, on a :

$$\tilde{\xi} = A(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} + a(x)\frac{\partial}{\partial x} \quad \bmod (x'-x)^{k+2} \;,\; a(x) = A(x,x)$$

$$\eta = B(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} \quad \bmod (x'-x)^{k+1}$$

d'où

$$[\tilde{\xi},\eta] = (A\frac{\partial B}{\partial x'} + a\frac{\partial B}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x'} - B\frac{\partial A}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'} \qquad \mathrm{mod}\ (x'-x)^{k+1}$$

à noter que chacun des deux termes du second membre a bien un sens $\mathrm{mod}\ (x'-x)^{k+1}$ mais non

$$A\frac{\partial B}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'} \text{ qui n'est défini que } \mathrm{mod}\ (x'-x)^k .$$

Posons $\tilde{\eta} = \varepsilon^{-1}\eta$, et soit $\tilde{\xi}'$ la projection de $\tilde{\xi}$ dans $\underline{R}^k$; on a

$$\varepsilon[\tilde{\eta},\tilde{\xi}] = (A\frac{\partial B}{\partial x'} + a\frac{\partial B}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x'} - (B\frac{\partial A}{\partial x'} + b\frac{\partial A}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x'} \quad \mathrm{mod}\ (x'-x)^{k+1}$$

avec $b(x) = B(x,x)$

d'où

$$[\tilde{\xi},\eta] = \varepsilon[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] + b\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} \quad \mathrm{mod}\ (x'-x)^{k+1}$$

et tout revient à démontrer qu'on a $b\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} \in \underline{R}^k$; or ceci résulte du fait que l'on a :

$$D(\varepsilon\tilde{\xi}) = dx \otimes \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} \in \underline{T} \otimes \underline{R}^k \quad , \quad dx = (dx_1,\ldots, dx_n) .$$

Pour démontrer que 2) ⇒ 1) il suffit de remonter le calcul précédent en utilisant le fait que $\underline{R}^{k+1} \to \underline{R}^k$ est surjectif (noter que cela n'était pas intervenu auparavant). La démonstration de 3) ⇒ 1) est analogue.

3. La connexion canonique

Nous allons d'abord rappeler la notion de "crochet de formes différentielles vectorielles", due à Frölicher-Nijenhuis [1]. Fixons d'abord quelques notations : soit u une section sur X de $\Lambda^p\underline{T}^* \otimes \underline{T}$; elle définit une dérivation de degré $(p-1)$ dans les formes différentielles sur X , notée $i(u)$, définie localement par la formule suivante : si $u = \alpha \otimes \xi$, $i(u)\beta = \alpha \wedge i(\xi)\beta$, où $\beta \in \Lambda^q\underline{T}^*$ et où $i(\xi)$ désigne le produit intérieur usuel par ξ . Nous écrirons encore $i(u)\beta = u \bar{\wedge} \beta$, et nous poserons aussi $\beta \wedge u = (\beta \wedge \alpha) \otimes \xi$. Enfin, si $v \in \Lambda^q\underline{T}^*\otimes\underline{T}$, nous définirons $u \bar{\wedge} v$ par

$$(\alpha \otimes \xi)\,\bar{\wedge}\,(\beta \otimes \eta) = (\alpha \wedge i(\xi)\beta) \otimes \eta \ (= i(\alpha \otimes \xi)\beta \otimes \eta).$$

Désignant par d la différentielle extérieure, qui est une dérivation de degré sur $\Lambda^*\underline{T}^*$, on pose $\mathcal{L}(u) = [i(u),d]$ (rappelons que le crochet de deux dérivations D et D', de degrés respectifs q et r est par définition la dérivation de degré $q+r$: $[D,D'] = DD' - (-1)^{qr} D'D$). Lorsque u est de degré 0 , i.e. est un champ de vecteurs, $\mathcal{L}(u)$ coïncide avec la dérivée de Lie de u , d'après la formule de H. Cartan. Dans le cas général, on a :

$$\mathcal{L}(\alpha \otimes \xi)\beta = \alpha \wedge i(\xi)d\beta + (-1)^p d(\alpha \wedge i(\xi)\beta)$$

d'où

$$(3.1)\qquad \mathcal{L}(\alpha \otimes \xi)\beta = \alpha \wedge \mathcal{L}(\xi)\beta + (-1)^p d\alpha \wedge i(\xi)\beta .$$

Soit maintenant $v \in \Lambda^q \underline{T}^* \otimes \underline{T}$; on vérifie qu'il existe un w unique $\in \Lambda^{p+q}\underline{T}^* \otimes \underline{T}$ vérifiant $\mathcal{L}(w) = [\mathcal{L}(u),\mathcal{L}(v)]$. On voit aisément qu'on a :

$$(3.2)\quad [\alpha \otimes \xi, \beta \otimes \eta] = (\alpha\wedge\beta) \otimes [\xi,\eta] + \mathcal{L}(\alpha \otimes \xi)\beta \otimes \eta - (-1)^{pq}\mathcal{L}(\beta \otimes \eta)\alpha \otimes \xi .$$

On en tire les formules suivantes :

$$(3.3)\quad [\xi,v] = \mathcal{L}(\xi)v \qquad (\mathcal{L} \text{ désignant, comme d'habitude, la dérivée de Lie})$$

$$(3.4)\quad [u,\beta \otimes \eta] = \mathcal{L}(u)\beta \otimes \eta + (-1)^{pq}\, \beta\wedge[u,\eta] - (-1)^{pq+q}\, (d\beta \otimes \eta)\bar{\wedge} u .$$

Soit maintenant $\Pi : Y \to X$ une submersion. En tout point $b \in Y$, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow V_{Y,b} \longrightarrow T_{Y,b} \xrightarrow{\Pi'_b} T_{X,\Pi(b)} \longrightarrow 0$$

où $V_{Y,b}$ désigne les vecteurs verticaux de Y en b, et Π'_b l'application tangente à Π en b. Une <u>connexion</u>, au sens d'Ehresmann, dans Y (relativement à Π) est par définition, une scission de cette suite exacte, i.e. la donnée $\forall\, b \in Y$, d'une application $\gamma_b : T_{X,\Pi(b)} \to T_{Y,b}$, avec $\Pi'_b\gamma_b = \mathrm{id}$; on suppose que γ_b dépend différentiablement de b. L'espace $\mathrm{Im}(\gamma_b)$ s'appellera "espace des vecteurs γ-horizontaux en b ". Au lieu de se donner γ, il revient au même de se donner, en tout point b, le projecteur de $T_{Y,b}$ sur $V_{Y,b}$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\gamma_b)$; comme $V_{Y,b}$ est un sous-espace de $T_{Y,b}$, ceci définit une section du fibré

$$\mathrm{Hom}_Y(T^*_Y, T^*_Y) = T^*_Y \underset{Y}{\otimes} T_Y ,$$

i.e. une 1 forme à valeurs vectorielles sur Y, que l'on appelle "forme de la connexion γ " et que nous noterons Ω.

On vérifie alors facilement le résultat suivant qui n'est qu'une des nombreuses versions du théorème de Frobenius : <u>pour que</u> γ <u>soit intégrable</u> (i.e. pour que le champ $b \longmapsto \mathrm{Im}(\gamma_b)$ soit un système de Pfaff complètement intégrable), <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> $[\Omega,\Omega] = 0$; la forme $\frac{1}{2}[\Omega,\Omega]$ apparaît donc, dans le cas général, comme la forme de courbure de la connexion Ω. A noter aussi qu'une connexion intégrable coïncide avec un "prolongement d'ordre zéro" au sens du § 2.

Prenons en particulier $Y = X^2$, et $\Pi = \Pi_1$; comme sur tout produit, on a une connexion canonique intégrable sur Y, celle dont les vecteurs horizontaux sont ceux qui sont annulés par Π'_2. <u>Dans toute la suite, nous désignerons par</u> Ω <u>la forme de cette connexion</u> ; en coordonnées locales, elle s'écrit

$$\Omega = \Sigma\, dx'_i \otimes \frac{\partial}{\partial x'_i}$$

ou encore

$$\Omega = dx' \otimes \frac{\partial}{\partial x'} \,.$$

Soient $\tilde{u} \in \Lambda^p \underline{T}^* \otimes \underline{J^k(T)}$, et $u = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\tilde{u}$ [i.e., si $\tilde{u} = \alpha \otimes \tilde{\xi}$, $u = \alpha \otimes \xi$ avec $\xi = \varepsilon(\tilde{\xi})$] ; en relevant les formes différentielles sur X à X^2 par Π_1^*, on peut considérer que u et $\tilde{u}$ proviennent par passage au quotient, de formes vectorielles sur X^2. Un calcul immédiat en coordonnées locales montre alors que $\tilde{u} \bar{\wedge} \Omega$ est bien défini, en tant qu'élément de $\Lambda^p \underline{T}^* \otimes \underline{J^k(T)}$ (i.e., ne dépend pas du relèvement choisi de $\tilde{u}$) et qu'on a

(3.5) $$u = \tilde{u} \bar{\wedge} \Omega \,.$$

On a aussi l'importante formule suivante (où les passages au quotient sont sous-entendus...) :

THÉORÈME 3.6 ("Formule de Guillemin-Sternberg") $Du = -[\Omega, u] = -[\Omega, \tilde{u}]$.

Démontrons d'abord cette formule pour $\tilde{u} = \tilde{\xi} \in \underline{J^k(T)}$; le plus simple est d'opérer en coordonnées locales :

$$-[\Omega,\xi] = \mathcal{L}(\xi)\Omega = \sum_i \mathcal{L}(\xi) dx'_i \otimes \frac{\partial}{\partial x'_i} + \sum_i dx'_i \otimes \mathcal{L}(\xi)\frac{\partial}{\partial x'_i}$$

posant $\xi = \Sigma\, \xi_j(x,x')\frac{\partial}{\partial x'_j}$; il vient :

$$-[\Omega,\xi] = \sum_i d\xi_i \otimes \frac{\partial}{\partial x'_i} - \sum_{i,j} dx'_i \otimes \frac{\partial \xi_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x'_j}$$

et comme

$$d\xi_i = \sum_j dx'_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x'j} + \sum_j dx_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \,,$$

il vient finalement

$$-[\Omega,\xi] = \sum_{i,j} dx_j \otimes \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_i} = D\xi \,.$$

Un calcul analogue montre qu'on a $-[\Omega,\tilde{\xi}] = D\xi$.

Soit maintenant $\alpha \in \Lambda^p \underline{T}^*$; d'après (3.4), on a :

$$-[\Omega,\alpha\otimes\xi] = -\mathcal{L}(\Omega)\alpha\otimes\xi - (-1)^p \alpha \wedge [\Omega,\xi] + (d\alpha\otimes\xi)\bar{\wedge}\,\Omega \,.$$

Mais $\xi \bar{\wedge} \Omega = \xi$, et $\mathcal{L}(\Omega)\alpha = 0$ (immédiat par 5.1) ; d'où

$$-[\Omega,\alpha\otimes\xi] = d\alpha\otimes\xi + (-1)^p\alpha \wedge D\xi = D(\alpha\otimes\xi),$$

ce qui démontre la formule $-[\Omega,u] = Du$; la formule $-[\Omega,\tilde{u}] = Du$ se démontre de manière analogue.

Les formules (3.5) et (3.6) signifient, si l'on veut, ceci : ε est le projecteur associé à la connexion canonique et D est la différentielle extérieure de cette connexion. La théorie des équations de Lie peut se faire à partir de la considération de la forme Ω , à la manière de Guillemin-Sternberg [1] (voir § 4). Nous allons cependant donner une autre version du théorème précédent, due essentiellement à Spencer ; malgré son apparence un peu plus "sophistiquée", elle conduit en fait, comme nous le verrons au § 6, à des équations plus maniables ; l'idée est ici de faire jouer le rôle essentiel à ε^{-1}, plutôt qu'à ε (ou Ω , ce qui revient au même).

Soit $J^k(T)^*$ le fibré dual (sur X) de $J^k(T)$, i.e. le fibré des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ sur $\underline{T}$, à valeurs scalaires $(k \geq 0)$; pour $\tilde{\xi} \in \underline{J^{k+1}}(T)$, $\beta \in \Lambda^q \underline{J^\circ(T)^*}$, on définit $\mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta \in \Lambda^q \underline{J^\circ(T)^*}$ de la manière suivante: pour $q = 0$, c'est la dérivée usuelle des fonctions suivant un champ de vecteurs ; pour $q = 1$, on le définit de manière à avoir, $\forall$ $\eta \in \underline{J^k(T)}$:

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi}) < \eta,\beta > = < \mathcal{L}(\tilde{\xi})\eta,\beta > + < \eta,\mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta >$$

enfin, on étend l'opération obtenue en une dérivation de degré 0 sur $\Lambda^*\underline{J^\circ(T)}^*$ (on pourrait d'ailleurs aussi bien prolonger $\tilde{\xi}$ en un champ de vecteurs sur X^2, et définir $\mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta$ à partir du germe de groupe à un paramètre obtenu ainsi). De la formule

$$\mathcal{L}(f\tilde{\xi})\eta = f\mathcal{L}(\tilde{\xi})\eta \qquad (f \in \mathcal{O}_X)$$

qui se vérifie immédiatement, on déduit qu'on a $\mathcal{L}(f\tilde{\xi})\beta = f\mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta$ (alors que cette formule serait fausse pour $\beta \in \Lambda^q \underline{T}^*$) ; pour $u \in \Lambda^p \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{J^{k+1}}(T)$, ceci permet de définir la dérivation $\mathcal{L}(u)$ sur $\Lambda^* \underline{J^\circ(T)^*}$ par la formule suivante :

$$\mathcal{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})\beta = \alpha \wedge \mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta \in \Lambda^{p+q}\underline{J^\circ(T)^*} , \tag{3.7}$$

pour $v \in \Lambda^q \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{J^{k+1}(T)}$, on définit alors $[u,v]$ par la formule analogue à (3.2) :

$$[\alpha \otimes \tilde{\xi},\beta \otimes \tilde{\eta}] = \alpha\wedge\beta \otimes [\tilde{\xi},\tilde{\eta}] + \mathcal{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})\beta \otimes \tilde{\eta} - (-1)^{pq}\mathcal{L}(\beta \otimes \tilde{\eta})\alpha \otimes \tilde{\xi} \tag{3.8}$$

il est immédiat qu'on a

$$[\mathcal{L}(u),\mathcal{L}(v)]\gamma = \mathcal{L}[u,v]\gamma , \quad \text{pour } \gamma \in \Lambda^*\underline{J^\circ(T)^*} . \tag{3.9}$$

L'analogue de la formule (3.4) est ici

$$[u,\beta \otimes \tilde{\eta}] = \mathcal{L}(u)\beta \otimes \tilde{\eta} + (-1)^{pq}\beta\wedge[u,\tilde{\eta}] \tag{3.10}$$

qui résulte immédiatement de (3.7) et (3.8).

Enfin, on a l'identité de Jacobi : si $w \in \Lambda^r \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{J^{k+1}(T)}$,

$$(-1)^{pr}[u,[v,w]] + (-1)^{rq}[w,[u,v]] + (-1)^{qp}[v,[w,u]] = 0 \tag{3.11}$$

qui se démontre par un calcul sans difficulté, quoique fastidieux, que nous laissons au lecteur (pour le crochet de Frölicher-Nijenhuis, la même formule est vraie, et résulte immédiatement de la définition à partir du crochet des dérivations).

Notons maintenant que l'isomorphisme $\varepsilon : \tilde{J}^k(T) \to J^k(T)$, donne, par dualité, un isomorphisme de $\varepsilon^* : J^k(T)^* \to \tilde{J}^k(T)^*$. Prenons en particulier $k = 0$, et identifions $\tilde{J}^\circ(T)^*$ à T^* au moyen de Π_1^* (dans la suite, nous ferons toujours cette identification, qui sera sans inconvénients) ; étendant ε^* en un isomorphisme $\Lambda^*J^\circ(T)^* \to \Lambda^*T^*$, on obtient un isomorphisme

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^* \otimes \varepsilon : \Lambda^*J^\circ(T)^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(T) \to \Lambda^*T^* \otimes J^{k+1}(T) .$$

DÉFINITION (3.11). <u>Soient</u> $\alpha\in\Lambda^*\underline{J^\circ(T)^*}$, $u\in\Lambda^*\underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}$; <u>on pose</u>

$$\tilde{d} = (\varepsilon^{-1})^* d\varepsilon^*\alpha \qquad \underline{\text{et}} \qquad \tilde{D}u = \bar{\varepsilon}^{-1} D\bar{\varepsilon}u .$$

Nous allons voir que l'opérateur $\tilde{D}$ satisfait une formule analogue au théorème (3.6). Pour cela, quelques définitions supplémentaires seront nécessaires.

Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$; on sait qu'on peut identifier $\mathfrak{g}$ (resp. $\Lambda^*\mathfrak{g}^*$) aux champs de vecteurs (resp. aux formes différentielles) sur G invariants à gauche ; alors, le crochet de Frölicher-Nijenhuis donne par restriction, une structure d'algèbre de Lie graduée sur $\Lambda^*\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, que l'on peut du reste définir directement à partir de la loi d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, de la manière suivante : on définit d comme étant la dérivation de degré $+1$ sur $\Lambda^*\mathfrak{g}^*$ qui est nulle en degré 0, et qui, en degré 1 est définie par $< \xi\Lambda\eta, d\alpha > = - < [\xi,\eta],\alpha >$; ensuite pour $u\in\Lambda^*\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, la dérivation $i(u)$ se définit de la manière usuelle (valable dans tous les espaces vectoriels), et l'on pose $\mathcal{L}(u) = [i(u),d]$. On définit alors le crochet par la formule (3.2).

Nous allons copier cette manière d'opérer dans la situation, très voisine, du fibré en algèbres de Lie filtrées $\varprojlim J^k(T)$. Pour $\alpha\in J^\ell(T)^*$, on définira donc $d'\alpha\in J^{\ell+1}(T)^*$ par

$$< \xi\Lambda\eta, d'\alpha > = -< [\xi,\eta],\alpha > , \ \xi,\eta\in J^{\ell+1}(T)^* ;$$

on étend alors d' en une dérivation de $\lim \Lambda^*J^\ell(T)^*$, nulle en degré 0 (noter que la projection $\bar{\omega}_k : J^{k+1}(T) \to J^k(T)$ donne par dualité une injection $J^k(T)^* \to J^{k+1}(T)^*$). Enfin, pour $u \in \Lambda^*J^\ell(T)^* \otimes J^{k+1}(T)$ $(k \geqq \ell)$, et $\beta \in \Lambda^*J^\ell(T)^*$, on pose $\mathcal{L}'(u)\beta = [i(u),d']\beta\in\Lambda^*J^{\ell+1}(T)^*$.

Les opérations qui viennent d'être définies ici "fibre par fibre" se prolongent aux faisceaux associés ; conformément à nos conventions, nous les désignerons par la même lettre. Dans la suite, nous utiliserons ces opérations exclusivement pour $\ell = 0$.

Faisons alors la remarque suivante : soit $J_o^k(T)$ l'ensemble des $\xi \in J^k(T)$ tels qu'on ait $\bar{\omega}_o(\xi) = 0$; il est clair qu'on a

$$J_o^k(T) = J^k(T) \cap \tilde{J}^k(T) ,$$

et que $\varepsilon^{-1}(\xi) = \xi$ si et seulement si $\xi \in J_o^k(T)$. Je dis que, pour

$u \in \Lambda^* \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{J_o^{k+1}(T)}$, $\beta \in \Lambda^* \underline{J^\circ(T)^*}$, on a $\mathcal{L}(u)\beta = \mathcal{L}'(u)\beta$.

Tout d'abord, ceci est vrai pour $u = \xi$ de degré 0, car on a, pour tout $\eta \in \underline{J^k(T)}$:

$$0 = \mathcal{L}(\xi) < \eta,\beta > = < [\xi,\eta],\beta > + < \eta,\mathcal{L}(\xi)\beta >$$

d'après la définition de $\mathcal{L}(\xi)$, et que la même formule est vraie avec $\mathcal{L}$ remplacé par $\mathcal{L}'$, d'après la définition de $\mathcal{L}'$; ensuite, pour $\alpha \in \Lambda^* \underline{J^\circ(T)^*}$, on a

$$\mathcal{L}(\alpha \otimes \xi)\beta = \alpha \wedge \mathcal{L}(\xi)\beta \qquad \text{par définition}$$

$$\mathcal{L}'(\alpha \otimes \xi)\beta = \alpha \wedge \mathcal{L}'(\xi)\beta + (-1)^{\deg \alpha}\, d'\alpha \wedge i(\xi)\beta$$

d'après la formule (3.1), qui est évidemment encore vraie ici ; mais de $\bar{\omega}_o \xi = 0$, on déduit $i(\xi)\beta = 0$, d'où

$$\mathcal{L}(\alpha \otimes \xi)\beta = \mathcal{L}'(\alpha \otimes \xi)\beta$$

(On remarquera que l'expression $\mathcal{L}(u)\beta$, tout comme $\mathcal{L}'(u)\beta$, aurait pu être définie pour

$$u \in \Lambda^p \underline{J^\ell(T)}^* \otimes \underline{J^{k+1}(T)} \quad , \quad \beta \in \Lambda^q \underline{J^\ell(T)^*} \quad , \quad \ell \leq k \ ;$$

mais, pour $\ell > 0$, $pq \neq 0$, $u \in \Lambda^p \underline{J^\ell(T)^*} \otimes \underline{J_o^{k+1}(T)}$, on aurait en général

$$\mathcal{L}(u)\beta \neq \mathcal{L}'(u)\beta$$

car $i(u)\beta \neq 0$, ce qui ne permettrait pas la construction qui va suivre ; une partie des formules de la fin de ce paragraphe peut néanmoins être étendue dans ce contexte plus général, mais nous n'en aurons pas besoin ; voir remarque 3.17).

Pour $u_1 \in \Lambda^p \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{J^{k+1}(T)}$, $u_2 \in \Lambda^p \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}$, $u = u_1 + u_2$, $\beta \in \Lambda^q J^\circ(T)^*$, on pose alors :

$$\mathcal{L}(u)\beta = \mathcal{L}'(u_1)\beta + \mathcal{L}(u_2)\beta \in \Lambda^{p+q} \underline{J^1(T)}^*$$

ce qui précède montre que cette expression ne dépend pas de la décomposition choisie de u . Remarquons que le crochet de deux éléments de $\underline{J^{k+1}}(T) + \underline{\tilde{J}^{k+1}}(T)$ est bien défini, à valeurs dans $\underline{J^k(T)} + \underline{\tilde{J}^k(T)}$; on définit alors pour

$u \in \Lambda^p \underline{J^\circ(T)}^* \otimes [\underline{J^{k+1}}(T) + \underline{\tilde{J}^{k+1}}(T)]$ et $v \in \Lambda^q \underline{J^\circ(T)}^* \otimes [\underline{J^{k+1}(T)} + \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}]$

le crochet

$$[u,v] \in \Lambda^{p+q} \underline{J^1(T)}^* \otimes [\underline{J^k(T)} + \underline{\tilde{J}^k(T)}] ,$$

par la formule généralisant (3.2) et (3.8) (dans ce dernier cas, avec une "perte" de $k+1$ à k):

$$(3.12) \qquad [\alpha \otimes \xi, \beta \otimes \eta] = (\alpha \wedge \beta \otimes [\xi,\eta] + \mathcal{L}(\alpha \otimes \xi)\beta \otimes \eta - (-1)^{pq}\mathcal{L}(\beta \otimes \eta)\alpha \otimes \xi \ .$$

Nous laissons le lecteur vérifier que le second membre ne dépend pas de la décomposition choisie de u et v (il suffit évidemment pour cela de vérifier que l'on obtient le même résultat pour $f\alpha \otimes \xi$ et $d\alpha \otimes f\xi$). Lorsqu'on a $\eta \in \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}$, de

$$\mathcal{L}(\beta \otimes \eta)\alpha = \beta \wedge \mathcal{L}(\eta)\alpha \ , \quad [\alpha \otimes \xi, \eta] = \alpha \otimes [\xi,\eta] - \mathcal{L}(\eta)\alpha \otimes \xi$$

et de (3.12), on tire la formule suivante, généralisant (3.10) :

$$(3.13) \qquad [u, \beta \otimes \eta] = \mathcal{L}(u)\beta \otimes \eta + (-1)^{pq}\beta \wedge [u,\eta]$$

(par contre, pour $\eta \in \underline{J^{k+1}(T)}$, cette formule doit être modifiée, d'une manière analogue à 3.4).

En ce qui concerne l'identité de Jacobi, nous n'en parlerons pas, attendu que, dans le contexte où nous nous sommes placé ici, des expressions telles que $[u,[v,w]]$ n'auraient aucun sens. Nous verrons cependant plus loin que, dans les cas particuliers qui nous intéressent, on pourra leur en donner un, et que l'identité de Jacobi sera vérifiée.

Considérons enfin l'application $\varepsilon^{-1} - \mathrm{id} : J^{k+1}(T) \to J^{k+1}(T) + \tilde{J}^{k+1}(T)$; elle est nulle sur $J_0^{k+1}(T)$, et se factorise donc par une application

$$J^{\circ}(T) = J^{k+1}(T)/J_0^{k+1}(T) \to J^{k+1}(T) + \tilde{J}^{k+1}(T) \ ,$$

qui définit une section de

$$J^{\circ}(T)^* \otimes [\underline{J^{k+1}(T)} + \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}] \ ,$$

que nous noterons $\tilde{\Omega}$ (en laissant le lecteur préciser quel est l'entier k choisi, suivant la formule considérée). Le résultat essentiel de ce paragraphe est le théorème suivant :

THÉORÈME (3.14) ("Formule de Spencer"). Pour $u \in \Lambda^* \underline{J^{\circ}(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}$, on a :

$$\tilde{D}u = [\tilde{\Omega}, u] \ .$$

Examinons d'abord le cas où $u = \tilde{\xi} \in \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)}$. Désignons par $\mathcal{L}(\tilde{\xi})\varepsilon^{-1}$ l'application $\underline{J^k(T)} \to \underline{\tilde{J}^k(T)}$ dérivée de Lie de ε^{-1} par l'automorphisme infinitésimal associé à $\tilde{\xi}$ (après les passages au quotient convenables) ; il revient au même de le définir par la formule :

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi})\varepsilon^{-1}(\eta) = \mathcal{L}(\tilde{\xi})(\varepsilon^{-1}\eta) - \varepsilon^{-1}\mathcal{L}(\tilde{\xi})\eta \in \underline{\tilde{J}^k(T)} \ , \quad \text{pour tout } \eta \in \underline{J^k(T)} \ .$$

Le calcul de cette expression a été fait dans la démonstration de la proposition 2.5 ; on voit immédiatement que le résultat s'écrit

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi})\varepsilon^{-1}(\eta) = -\,\eta\,\bar{\Lambda}\,\tilde{D}\,\tilde{\xi}$$

ce que nous écrirons plus brièvement :

(3.15) $\mathcal{L}(\tilde{\xi})\varepsilon^{-1} = -i'(\tilde{D}\,\tilde{\xi})$, i' désignant le produit intérieur droit.

Pour établir la formule cherchée, il suffit alors de remarquer qu'on a $[-\tilde{\Omega},\tilde{\xi}] = \mathcal{L}(\tilde{\xi})\tilde{\Omega}$, dérivée de Lie de $\tilde{\Omega}$ par rapport à l'automorphisme infinitésimal associé à $\tilde{\xi}$, ce qui résulte facilement de la définition 3.12 (avec le petit abus de notation suivant : le second membre est bien défini pour " $\tilde{\Omega}$ à l'ordre k ", alors que le premier est défini pour " $\tilde{\Omega}$ à l'ordre $k+1$ ", mais ne dépend que de " $\tilde{\Omega}$ à l'ordre k ", comme on le vérifie tout de suite) ; et que, d'autre part, l'application identique $\mathrm{id} : \underline{J^k(T)} \to \underline{J}^k(T)$ a évidemment une dérivée de Lie nulle par rapport à $\tilde{\xi}$, puisque le germe de groupe à un paramètre associé préserve "id" .

Pour établir le théorème, en vertu de la formule :

$$\tilde{D}(\alpha \otimes \tilde{\xi}) = \tilde{d}\alpha \otimes \tilde{\xi} + (-1)^p \alpha \wedge \tilde{D}\,\tilde{\xi}$$

(α = deg p), qui résulte immédiatement de la formule analogue pour D , et en vertu de la formule (3.13), il suffit d'établir le résultat suivant :

PROPOSITION (3.16). <u>Pour</u> $\alpha \in \Lambda^* \underline{J^\circ(T)^*}$, <u>on a</u> $\mathcal{L}(\tilde{\Omega})\alpha = \tilde{d}\alpha$.

Nous ferons encore le calcul en coordonnées locales : prenons sur X^2 les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1'}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n'}$, considérés, par passage au quotient, comme éléments de $\underline{J^{k+1}(T)}$, et complétons-les en une base de $\underline{J^{k+1}(T)}$ au moyen de vecteurs de $\underline{J}_o^{k+1}(T)$; les n premières formes de la base duale de $\underline{J^{k+1}(T)^*}$ sont les $\tilde{d}x_i = \overline{(\varepsilon^{-1})}{}^* dx_i$, et l'on a

$$(\varepsilon^{-1} - \mathrm{id})\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

considéré comme élément de $\underline{J^{k+1}(T)} + \underline{\tilde{J}}^{k+1}(T)$, d'où l'expression :

$$\tilde{\Omega} = \Sigma\, \tilde{d}x_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} = \tilde{d}x \otimes \frac{\partial}{\partial x} .$$

Posons (ce qui "n'est pas canonique" ... tant pis !) $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_2$, avec

$$\tilde{\Omega}_1 = \tilde{d}x \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \in \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}}^{k+1}(T) , \quad \tilde{\Omega}_2 = \tilde{d}x \otimes \frac{\partial}{\partial x'} \in \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{J^{k+1}(T)} .$$

Nous allons établir les formules suivantes :

i) $\mathcal{L}(\tilde{\Omega}_1)\alpha = \tilde{d}\alpha$ ii) $\mathcal{L}'(\tilde{\Omega}_2)\alpha = 0$.

<u>Démonstration de</u> i). Remarquons que le germe de groupe à un paramètre défini sur X^2 par $\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i'}$ préserve la structure de produit de X^2, et commute donc à ε ; si l'on pose $\bar{\alpha} = \varepsilon^*(\alpha) \in T^*$, on aura donc

$$\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial x'_i} + \frac{\partial}{\partial x_i})\alpha = (\varepsilon^{-1})^*\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial x'_i} + \frac{\partial}{\partial x_i})\bar{\alpha} = (\varepsilon^{-1})^*\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial x_i} .$$

Ce qui, joint à (3.7) et à la définition de $\tilde{d}$, donne immédiatement le résultat.

Démonstration de ii). L'assertion est évidente pour α de degré 0 , d'après la définition de $\mathcal{L}'$, et le fait que $d'\alpha = 0$. Il suffit donc de la démontrer pour α de degré 1 ; on a alors

$$\mathcal{L}'(\tilde{\Omega}_2)\alpha = i(\tilde{\Omega}_2)d'\alpha - d'i(\tilde{\Omega}_2)\alpha = i(\tilde{\Omega}_2)d'\alpha - d'\alpha .$$

Il suffit donc d'établir qu'on a $i(\tilde{\Omega}_2)d'\alpha = d'\alpha$; or pour η_1 et $\eta_2 \in \underline{J^{k+1}}(T)$, on a :

$$< \eta_1 \wedge \eta_2 , i(\tilde{\Omega}_2)d'\alpha > = \Sigma < \eta_1 , \tilde{d}x_i > < \eta_2 , i(\frac{\partial}{\partial x'_i})d'\alpha > - < \eta_2 , \tilde{d}x_i > < \eta_1 , i(\frac{\partial}{\partial x'_i})d'\alpha >$$

$$= \Sigma < \eta_1 , \tilde{d}x_i > < \frac{\partial}{\partial x'_i} \wedge \eta_2 , d'\alpha > - < \eta_2 , \tilde{d}x_i > < \frac{\partial}{\partial x'_i} \wedge \eta_1 , d'\alpha >$$

$$= -\Sigma < \eta_1 , \tilde{d}x_i > < [\frac{\partial}{\partial x'_i}, \eta_2], \alpha > - < \eta_2 , \tilde{d}x_i > < [\frac{\partial}{\partial x'_i}, \eta_1], \alpha > .$$

Mais on voit immédiatement que

$$\Sigma < \eta_1 , \tilde{d}x_i > [\frac{\partial}{\partial x'_i}, \eta_2] - < \eta_2 , \tilde{d}x_i > [\frac{\partial}{\partial x'_i}, \eta_1]$$

a même projection sur $\underline{J^\circ(T)}$ que $[\eta_1 , \eta_2]$ (si $\eta_1 = \Sigma\, \eta^i_1(x,x')\frac{\partial}{\partial x'_i}$, on a $< \eta_1 , \tilde{d}x_i > = \eta^i_1(x,x)$). Donc :

$$< \eta_1 \wedge \eta_2 , i(\tilde{\Omega}_2)d'\alpha > = - < [\eta_1 , \eta_2], \alpha > = < \eta_1 \wedge \eta_2 , d'\alpha >.$$

Ceci achève la démonstration.

Remarque (3.17). On pourrait définir la différentielle extérieure d sur $\Lambda^*\underline{\tilde{J}^k(T)}$ comme la dérivation qui est égale à la différentielle usuelle en degré 0, et qui est donnée en degré un par la formule habituelle :

$$< \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 , d\alpha > = - < [\tilde{\xi}_1 , \tilde{\xi}_2], \alpha > + \mathcal{L}(\tilde{\xi}_1) < \tilde{\xi}_2 , \alpha > - \mathcal{L}(\tilde{\xi}_2) < \tilde{\xi}_1 , \alpha >$$

on définit alors $\tilde{d}$ sur $\Lambda^*\underline{J^k(T)^*}$ par (3.11). Désignant ensuite par $\underline{\varepsilon}^{-1}$ (resp. $\mathbb{1}$) l'élément de $\underline{J^{k+1}}(T)^* \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}}(T)$ (resp. $\underline{J^{k+1}}(T)^* \otimes \underline{J^{k+1}}(T)$) défini par ε^{-1} (resp. l'identité), on définit encore $\mathcal{L}(\underline{\varepsilon}^{-1})\alpha$ par (3.7) et l'on trouve, en prenant une base locale de $\underline{J^{k+1}}(T)$ les formules suivantes, qui généralisent la proposition précédente :

$$\mathcal{L}(\underline{\varepsilon}^{-1})\alpha = \tilde{d}\alpha + d'\alpha \quad ; \quad \mathcal{L}(\mathbb{1})\alpha = d'\alpha .$$

Le crochet défini par la formule (3.12) n'est pas "le meilleur possible", en vertu des remarques suivantes : tout d'abord, pour u , $v \in \Lambda^*\underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{J^{k+1}}(T)$, on obtient seulement un élément de $\Lambda^*\underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^k}(T)$, alors que (3.8) donne un élément de $\Lambda^* \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}}(T)$ (dont le précédent est simplement la projection par $\mathrm{id} \otimes \bar{\omega}_k$) ; d'autre part, pour u quelconque, $v \in \Lambda^q \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}}(T)$, si $k \geqq 1$ ou $k = q = 0$, le résultat ne dépend en fait que de la projection $u' = (\mathrm{id} \otimes \bar{\omega}_k)u$ (ainsi que nous l'avons remarqué pour $u = \tilde{\Omega}$). Dans ce qui suit, nous écrirons des crochets de type $[u,v]$ en leur attribuant la "meilleure valeur possible", compte tenu de ces remarques.

PROPOSITION (3.18). <u>On a les formules suivantes</u>

(3.18.1) $[\tilde{d},\mathcal{L}(u)]\beta = \mathcal{L}(\tilde{D}u)\beta$ $\quad (\beta \in \Lambda^* \underline{J^\circ(T)}^* ;\ u \in \Lambda^* \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{\tilde{J}^{k+1}(T)} ;\ k \geqq 1)$

(3.18.2) $\tilde{D}[u,v] = [\tilde{D}u,v] + (-1)^p[u,\tilde{D}v]$
$(u,v \in \Lambda^* J^\circ(T)^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(T) ;\ \deg u = p ;\ k \geqq 1)$

(3.18.3) $[\tilde{\Omega},\tilde{\Omega}] = 0$.

La première formule s'écrit $[\mathcal{L}(\tilde{\Omega}),\mathcal{L}(u)] = \mathcal{L}[\tilde{\Omega},u]$, et la seconde s'écrit comme l'identité de Jacobi pour $\tilde{\Omega}$, u, v ; quant à la troisième, elle montre que la formule $\tilde{D}\,\tilde{D}\,u = 0$ peut s'écrire comme l'identité de Jacobi pour $\tilde{\Omega},\tilde{\Omega},u$. Indiquons rapidement comment on établit ces formules.

Pour (3.18.1), on traite tout d'abord le cas où $u = \tilde{\xi}$ est de degré 0. La considération du groupe à un paramètre associé à un relèvement de $\tilde{\xi}$ conduit facilement à la formule

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi})\mathcal{L}(\tilde{\Omega})\beta = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\tilde{\xi})\tilde{\Omega})\beta + \mathcal{L}(\tilde{\Omega})\mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta = -\mathcal{L}(\tilde{D}\tilde{\xi})\beta + \tilde{d}\mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta ,$$

d'où le résultat cherché puisque le premier membre vaut $\mathcal{L}(\tilde{\xi})\tilde{d}\beta$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\tilde{d}\mathcal{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})\beta - (-1)^p\mathcal{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})\tilde{d}\beta &= \tilde{d}(\alpha \wedge \mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta) - (-1)^p\alpha \wedge \mathcal{L}(\tilde{\xi})\tilde{d}\beta \\ &= \tilde{d}\alpha \wedge \mathcal{L}(\tilde{\xi})\beta + (-1)^p\alpha \wedge [\tilde{d} \wedge [\tilde{d},\mathcal{L}(\tilde{\xi})]\beta\end{aligned}$$

et l'on est immédiatement ramené au cas précédent.

Pour (3.18.2), on prend encore $u = \tilde{\xi}$ de degré 0, et l'on a (encore par un argument de groupe à un paramètre) :

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi})[\tilde{\Omega},v] = [\mathcal{L}(\tilde{\xi})\tilde{\Omega},v] + [\tilde{\Omega},\mathcal{L}(\tilde{\xi})v] ,$$

qui s'écrit encore

$$[\tilde{\xi},\tilde{D}v] = -[\tilde{D}\tilde{\xi},v] + \tilde{D}[\tilde{\xi},v] ,$$

ce qui est le résultat cherché ; on passe de là au cas général en utilisant (3.18.1) et (3.13).

Enfin, la formule (3.18.3) se vérifie en coordonnées locales ; on a

$$\tilde{\Omega} = \Sigma\, \tilde{d}x_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$$

d'où

$$[\tilde\Omega,\tilde\Omega] = \sum_{i,j} (\tilde dx_i \wedge \tilde dx_j) \otimes [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] + 2 \sum_i (\mathcal{L}(\tilde\Omega)\tilde dx_i) \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$$

d'après (3.12) ; mais le premier terme du second membre est évidemment nul, et le second est nul d'après (3.16). C.Q.F.D.

Remarque (3.19). Il peut être commode pour les calculs effectifs de "transporter" les opérations précédentes sur $\underline{\Lambda^* T^*} \otimes \underline{\tilde J^{k+1}(T)}$; de façon précise posons, pour $\alpha,\beta \in \underline{\Lambda^* T^*}$; $\bar\alpha = (\varepsilon^{-1})^*\alpha$, $\bar\beta = (\varepsilon^{-1})^*\beta \in \underline{\Lambda^* J^\circ(T)^*}$; pour $\tilde\xi,\tilde\eta \in \underline{\tilde J^{k+1}(T)}$, posons alors :

$$\mathrm{ad}(\alpha\otimes\tilde\xi)\beta = (\varepsilon^*\otimes \mathrm{id})\mathcal{L}(\bar\alpha\otimes\tilde\xi)\beta$$

$$D'(\alpha\otimes\tilde\xi) = (\varepsilon^*\otimes \mathrm{id})\tilde D(\bar\alpha\otimes\tilde\xi) = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon^{-1})D(\alpha\otimes\xi)\ , \qquad \xi = \varepsilon\tilde\xi$$

$$[\![\alpha\otimes\tilde\xi,\beta\otimes\tilde\eta]\!] = (\varepsilon^*\otimes \mathrm{id})[\bar\alpha\otimes\tilde\xi,\beta\otimes\tilde\eta]$$

on a alors :

$$(3.19.1) \qquad \mathrm{ad}(\alpha\otimes\tilde\xi)\beta = \mathcal{L}(\alpha\otimes\tilde\xi)\beta - (-1)^p D'(\alpha\otimes\tilde\xi)\bar\wedge\beta \qquad (p = \deg\alpha)$$

$$(3.19.2) \qquad [\![u,v]\!] = [u,v] - (-1)^p D'u\bar\wedge v + (-1)^{pq+q} D'v\bar\wedge u \qquad (p = \deg u\ ,\ q = \deg v)$$

où le $\mathcal{L}$ et le crochet du second membre sont ceux de Frölicher-Nijenhuis. Ceci montre que, aux notations près, les notions introduites ici sont équivalentes à celles considérées par Spencer [1] (mais la considération de $J^\circ(T)^*$ rend les invariances plus évidentes).

Démontrons (3.19.1) pour $\alpha = 1$, et β de degré 1, on a, pour $\eta \in \underline{J^\circ(T)}$

$$\mathcal{L}(\tilde\xi) < \eta,\bar\beta > = \mathcal{L}(\tilde\xi) < \varepsilon^{-1}(\eta),\beta > ,$$

d'où, d'après (3.15) :

$$< \mathcal{L}(\tilde\xi)\eta,\bar\beta > + < \eta,\mathcal{L}(\tilde\xi)\bar\beta > = < \varepsilon^{-1}\mathcal{L}(\tilde\xi)\eta,\beta > - < \eta\bar\wedge\tilde D\tilde\xi,\beta > + < \varepsilon^{-1}(\eta),\mathcal{L}(\tilde\xi)\beta >$$

$$= < \mathcal{L}(\tilde\xi)\eta,\bar\beta > - < \varepsilon^{-1}(\eta),D'\tilde\xi\bar\wedge\beta > + < \varepsilon^{-1}(\eta),\mathcal{L}(\tilde\xi)\beta >$$

d'où le résultat ; le reste des formules précédentes se déduit ensuite facilement de (3.1), (3.2), (3.7) et (3.8).

Revenons aux notations du paragraphe 2 : il résulte immédiatement de (3.8) que si R^k est une équation de Lie, $\bar\Lambda^*\underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{R}^k$ est stable par le crochet (3.8), et par conséquent est une sous-algèbre de Lie graduée de $\Lambda^*\underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{J^k(T)}$. Nous allons en déduire le résultat suivant (qui d'ailleurs pourrait aussi bien se démontrer à partir de 3.6) :

PROPOSITION (3.20). Si R^k est une équation de Lie, R^{k+1} est aussi une équation de Lie.

Soient $\tilde{\xi},\tilde{\eta} \in \underline{\tilde{R}}^{k+1}$; il faut montrer qu'on a aussi $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] \in \tilde{R}^{k+1}$; d'une part on a bien

$$\bar{\omega}_k[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] = [\bar{\omega}_k\tilde{\xi},\bar{\omega}_k\tilde{\eta}] \in \underline{\tilde{R}}^k \ .$$

Reste donc à voir qu'on a $D\varepsilon[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] \in T^* \otimes \underline{R}^k$, ou encore $\tilde{D}[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] \in \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{\tilde{R}}^k$, ce qui résulte aussitôt de la remarque précédente, et de la formule (3.18.2) :

$$\tilde{D}[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] = [\tilde{D}\tilde{\xi},\tilde{\eta}] + [\tilde{\xi},\tilde{D}\tilde{\eta}] \ .$$

Remarque (3.21). Dans la démonstration précédente, seule la relation $[\underline{\tilde{R}}^k,\underline{\tilde{R}}^k] \subset \underline{\tilde{R}}^k$ est intervenue (le fait que R^k soit un fibré, et a fortiori le fait qu'il soit formellement intégrable n'a joué aucun rôle). Si donc nous appelons "opérateur différentiel de Lie" un morphisme $\varphi : J^k(T) \to F$ (F, un fibré vectoriel) tel qu'on ait $[\underline{\tilde{R}}^k,\underline{\tilde{R}}^k] \subset \underline{\tilde{R}}^k$, les prolongements $p^\ell(\varphi)$ seront encore des opérateurs de Lie. Il en résulte que, si l'on obtient une équation formellement intégrable pour ℓ assez grand, ou, plus généralement, en appliquant le procédé de Goldschmidt [3] (qui consiste, en gros, à rajouter des équations obtenues en dérivant les équations initiales, de manière à aboutir, sous des hypothèses de régularité convenable, à une équation formellement intégrable), cette équation sera "de Lie" au sens de la définition (2.4). Il semble donc que cette définition, malgré son caractère apparemment très grossier, soit suffisante "en pratique" i.e. dans le cas où l'on espère des théorèmes et pas seulement des définitions (alors qu'a priori, on devrait penser plutôt à imposer des conditions sur l'opérateur φ lui-même).

4. Transformations diagonales.

A) Soient $\Pi^k(a,b)$ (resp. $\Pi^k(a)$, resp. Π^k) l'ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to X$, de source a et de but b (resp. de source a et de but quelconque, resp. de source et de but quelconques); muni de la loi de composition des jets, Π^k est un groupoïde, i.e. une petite catégorie(1) dont les flèches sont inversibles. D'autre part, Π^k est muni naturellement d'une structure de variété différentiable. Sauf mention expresse du contraire, nous considèrerons Π^k comme fibré sur X par la projection "source". Nous noterons alors $\underline{\Pi}^k_a$ ses germes de sections en a , et $\underline{\Pi}^k = \bigcup_a \underline{\Pi}^k_a$ le faisceau de ses sections.

Soit d'autre part F une application $X^2 \to X$, et posons $f(x) = F(x,x)$; l'application $\tilde{F} = (f,F) : X^2 \to X^2$ est Π_1-projetable et préserve Δ ; nous dirons que $\tilde{F}$ est diagonale si, en outre, pour tout $x \in X$, le germe en x de

1) Une catégorie est "petite" si ses flèches forment un ensemble.

l'application $x' \longmapsto F(x,x')$ est inversible ; le composé de deux applications diagonales est évidemment encore diagonal ; pour qu'une application diagonale $\tilde{F} = f,F)$ soit inversible au voisinage de Δ, il faut et il suffit que f soit inversible.

Par définition, nous dirons que deux applications diagonales $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ ont même partie principale d'ordre k (k entier $\geqq 0$) si elles coïncident sur Δ, ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqq k$, ce qui entraîne en particulier $f = g$; nous écrirons quelquefois cela abusivement $F(x,x') = G(x,x') \bmod (x'-x)^{k+1}$. A la partie principale d'ordre k définie par $\tilde{F}$, on fait correspondre la section de Π^k suivante : $x \longmapsto \{$jet d'ordre k en x de $x' \longmapsto F(x,x')\}$; il est clair que l'on obtient ainsi une bijection de l'ensemble des parties principales d'ordre k d'applications diagonales sur $\Gamma(X,\Pi^k)$: dans la suite, nous identifierons ces deux espaces ; de façon plus précise : soit $F \in \Pi^k$: <u>on peut considérer</u> F <u>soit comme jet d'ordre</u> k <u>d'application</u> $X \to X$, <u>ou encore de section du fibré trivial</u> $X^2 \to X$, <u>soit comme valeur sur un point d'une partie principale d'application diagonale</u> ; seul le second point de vue se prête à la transformation de F par les automorphismes diagonaux de X (le premier n'étant adapté qu'aux transformations de la forme $y' = g(x')$, $y = g(x)$, i.e. préservant Π_1 et Π_2 ; dans ce cas les deux points de vue sont équivalents). <u>Nous adopterons donc en principe le second point de vue</u>, le premier n'intervenant - aussi peu que possible - que pour nous rattacher à la théorie formelle des équations différentielles. Nous espérons que cette remarque permettra au lecteur de se sortir des situations les plus inextricables...

De même, les germes de sections de Π^k seront identifiés aux "germes de parties principales d'ordre k d'applications diagonales", que l'on définit comme on pense. Par passage au quotient, ou en utilisant la loi de composition de $\underline{\Pi}^k$, on obtient une loi qui, à $\tilde{F} \in \underline{\Pi}^k_a$ et $\tilde{G} \in \underline{\Pi}^k_{f(a)}$, associe $\tilde{G}\tilde{F} \in \underline{\Pi}^k_a$. Le sous-faisceau, noté $\underline{\tilde{\Pi}}^k$, des éléments inversibles de $\underline{\Pi}^k$, est encore un groupoïde ; une section $\tilde{F}$ de $\underline{\Pi}^k$ est donc une section de $\underline{\tilde{\Pi}}^k$ si et seulement si elle est <u>étale</u> (i.e. localement inversible), ou encore si f est étale.

Soit $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$ le faisceau des germes d'applications étales $X \to X$; à $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)$, on associe le germe d'application diagonale $(x,x') \mapsto (f(x),f(x'))$ dont la partie principale d'ordre k sera désignée par $\tilde{j}^k f$ (il est clair que, dans le "premier point de vue" ci-dessus, cela coïncide avec ce que tout le monde note $j^k f$). Pour $k = 0$, on obtient un isomorphisme $\tilde{j}^\circ : \underline{\mathrm{Aut}}(X) \to \underline{\tilde{\Pi}}^\circ$. Dans la suite, nous identifierons ces deux faisceaux [de même que nous avons identifié $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\tilde{j}^\circ(\Gamma)}$].

Notons enfin que $\underline{\tilde{J}^k(T)}$ peut être considéré comme "l'algèbre de Lie" de $\underline{\tilde{\Pi}}^k$, dans le même sens où l'on considère habituellement T comme "l'algèbre de Lie" de $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$, c'est-à-dire qu'on a les propriétés suivantes :

a) soit $\tilde{F}_t$ une famille à un paramètre de sections de $\underline{\tilde{\Pi}}^k$, dépendant différentiablement de t , avec $\tilde{F}_0 = \mathrm{id}$; en relevant la situation à X^2, on définit de manière évidente

$$\frac{d}{dt}\tilde{F}_t\Big|_{t=0} \in \Gamma(X,\underline{\tilde{J}^k(T)}) \ ;$$

b) soit $\tilde{\xi} \in \Gamma(X,\underline{\tilde{J}^k(T)})$; en relevant $\tilde{\xi}$ en un champ diagonal sur X^2, on définit, pour tout ouvert U relativement compact de X (en abrégé $U \subset\subset X$) et tout $t\in\mathbb{R}$ voisin de 0 :

$$\exp(t\tilde{\xi})|_U \in \Gamma(U,\underline{\tilde{\Pi}}^k) \ .$$

Les formules usuelles sur l'exponentielle des champs de vecteurs sont encore vraies, puisque tout est défini à partir de la situation usuelle sur X^2. Enfin, de la définition de $\tilde{j}^k$ résulte que, pour tout $\xi \in \Gamma(X,T)$, on a, pour $U \subset\subset X$ et t voisin de 0

$$\tilde{j}^k \exp(t\xi)|_U = \exp(t\ \tilde{j}^k\xi)|_U \tag{4.1}$$

(dans la suite, nous omettrons d'indiquer l'ouvert U, par abus de notation).

Les correspondances précédentes s'étendent encore aux germes, ou aux sections sur des ouverts de X (nous laissons le lecteur préciser...).

Prenons $k \geqq 0$, et soit $\tilde{F} \in \Gamma(X,\underline{\tilde{\Pi}}^{k+1})$; le théorème (3.6) et les considérations précédentes nous amènent à poser

$$\mathfrak{D}\tilde{F} = \tilde{F}^{-1}(\Omega) - \Omega \ . \tag{4.2}$$

En effectuant le calcul en coordonnées locales, après avoir relevé $\tilde{F}$ en une application diagonale, on trouve

$$\mathfrak{D}\tilde{F} = dx\,\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x'} \ , \tag{4.3}$$

ce qui montre que $\mathfrak{D}\tilde{F}$ est bien défini en tant que section de $T^* \otimes J^k(T)$; de plus, $\mathfrak{D}\tilde{F} = 0$ équivaut à $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, ou encore $\tilde{F} = \tilde{j}^{k+1}(f)$.

De $[\Omega,\Omega] = 0$, on tire $[\tilde{F}^{-1}(\Omega),\tilde{F}^{-1}(\Omega)) = 0$, d'où, d'après (3.6) et (4.2) "l'équation de structure" (pour $k \geqq 1$; pour $k = 0$, cette équation est vide):

$$D\mathfrak{D}\tilde{F} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{D}\tilde{F},\mathfrak{D}\tilde{F}] = 0 \ . \tag{4.4}$$

En passant aux germes, on obtient le "complexe non linéaire de Spencer" (1ère forme)

$$(4.5)\qquad \mathrm{Aut}(X) \xrightarrow{\tilde{J}^{k+1}} \underline{\tilde{\Pi}}^{k+1} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \underline{T^* \otimes J^k(T)} \xrightarrow{\mathfrak{D}_1} \underline{\Lambda^2 T^* \otimes J^{k-1}(T)}$$

avec $\mathfrak{D}_1 u = Du + \frac{1}{2}[u,u]$, et ce complexe est exact en $\underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$. La théorie de l'équivalence peut être faite avec ce complexe (cf. Guillemin-Sternberg [1], Quê [1]). Il nous paraît cependant préférable d'utiliser la variante qui fait intervenir $\tilde{\Omega}$ et le théorème (3.14), pour une raison qui apparaîtra au § 6. Pour cela, notons que pour $\tilde{F} \in \Gamma(X,\underline{\tilde{\Pi}}^{k+1})$, $\tilde{F}^{-1}$ opère sur les $\tilde{J}^{\ell}(T)$ $(\ell \leq k+1)$ et les $J^{\ell}(T)$ $(\ell \leq k)$ et leurs duals, et commute avec les divers crochets définis au § 3 ; on peut donc définir, $\tilde{\Omega}$ étant "pris à l'ordre k" :

$$(4.6)\qquad \tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = \tilde{\Omega} - \tilde{F}^{-1}(\tilde{\Omega}) \in \Gamma(X, J^{\circ}(T)^* \otimes [J^k(T) + \tilde{J}^k(T)]) .$$

En fait, on a $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} \in \Gamma(X,J^{\circ}(T)^* \otimes \tilde{J}^k(T))$; en effet, avec les notations de la remarque (3.17), où $k+1$ est remplacé par k , on a $\tilde{\Omega} = \underline{\varepsilon}^{-1} - \mathbb{1}$; comme $\tilde{F}^{-1}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, il vient

$$(4.7)\qquad \tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = \underline{\varepsilon}^{-1} - \tilde{F}^{-1}(\underline{\varepsilon}^{-1}) \in \Gamma(X,J^k(T)^* \otimes \tilde{J}^k(T)) .$$

Ceci, joint à (4.6), donne le résultat cherché.

Il est facile de trouver la formule reliant $\mathfrak{D}\tilde{F}$ et $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F}$; en effet, de la formule (3.5) : $\varepsilon\tilde{\xi} = \tilde{\xi}\,\bar{\wedge}\,\Omega$, et de (4.2), on tire

$$\tilde{F}^{-1}(\varepsilon\tilde{\xi}) = \varepsilon\,\tilde{F}^{-1}(\tilde{\xi}) + \tilde{F}^{-1}(\tilde{\xi})\,\bar{\wedge}\,\mathfrak{D}\tilde{F} ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(4.8)\qquad \tilde{F}^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon + i'(\mathfrak{D}\tilde{F}) \qquad (i', \text{ le produit intérieur droit}) .$$

D'autre part, (4.7) s'écrit aussi :

$$(4.9)\qquad \tilde{F}^{-1}(\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1} - i'(\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F}) .$$

Par conséquent, les applications $\varepsilon + i'(\mathfrak{D}\tilde{F})$ et $\varepsilon^{-1} - i'(\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F})$ sont inverses l'une de l'autre ; on en déduit d'abord que $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = 0$ équivaut à $\mathfrak{D}\tilde{F} = 0$, donc à $\tilde{F} = \tilde{j}^{k+1}(f)$; on en déduit ensuite l'expression de $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F}$ en coordonnées.

En effet, pour $\tilde{\xi} = a(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} + a(x,x)\frac{\partial}{\partial x}$, posons

$$\eta = \eta(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} = \varepsilon\,\tilde{\xi} + \tilde{\xi}\,\bar{\wedge}\,\mathfrak{D}\tilde{F} ;$$

d'après (4.3), on a

$$\eta(x,x') = \xi(x,x') + \xi(x,x)\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-1}$$

d'où

$$\eta(x,x) = \xi(x,x)\left[I + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-1}(x,x)\right] = \xi(x,x)\frac{df}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-1}(x,x)$$

puisque

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial F}{\partial x'}(x,x) = \frac{df}{dx}$$

d'où finalement

$$\xi(x,x') = \eta(x,x') - \eta(x,x)M(x,x') \ , \quad \text{avec} \quad M(x,x') = \frac{\partial F}{\partial x'}(x,x)\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-1}$$

et par conséquent,

$$(4.10) \qquad \tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F} = \tilde{d}x \otimes \left[M(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} + M(x,x)\frac{\partial}{\partial x}\right] .$$

Cette formule m'avait été donnée par C. Buttin, dans un état de la théorie antérieur aux formules (4.6) et (4.7).

Finalement, de $[\tilde{\Omega},\tilde{\Omega}] = 0$ et de (3.14) on tire "l'équation de structure" (2ème forme)

$$(4.11) \qquad \tilde{D}\,\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F} - \tfrac{1}{2}\,\bar{\omega}_{k-1}[\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F},\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F}] = 0$$

(on écrit ici $\bar{\omega}_{k-1}$ pour $\mathrm{id} \otimes \bar{\omega}_{k-1}$) cette projection intervient ici du fait que $[\tilde{\Omega},\tilde{\Omega}]$ n'est défini que comme forme à valeurs dans $\tilde{J}^{k-1}(T)$, alors que $[\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F},\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F}]$ est défini, pour $k \geqq 1$, comme forme à valeurs dans $\tilde{J}^k(T)$; pour $k = 0$, la formule est vide et la question ne se pose pas).

En passant aux germes, on trouve donc le "complexe non-linéaire de Spencer" (2ème forme)

$$(4.12) \qquad \underline{\mathrm{Aut}}(X) \xrightarrow{\tilde{J}^k} \underline{\tilde{\Pi}}^{k+1} \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{D}}} \underline{J^\circ(T)^* \otimes \tilde{J}^k(T)} \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{D}}_1} \underline{\Lambda^2 J^\circ(T)^* \otimes \tilde{J}^{k-1}(T)}$$

avec $\tilde{\mathfrak{D}}_1 u = \tilde{D}u - \frac{1}{2}\,\bar{\omega}_{k-1}[u,u]$; et ce complexe est encore exact en $\underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$.

<u>Remarque</u> (4.13) (Analogue de 3.19). Pour $\alpha \in \Lambda^*\underline{T}^*$, posons $\bar{\alpha} = (\varepsilon^{-1})^*\alpha$, et $\mathrm{Ad}\tilde{F}^{-1}(\alpha) = \varepsilon^*\tilde{F}^{-1}(\bar{\alpha})$. Pour calculer $\mathrm{Ad}\tilde{F}^{-1}(\alpha)$, notons qu'il coïncide avec $\tilde{F}^{-1}(\alpha)$ lorsque α est de degré 0, et que, d'autre part, $\mathrm{Ad}\tilde{F}^{-1}$ commute au produit extérieur ; il suffit donc de faire le calcul pour $\deg(\alpha) = 1$; or, en transposant (4.8), on trouve $\tilde{F}^{-1}((\varepsilon^{-1})^*) = (\varepsilon^{-1})^* - i(\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F})$ et de même, en transposant (4.7) : $\tilde{F}^{-1}(\varepsilon^*) = \varepsilon^* + i(\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F})$; on en déduit que, pour $\deg(\alpha) = 1$, on a

$$\varepsilon^*\tilde{F}^{-1}((\varepsilon^{-1})^*\alpha) = \varepsilon^*[\tilde{F}^{-1}((\varepsilon^{-1})^*)]\tilde{F}^{-1}(\alpha) = \tilde{F}^{-1}(\alpha) - \varepsilon^*[\tilde{\mathfrak{D}}\,F \,\bar{\wedge}\, \tilde{F}^{-1}(\alpha)] ,$$

ou encore, en posant $\mathfrak{D}'\tilde{F} = (\varepsilon^* \otimes \mathrm{id})\tilde{\mathfrak{D}}\,\tilde{F}$,

$$\mathrm{Ad}\tilde{F}^{-1}(\alpha) = \tilde{F}^{-1}(\alpha) - \mathfrak{D}'\tilde{F} \,\bar{\wedge}\, \tilde{F}^{-1}(\alpha) \qquad (\deg(\alpha) = 1) .$$

Dans cet article, nous n'utiliserons pas cette formule.

B) En vue d'effectuer dans la suite les prolongements des équations que nous allons introduire, nous aurons besoin encore de quelques définitions. Si E est un fibré vectoriel sur X, les germes de sections du fibré $J^\ell(J^k(E))$ peuvent être identifiés aux germes de sections de $\Pi_3^*(E)$ sur X^3, modulo $(x'-x)^{\ell+1},(x''-x')^{k+1}$ les applications

$$j^{\ell} : \underline{J^k(E)} \to \underline{J^{\ell}(J^k(E))} \qquad \text{et} \qquad \lambda^{\ell} : \underline{J^{k+\ell}(E)} \to \underline{J^{\ell}(J^k(E))}$$

(voir définition au § 1) peuvent alors être décrites ainsi, avec la définition évidente des $\Pi_{ij} : X^3 \to X^2$:

$$j^{\ell}s = \Pi_{23}^{*}s \bmod (x'-x)^{\ell+1}, (x''-x')^{k+1}$$

$$\lambda^{\ell}s = \Pi_{13}^{*}s \bmod (x'-x)^{\ell+1}, (x''-x')^{k+1} .$$

Si l'on prend $E = T$, on est alors amené à identifier $\underline{J^{\ell}(J^k(T))}$ aux germes de champs Π_{12}-verticaux sur X^3, modulo $(x'-x)^{\ell+1}$, $(x''-x')^{k+1}$; modulo les passages aux quotients indiqués, on aura alors, pour $\xi = a(x,x')\frac{\partial}{\partial x'}$

$$j^{\ell}\xi = a(x',x'')\frac{\partial}{\partial x''} , \quad \lambda^{\ell}\xi = a(x,x'')\frac{\partial}{\partial x''} .$$

Appelons bidiagonaux les champs de vecteurs ξ sur X^3 qui

1) préservent $\Pi_{23}^{-1}(\Delta)$,

2) sont Π_{12}-projetables, avec $\Pi_{12}(\xi)$ diagonal sur X^2.

En passant au quotient par $(x''-x')^{k+1}, (x'-x)^{\ell+1}$, on obtient un faisceau noté $\underline{\tilde{J}^{(\ell,k)}(T)}$; en coordonnées locales, un tel champ s'écrit

$$\xi = a(x,x',x'')\frac{\partial}{\partial x''} + a(x,x',x')\frac{\partial}{\partial x'} + a(x,x,x)\frac{\partial}{\partial x}, \text{ modulo } (x''-x')^{k+1}, (x'-x)^{\ell+1};$$

l'application $\xi \longmapsto a(x,x',x'')\frac{\partial}{\partial x''}$ est un isomorphisme $\underline{\tilde{J}^{(\ell,k)}(T)} \to \underline{J^{\ell}(J^k(T))}$ analogue à l'application ε ; nous la noterons encore ε , et nous définirons

$$\tilde{j}^{\ell} : \underline{\tilde{J}^k(T)} \to \underline{\tilde{J}^{(\ell,k)}(T)} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\lambda}^{\ell} : \underline{\tilde{J}^{k+\ell}(T)} \to \underline{\tilde{J}^{(\ell,k)}(T)}$$

par $\tilde{j}^{\ell} = \varepsilon^{-1} j^{\ell} \varepsilon$, $\tilde{\lambda}^{\ell} = \varepsilon^{-1}\lambda^{\ell}\varepsilon$. On vérifie immédiatement que $\underline{\tilde{J}^{(\ell,k)}(T)}$ est un faisceau d'algèbre de Lie sur X , et que $\tilde{j}^{\ell}$ et $\tilde{\lambda}^{\ell}$ sont des homomorphismes de faisceaux d'algèbres de Lie.

Introduisons maintenant les analogues "finis" des notions précédentes ; considérons une application $\tilde{F} : X^3 \to X^3$ qui possède les propriétés suivantes :

1) $\tilde{F}$ préserve $\Pi_{23}^{-1}(\Delta)$,

2) $\tilde{F}$ est Π_{12}-projetable, et $\Pi_{12}(\tilde{F})$ est diagonale $X^2 \to X^2$.

1) et 2) équivalent à ceci : $\tilde{F}$ peut s'écrire $y'' = F(x,x',x'')$; $y' = F(x,x',x')$; $y = F(x,x,x)$, F étant une application $X^3 \to X$ telle que, pour tout $x \in X$, le germe en x de l'application $x' \longmapsto y'$ soit inversible.

Nous dirons que $\tilde{F}$ est bidiagonale si, outre 1) et 2), elle possède la propriété suivante :

3) Pour tout $x \in X$, le germe en x de l'application $(x',x'') \longmapsto (y',y'')$ est inversible. (D'après le théorème des fonctions implicites, il revient au même de supposer que le germe en x de l'application $x'' \longmapsto F(x,x',x'')$ est inversible).

On dira que deux applications bidiagonales $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ ont même partie principale d'ordre (ℓ,k) si, en coordonnées locales, on a $F-G = 0 \bmod (x',x)^{\ell+1}$, $(x''-x')^{k+1}$; on définit ainsi le faisceau $\underline{\Pi}^{(\ell,k)}$ des germes de parties principales d'ordre (ℓ,k) d'applications bidiagonales ; il s'identifie au faisceau des sections (pour la fibration "source") du fibré $\Pi^{(\ell,k)}$ des jets d'ordre ℓ de sections étales de $\underline{\Pi}^k$ (i.e. de sections de $\tilde{\underline{\Pi}}^k$), muni de la loi de composition des jets, $\Pi^{(\ell,k)}$ est encore un groupoïde ; on désigne enfin par $\tilde{\underline{\Pi}}^{(\ell,k)}$ le sous-faisceau des sections étales de $\Pi^{(\ell,k)}$ (ce sont les sections telles que $x \longmapsto F(x,x,x)$ soit étale) ; c'est encore un groupoïde, et $\underline{\tilde{J}^{(\ell,k)}(T)}$ peut être considéré comme son "algèbre de Lie", dans le même sens que $\underline{\tilde{J}^k(T)}$ est "l'algèbre de Lie" de $\tilde{\underline{\Pi}}^k$ (nous laissons les détails au lecteur).

Les versions "finies" des applications $\tilde{j}^\ell : \tilde{\underline{\Pi}}^k \to \tilde{\underline{\Pi}}^{(\ell,k)}$ et $\tilde{\lambda}^\ell : \tilde{\underline{\Pi}}^{(k,\ell)} \to \tilde{\underline{\Pi}}^{(\ell,k)}$ peuvent se définir ainsi : si $\tilde{F}$ est défini par $y' = F(x,x')$; $y = F(x,x)$, $\tilde{j}^\ell\tilde{F}$ est défini par $y'' = F(x',x'')$; $y' = F(x',x')$; $y = F(x,x)$, et $\tilde{\lambda}^\ell\tilde{F}$ est défini par $y'' = F(x,x'')$; $y' = F(x,x')$; $y = F(x,x)$.

De là résultent immédiatement les propriétés suivantes :

(4.14) $\tilde{j}^\ell$ est un homomorphisme de groupoïdes $\tilde{\underline{\Pi}}^k \to \tilde{\underline{\Pi}}^{(\ell,k)}$

(4.15) $\tilde{\lambda}^\ell$ est un homomorphisme de groupoïdes $\tilde{\underline{\Pi}}^{k+\ell} \to \tilde{\underline{\Pi}}^{(\ell,k)}$; de plus $\tilde{\lambda}^\ell$ est défini "fibre par fibre", i.e. définit un homomorphisme de groupoïdes $\Pi^{k+\ell} \to \Pi^{(\ell,k)}$ que nous noterons λ^ℓ.

(4.16) $\tilde{j}^\ell$ et $\tilde{\lambda}^\ell$ commutent à l'exponentielle des champs de vecteurs.

5. Equations de Lie : forme finie.

Soit $I_k(a) \in \Pi^k(a,a)$ le jet d'ordre k en a de l'identité, et soit I_k la section de $\Pi^k : a \mapsto I_k(a)$; soit $\tilde{\xi} \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$; pour $U \subset\subset X$ et t voisin de 0, nous avons vu que l'on peut définir $\exp(t\tilde{\xi}) \in \Gamma(U, \underline{\Pi}^k)$; en prenant la dérivée en $t = 0$, on obtient une application de $\tilde{J}^k(T)$ dans le fibré verticaux $V(\Pi^k)|_{I_k}$ des vecteurs de Π^k le long de I_k, dont on vérifie immédiatement que c'est un isomorphisme, et que cet isomorphisme est invariant par les automorphismes diagonaux ; dans la suite, il n'y aura donc aucun inconvénient à identifier ces deux espaces.

Soit $F \in \Pi^k(a,b)$; l'application $G \longmapsto GF$ est un isomorphisme $\Pi^k(b) \to \Pi^k(a)$; à un vecteur $\tilde{\xi} \in \tilde{J}^k(T)(b)$, considéré comme vecteur vertical de Π^k en $I_k(b)$, cet isomorphisme fait correspondre un vecteur de $\Pi^k(a)$ en F, i.e. un vecteur vertical de $\Pi^k(a)$ en F, que nous noterons $\tilde{\xi}F$; à un champ $\tilde{\xi} \in \Gamma(X,\tilde{J}^k(T))$ on fait ainsi correspondre un champ vertical invariant à droite (en un sens évident) sur Π^k : $F \mapsto \tilde{\xi}F$, que nous noterons aussi $\tau^k(\tilde{\xi})$. Il revient au même de construire τ^k ainsi : considérons un instant pour $a \in X$ fixé , $\Pi^k(a)$ comme fibré sur X par la projection "but" ; si g est un automorphisme de X , associons-lui l'automorphisme de $\Pi^k(a)$: $F \to (\tilde{j}^k g)(b)F$, avec $b = \mathrm{but}(F)$; en passant aux automorphismes infinitésimaux, on obtient une structure de prolongement d'ordre k de X sur $\Pi^k(a)$, qui coïncide avec la restriction de τ^k à $\Pi^k(a)$; en particulier, τ^k est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit maintenant R^k une équation de Lie ; la collection des $\tilde{R}^k F$, $F \in \Pi^k$, est un système de Pfaff complètement intégrable, et transverse à I_k , puisque formé de vecteurs verticaux. L'ensemble des sous-variétés intégrables passant par les points de I_k définit donc un germe de sous-variété de Π^k au voisinage de I_k , que nous noterons $\mathcal{P}^k$; nous désignerons aussi par $\mathcal{P}^k$ un représentant du germe précédent, que l'on sera amené à restreindre au besoin, pour que les propriétés qui suivent soient vraies.

Il résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites que la restriction à $\mathcal{P}^k$ de l'application "source" et de l'application "but" sont des submersions ; par contre, la restriction à $\mathcal{P}^k$ de l'application "source $\times$ but" est une submersion si et seulement si R^k est <u>formellement transitif</u>, i.e. si la projection $\tilde{R}^k \to T$ est surjective (dans le cas général, on ne peut absolument rien dire, vu que nous n'avons même pas supposé $\tilde{R}^k \to T$ de rang constant).

On démontre, comme dans la théorie des groupes de Lie, que $\mathcal{P}^k$ est un germe de sous-groupoïde de Π^k le long de I_k , c'est-à-dire que si l'on a : $F \in \mathcal{P}^k$ et $G \in \mathcal{P}^k$ assez voisins de I_k avec source G = but F , on a $F^{-1} \in \mathcal{P}^k$ et $GF \in \mathcal{P}^k$; nous laissons les détails au lecteur.

Comme Π^k , $\mathcal{P}^k$ sera muni sauf exception de la projection "source"; on notera alors $\underline{\mathcal{P}}^k$ le faisceau de ses sections, et $\tilde{\underline{\mathcal{P}}}^k$ le faisceau de ses sections étales. <u>Dans la suite</u>, <u>nous supposerons</u> $k \geqq 1$, le cas $k = 0$ étant trivial par Frobénius.

Soit $J^k(X)$ l'espace des jets d'ordre k d'applications $X \to X$, (ou, ce qui revient au même, de sections du fibré trivial $X^2 \to X$), muni de la projection "source"; si l'on considère Π^k comme un ouvert de $J^k(X)$ (cf. début du § 4), $\mathcal{P}^k$ est une équation différentielle non-linéaire d'ordre k dans le fibré $X^2 \to X$ Nous utiliserons dans ce cas la théorie formelle des équations différentielles, en prenant pour référence Goldschmidt [2] ; dans ce contexte, nous allons rappeler rapidement quelques résultats essentiellement bien connus (voir notamment Quê[1]).

Pour $F \in \Pi^{(1,k)}$ et $\tilde{\xi}$ section de $\tilde{J}^{(1,k)}(T)$, on peut définir $\tilde{\xi}F$, vecteur vertical de $\Pi^{(1,k)}$ en F, de la même manière que nous avons défini τ^k ci-dessus ; désignons par $\tilde{J}^1(\tilde{R}^k) \subset \tilde{J}^{(1,k)}(T)$ (resp. $J^1(\mathcal{P}^k)$, resp. $\tilde{J}^1(\mathcal{P}^k) \subset \Pi^{(1,k)}$) l'ensemble des jets d'ordre 1 de section de $\tilde{R}^k$ (resp. de sections de $\mathcal{P}^k$, resp. de sections étales de $\mathcal{P}^k$) ; il est facile de voir que $\underline{\tilde{J}^1(\tilde{R}^k)}$ est encore un faisceau d'algèbres de Lie, et que, au voisinage de $\tilde{J}^1 I_k = \tilde{\lambda}^1 I_{k+1}$, $\tilde{J}^1(\mathcal{P}^k)$ peut être construit au moyen du système de Pfaff $F \longmapsto \tilde{J}^1(\tilde{R}^k)F$ de la même manière que $\mathcal{P}^k$ a été construit au moyen de $\tilde{R}^k$ (nous laissons les détails au lecteur) ; d'autre part, du fait que $\tilde{\lambda}^1 : \Pi^{k+1} \to \Pi^{(1,k)}$ est un homomorphisme de groupoïdes, résulte que $\tilde{\lambda}^1$ commute à l'opération $(\tilde{\xi},F) \longmapsto \tilde{\xi}F$. Ces faits, joints à l'égalité $\tilde{R}^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1}\tilde{J}^1(\tilde{R}^k)$ (qui exprime que R^{k+1} est le prolongement d'ordre 1 de $\tilde{R}^k$) entraînent, au voisinage de I_{k+1}, la relation :

$$\mathcal{P}^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1}\tilde{J}_1(\mathcal{P}^k) .$$

D'autre part, Π^{k+1} s'identifie naturellement en prolongement d'ordre 1 de Π^k (puisque $k \geq 1$, un élément de $J^{k+1}(X)$ dont la projection d'ordre k est inversible, est lui-même inversible) ; d'autre part, on a, par le même argument,

$$\tilde{J}^1(\mathcal{P}^k) \cap \tilde{\lambda}^1(\Pi^{k+1}) = J^1(\mathcal{P}^k) \cap \tilde{\lambda}^1(\Pi^{k+1}) .$$

Par conséquent, $(\mathcal{P}^k)^{(1)} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1}\tilde{J}_1(\mathcal{P}^k)$ est le prolongement d'ordre 1 de $\mathcal{P}^k$, et l'on a le résultat suivant :

PROPOSITION (5.1). <u>Au voisinage de</u> I_{k+1}, <u>on a</u> $\mathcal{P}^{k+1} = (\mathcal{P}^k)^{(1)}$; <u>en particulier la projection</u> $(\mathcal{P}^k)^{(1)} \to \mathcal{P}^k$ <u>est surjective</u>.

Le dernier point résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites et de l'hypothèse " $R^{k+1} \to R^k$ surjectif".

Naturellement, on notera dans la suite $\underline{(\mathcal{P}^k)^{(1)}}$ [resp. $\underline{(\tilde{\mathcal{P}}^k)^{(1)}}$] le faisceau des sections (resp. des sections étales) de $(\mathcal{P}^k)^{(1)}$, comme sous-fibré de $\Pi^{(1,k)}$.

La fin de ce paragraphe sera consacrée à l'étude de la δ-cohomologie de $\mathcal{P}^k$, et de son complexe de Spencer. Soit $V(\Pi^k)$ (resp. $V(\Pi^k)(F)$, $F \in \Pi^k$) le fibré des vecteurs verticaux de Π^k (resp. l'ensemble des vecteurs verticaux en F de Π^k); rappelons que l'application $\tilde{\xi} \longmapsto \tilde{\xi}F^{-1}$ (ou, si l'on préfère, la projection "but") est un isomorphisme $V(\Pi^k)(F) \xrightarrow{\sim} \tilde{J}^k(T)(b)$, ce dernier espace étant identifié à $V(\Pi^k)(I_k(b))$, $b = $ but F.

Soit $\tilde{G}$ un automorphisme diagonal de X^2 ; pour $a \in X$, l'application $F \longmapsto \tilde{G}(b)F$ (b = but F) est un difféomorphisme de $\Pi^k(a)$; en particulier, il envoie $\tilde{\xi} \in \tilde{J}^k(T)(a)$ en un vecteur vertical au point $\tilde{G}(a)$, que nous noterons $\tilde{G}\tilde{\xi}$; il est visible que $\tilde{G}\tilde{\xi}$ ne dépend que de $\tilde{\xi}$ et du jet d'ordre 1 de $\tilde{G}$ en a , d'où une application

$$\Pi^{1,k} \underset{X}{\times} \tilde{J}^k(T) \rightarrow V(\Pi^k) ,$$

que nous noterons $(H,\xi) \rightarrow H\xi$, ce dernier étant un vecteur vertical en $\bar{\omega}_1(H)$, si l'on désigne par $\bar{\omega}_1$ la projection naturelle $\Pi^{1,k} \rightarrow \Pi^k$. Il est visible aussi que l'application composée $\xi \mapsto \tilde{G}\tilde{\xi} \mapsto \tilde{G}\tilde{\xi}\tilde{G}(a)^{-1}$ de $\tilde{J}^k(T)(a)$ sur $\tilde{J}^k(T)(b)$ (b=but $\tilde{G}(a)$) n'est autre que l'opération naturelle de $\tilde{G}$ sur $\tilde{J}^k(T)$, considérée au § 4.

Prenons maintenant $H_1 \in \Pi^{k+1}(a)$, et posons $H = \bar{\omega}_k H_1 \in \Pi^k(a)$, b = but H ; considérons l'application

$$\tilde{J}^k(T)(a) \rightarrow \tilde{J}^k(T)(b) : \tilde{\xi} \rightarrow (\lambda^1 H_1)\tilde{\xi}H^{-1} .$$

Soit f un germe d'automorphisme de X en a , avec $\tilde{J}^{k+1}f(a) = H_1$; il est clair qu'on a $(\tilde{J}^1 \tilde{J}^k f)(a) = \lambda^1 H_1$, donc l'application précédente est l'opération naturelle de la transformation diagonale (f,f) - ou, si l'on préfère, de $\tilde{J}^k f$ - sur $\tilde{J}^k(T)(a)$, c'est-à-dire sur $J^k(T)(a)$, puisque (f,f) commute à ε. Cela s'exprime encore de la manière suivante : l'opération naturelle de $\tilde{\Pi}^{k+1}$ sur $J^k(T)$, considérée au § 4 se fait fibre par fibre dans les deux espaces, d'où une application

$$\Pi^{k+1} \underset{X}{\times} J^k(T) \rightarrow J^k(T)$$

notée en principe $(H_1,\xi) \longmapsto H_1(\xi) \in J^k(T)(b)$ b = but H_1 ; nous écrirons aussi quelquefois $H_1[\xi]$ au lieu de $H_1(\xi)$ pour éviter les confusions avec les opérations dans $V(\Pi^k)$ définies plus haut ; alors, notre application est simplement $\tilde{\xi} \longmapsto \varepsilon^{-1} H_1[\varepsilon\tilde{\xi}]$.

Soit alors $F_1 \in \underline{\Pi}^{k+1}_a$, avec $\bar{\omega}_k F_1 = F$; considérons l'automorphisme u de $\tilde{J}^k(T)(a)$: $\tilde{\xi} \longmapsto F^{-1}.\tilde{\lambda}^1 F_1(a).\tilde{\xi}$ (on pourrait aussi écrire $\tilde{J}^1 F(a)^{-1}$ au lieu de F^{-1}) ; de ce qui précède et de (4.9), on déduit qu'on a :

$$u(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} - (\varepsilon\tilde{\xi}) \bar{\Lambda} \tilde{\mathcal{D}}\tilde{F} \tag{5.2}$$

ou encore, avec les notations de (4.13) :

$$u(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} - \tilde{\xi} \bar{\Lambda} \mathcal{D}'\tilde{F} .$$

De même, si l'on considérait u^{-1} au lieu de u , on serait conduit à une formule contenant $\mathcal{D}\tilde{F}$ au lieu de $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F}$; le lecteur averti reconnaîtra là les considérations connues relatives à la forme fondamentale de Cartan (cf. Bernard [1]) et à la définition de $\mathcal{D}\tilde{F}$ à partir de cette forme (Guillemin-Sternberg [1]).

La formule (5.2) peut encore s'écrire un peu autrement (cf. Quê [1]) : soit $J^1(\Pi^k)$ l'espace des jets d'ordre 1 de sections de Π^k ; on a une injection canonique $\Pi^{(1,k)} \subset J^1(\Pi^k)$ ($\Pi^{(1,k)}$ étant l'ensemble de ceux de ces jets qui sont inversibles), et soit $J^1_o(\Pi^k)$ l'ensemble des $F \in J^1(\Pi^k)$ se projetant dans Π^k sur I_k ; posons encore $\Pi_o^{(1,k)} = J^1_o(\Pi^k) \cap \Pi^{(1,k)}$, on sait (par exemple Goldschmidt [2]) que $J^1(\Pi^k)$ est un fibré affine sur Π^k, de fibré vectoriel associé $T^* \otimes V(\Pi^k)$; en un point $F \in J^1_o(\Pi^k)$, ce fibré affine a une section canonique, i.e. $\tilde{j}^1 I_k$; d'où un isomorphisme $\partial : J^1_o(\Pi^k) \to T^* \otimes \tilde{J}^k(T)$; on vérifie alors la formule suivante :

(5.3) si $F \in \Pi_o^{(1,k)}(a)$, $\tilde{\xi} \in \tilde{J}^k(T)(a)$, $F\tilde{\xi} = \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \,\bar{\wedge}\, \partial F$.

De là, et de (5.2) on déduit ceci : soit $\tilde{F}_1 \in \underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$ avec $\bar{\omega}_k(\tilde{F}_1) = \tilde{F}$, alors, on a :

$$(5.4) \qquad \partial(\tilde{j}^1_1\tilde{F})^{-1}(\tilde{\lambda}^1\tilde{F}_1) = -(\varepsilon^* \otimes \mathrm{id})\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F} \qquad (= -\mathcal{D}'\tilde{F}) .$$

De même, on trouverait

$$(5.5) \qquad \partial(\tilde{\lambda}^1\tilde{F}_1)^{-1}(\tilde{j}^1\tilde{F}) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon^{-1})\mathcal{D}\tilde{F} .$$

Ces formules sont du reste faciles à vérifier directement en coordonnées, en utilisant (4.3) et (4.10), et l'expression suivante de ∂ : soit $F \in J^1_o(\Pi^k)$: F s'écrit comme une application $X^3 \to X$: $y'' = F(x,x',x'') \bmod (x'-x)^2, \overline{(x''-x')^{k+1}}$, avec $F(x,x,x'') = x''$; on a alors :

$$F(x,x',x'') = x'' + \Sigma\, a_i(x,x'')(x'_i - x_i) ,$$

les a_i étant définis $\bmod (x''-x)^{k+1}$; on a alors :

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\partial F = \Sigma\, dx_i \otimes a_i(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} = dx \otimes \frac{\partial F}{\partial x'}(x,x,x')\frac{\partial}{\partial x'} .$$

[A noter que les formules (5.4) et (5.5) sont l'analogue non linéaire de la formule bien connue suivante (qui est du reste la définition traditionnelle de D): si E est un fibré vectoriel sur X, on a un isomorphisme

$$T^* \otimes J^k(E) \to J^1_o(J^k(E))$$

et, pour $f \in \underline{J^{k+1}(E)}$ on a, en identifiant les deux espaces précédents :

$$Df = j^1 f - \lambda^1 f ;$$

cf. aussi la définition des formes différentielles, et de la différentielle extérieure dans Grothendieck [1]].

PROPOSITION (5.6). <u>Soit</u> $\tilde{F} \in \tilde{\Pi}^{k+1}$, <u>avec</u> $\bar{\omega}_k F \in \mathcal{P}^k$; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) $F \in (\underline{\tilde{\mathcal{P}}}^k)^{(1)}$

2) $\mathscr{D}\tilde{F} \in \underline{T}^* \otimes \underline{R}^k$

3) $\tilde{\mathscr{D}}\tilde{F} \in J^\circ(T)^* \otimes \underline{\tilde{R}}^k$.

Il est connu que $J^1(\mathcal{P}^k)$ est un sous-fibré affine de $J^1(\Pi^k)$ (restreint à $\mathcal{P}^k$), de fibré vectoriel associé $V(\mathcal{P}^k)$; par suite, on a $\partial J^1_0(\mathcal{P}^k) = T^* \otimes \tilde{R}_k$. Alors la formule (5.4) montre que 3) est équivalent à $\tilde{\lambda}^1\tilde{F} \in J^1(\mathcal{P}^k)$, donc à 1) ; l'équivalence de 1) et 3) s'établit de la même manière, à partir de (5.5) ; on peut aussi démontrer a priori l'équivalence de 2) et 3) en utilisant le fait que $\varepsilon + i'(\mathscr{D}\tilde{F})$ et $\varepsilon^{-1} - i'(\tilde{\mathscr{D}}\tilde{F})$ sont inverses l'un de l'autre, et la remarque élémentaire suivante : soient E un espace vectoriel, F un sous-espace de E , u une application linéaire $E \to E$ vérifiant $u(E) \subset F$, $I+u$ inversible ; alors, si l'on pose $(I+u)^{-1} = I-\tilde{u}$, on a $\tilde{u}(E) \subset F$.

De la proposition précédente résulte que le complexe (4.12) donne par restriction un complexe :

$$(5.7)\quad (\mathrm{sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^{k+1}} (\underline{\tilde{\mathcal{P}}}^k)^{(1)} \xrightarrow{\tilde{\mathscr{D}}} \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{R}}^k \xrightarrow{\tilde{\mathscr{D}}_1} \Lambda^2 \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^{k-1}(T)}$$

où (sol) désigne le faisceau des $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)$ vérifiant $\tilde{j}^k f \in \underline{\tilde{\mathcal{P}}}^k$ (c'est un germe au voisinage de I_k , dans la topologie fine $\mathscr{C}^k$, de sous-groupoïde de $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$, qu'on désigne souvent sous le nom de "pseudo-groupe de Lie"). Ce complexe est exact en $(\underline{\tilde{\mathcal{P}}}^k)^{(1)}$; par ailleurs, si R^k est contenu dans le prolongement d'une équation de Lie R^{k-1}, on peut remplacer le dernier terme par $\Lambda^2 J^\circ(T)^* \otimes \tilde{R}^{k-1}$.

De même, le complexe (4.5) donne par restriction un complexe analogue, que nous n'écrirons pas.

Remarque (5.8). Il est immédiat que les considérations précédant (5.2) "se restreignent à $\mathcal{P}^k$ "; en particulier, si $F \in \underline{\tilde{\mathcal{P}}}^k$, on aura $\tilde{F}(R^k) = R^k$; si $\tilde{F} \in (\tilde{\mathcal{P}}^k)^{(1)}$, on aura $\tilde{F}(R^k) \subset R^k$ (cette dernière égalité ayant d'ailleurs un sens "fibre par fibre").

Passons à l'étude du "complexe de δ-cohomologie" de $\mathcal{P}^k$; soit γ^k le noyau de $\bar{\omega}_k : J^k(T) \to J^{k-1}(T)$; à noter qu'on a un isomorphisme

$$\gamma^k \simeq S^k J^\circ(T)^* \otimes J^\circ(T)$$

commutant aux automorphismes diagonaux de X^2. Soit d'autre part $v(\Pi^k)$ le sous-espace de $V(\Pi^k)$ formé des vecteurs dont la projection dans $V(\Pi^{k-1})$ est nulle ; soit $F \in \Pi^k$, de source a , et de but b , avec $k \geq 1$; pour $0 \leq \ell \leq k$, la théorie formelle des équations différentielles (cf. Goldschmidt [2]) donne un complexe

$$(5.9)_k\quad 0 \to v(\Pi^k)(F) \xrightarrow{\delta} T^*(a) \otimes v(\Pi^{k-1})(F) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^*(a) \otimes v(\Pi^{k-n})(F) \to 0 ;$$

d'autre part, la théorie des équations linéaires donne un complexe (cf. § 1)

$$(5.10)_k \qquad 0 \to \gamma^k \xrightarrow{\delta} T^*(a) \otimes \gamma^{k-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^*(a) \otimes \gamma^{k-n} \to 0 .$$

Le passage de l'un de ces complexes à l'autre s'effectue par exemple ainsi : prenons $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)_a$ avec $\tilde{j}^k f(a) = F$; alors l'opération $\xi \longmapsto \tilde{j}^k(f)\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} = \varepsilon\xi$ envoie $J^k(T)(a)$ sur $V(\Pi^k)(F)$ [autrement dit, on prend $F_1 \in \Pi^{k+1}$, $\bar{\omega}_k F_1 = F$, et on considère l'application $\xi \longmapsto (\lambda^1 F_1 \tilde{\xi}]$; il est visible que la restriction de cette opération à γ^k ne dépend que de F , et même de $\bar{\omega}_1 F$; on opère de même pour γ^ℓ, $\ell \leq k$. A noter que, pour $\ell \neq 0$, il revient au même de prendre n'importe quel $\tilde{F} \in \tilde{\underline{\Pi}}^k_a$, avec $\tilde{F}(a) = F$, et de considérer l'application $\tilde{\xi} \longmapsto \tilde{F}\tilde{\xi}$, puisque ε^{-1} induit l'identité sur γ^ℓ (cette remarque nous servira dans le lemme 5.12 ci-dessous). On obtient ainsi un diagramme $(5.10)_k \to (5.9)_k$.

LEMME (5.11). <u>Ce diagramme est commutatif.</u>

Considérons un instant F comme jet de section du fibré trivial $X^2 \to X$, et considérons le germe (id, f^{-1}) de morphisme de X^2 au-dessus de X ; on sait (Goldschmidt [2]) qu'il commute à $(5.9)_k$. Nous sommes donc ramené au cas où $F = I_k(a)$, auquel cas la démonstration peut être laissée au lecteur.

Posons maintenant $g^k = R^k \cap \gamma^k$, $v(\mathcal{P}^k) = v(\Pi^k) \cap V(\mathcal{P}^k)$.

LEMME (5.12). <u>Soit</u> $F \in \mathcal{P}^k$, <u>de source</u> a ; <u>l'isomorphisme précédent</u>

$$\gamma^k(a) \ \tilde{\to}\ v(\Pi^k)(F)$$

<u>donne par restriction un isomorphisme</u>

$$g^k(a) \ \tilde{\to}\ v(\mathcal{P}^k)(F) .$$

Soit $\tilde{F} \in \tilde{\underline{\mathcal{P}}}^k_a$, avec $\tilde{F}(a) = F$; on a visiblement $\tilde{F}\tilde{\tilde{R}}^k(a) = V(\mathcal{P}^k)(F)$, d'où, par restriction, $\tilde{F}g^k(a) = v(\mathcal{P}^k)(F)$ (ici, on a $k \geq 1$, donc $g^k \subset \tilde{R}^k$) ; cela, joint à la remarque ci-dessus, donne le résultat cherché.

THÉORÈME (5.13). <u>Supposons</u> g^k <u>2-acyclique. Alors</u> $\mathcal{P}^k$ <u>est formellement intégrable.</u>

En effet, il résulte des lemmes précédents que $v(\mathcal{P}^k)$ est 2-acyclique, et que

$$[v(\mathcal{P}^k)]^{(1)} = \ker\{T^* \otimes v(\mathcal{P}^k) \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes v(\Pi^{k-1})\}$$

est un fibré vectoriel (i.e. est de rang constant), puisque isomorphe à

$$g^{k+1} \underset{X}{\times} (\mathcal{P}^k) \qquad (g^{k+1} = \ker\{R^{k+1} \to R^k\}).$$

D'autre part, on a vu que $(\mathcal{P}^k)^{(1)} \to \mathcal{P}^k$ est surjectif, c'est donc un fibré affine sur $\mathcal{P}^k$ de fibré vectoriel associé $[v(\mathcal{P}^k)]^{(1)}$. Le théorème résulte alors de Goldschmidt [2].

Remarque (5.14). Puisque R^k est supposé formellement intégrable, il existe un prolongement R^ℓ $(\ell \geq k)$ qui soit 2-acyclique (ou même involutif, i.e. n-acyclique ; cf. Quillen [1] ou Goldschmidt [1]). Quitte à restreindre $\mathcal{F}^k$ une fois de plus (on l'a déjà fait si souvent sans le dire !), on déduit alors de (5.1) et (5.12) que $\mathcal{F}^\ell$ est formellement intégrable et $\mathcal{F}^\ell \to \mathcal{F}^k$ surjectif ; d'où l'existence formelle (et même l'existence tout court, dans le cas analytique) de solutions dont le jet d'ordre k soit donné dans $\mathcal{F}^k$.

6. Problèmes d'équivalence

A) Rappelons la version "sophistiquée" du complexe de Spencer (Spencer [1] ou [2] ; voir aussi Quillen [1] et Goldschmidt [1] pour le cas linéaire). Soit $\tilde{\delta}$ la restriction de $-\tilde{D}$ à $\oplus \Lambda^p J^\circ(T)^* \otimes \gamma^k$ $(k \geq 1)$ et posons

$$\Gamma^{k,p} = \Lambda^p J^\circ(T)^* \otimes \tilde{J}^k(T)/\tilde{\delta}(\Lambda^{p-1} J^\circ(T)^* \otimes \gamma^{k+1}) \ , \quad \Gamma^k = \oplus\, \Gamma^{k,p} \ ;$$

à noter que (toujours pour $k \geq 1$) , $\underline{\Gamma}^k$ est une algèbre de Lie graduée pour le crochet quotient de celui défini au § 3 sur $\Lambda^p \underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^k(T)}$: cela résulte immédiatement de (3.18.2) et du fait que, pour $k \geq 2$, $\oplus \Lambda^p \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \gamma^k$ est un idéal de $\oplus \Lambda^p \underline{J^\circ(T)}^* \otimes \underline{\tilde{J}^k(T)}$ (par contre, pour $k = 1$, cette dernière propriété n'est plus vraie car $\mathcal{L}(\underline{\gamma^1})$ n'opère pas trivialement sur $J^\circ(T)^*$; seul le fait que $\underline{\gamma}^1$ est un idéal de $\underline{\tilde{J}^1(T)}$ subsiste). On a alors un complexe

$$(6.1) \qquad 0 \to I \xrightarrow{\tilde{J}^k} \underline{\Gamma}^{k,0} \xrightarrow{\hat{D}} \underline{\Gamma}^{k,1} \xrightarrow{\hat{D}} \cdots \xrightarrow{\hat{D}} \underline{\Gamma}^{k,n} \to 0$$

obtenu de la manière suivante : soit $u \in \Gamma^{k,p}$; on relève u en

$$u' \in \Lambda^p J^\circ(T)^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(T)$$

et $\hat{D}u$ est la classe de $\tilde{D}u'$ dans $\Gamma^{k,p+1}$ (on vérifie immédiatement qu'elle ne dépend que de u) ; il est connu que ce complexe est acyclique ; et la formule (3.18.2) sera encore vraie ici, avec $\tilde{D}$ remplacé par $\hat{D}$, le crochet étant ici celui de $\underline{\Gamma}^k$.

La version "non commutative" de (6.1) s'obtient ainsi : toujours pour $k \geq 1$, soit $\Pi_k^{k+1}(a)$ l'ensemble des $G \in \Pi^{k+1}(a)$, avec $\bar{\omega}_k G = I_k(a)$; on sait que Π^{k+1} est un fibré affine sur Π^k , la fibre du fibré vectoriel associé étant $v(\Pi^{k+1})$; en $I_k(a)$, ce fibré a un élément canonique, i.e. $I_{k+1}(a)$ d'où un isomorphisme $\partial : \Pi_k^{k+1}(a) \xrightarrow{\sim} \gamma^{k+1}(a)$; cet isomorphisme s'interprète d'ailleurs aussi comme un isomorphisme du groupe $\Pi_k^{k+1}(a)$ sur son algèbre de Lie ; on vérifie immédiatement que le diagramme suivant est commutatif :

(6.2)
$$\begin{array}{ccc} \Pi_k^{k+1} & \xrightarrow{\lambda^1} & J_o^1(\Pi^k) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \gamma^{k+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes \gamma^k \end{array}.$$

De là et de (5.5) on déduit ceci :

(6.3) <u>si</u> $G \in \Pi_k^{k+1}$, <u>on a</u> $\tilde{D}G = -\tilde{\delta}g$, <u>avec</u> $g = \partial G$.

Soit maintenant $\tilde{F} \in \underline{\tilde{\Pi}}^k$; relevons $\tilde{F}$ en $\tilde{F}_1 \in \underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$ et soit $\hat{\mathcal{D}}\tilde{F}$ la classe de $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F}_1$ dans $\Gamma^{k,1}$: cette classe ne dépend pas de $\tilde{F}_1$: en effet, soit $\tilde{F}_2$ un autre relèvement de $\tilde{F}$; on a $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 G$, $G \in \Pi_k^{k+1}$ d'où, par (4.6) et (6.3)

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F}_2 = \tilde{\mathcal{D}}G + G^{-1}(\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F}_1) = -\tilde{\delta}g + G^{-1}(\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F}_1) ;$$

d'autre part, G opère trivialement sur $\underline{J^\circ(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^k(T)}$, d'où finalement

$$\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}\tilde{F}_2 = -\tilde{\delta}g + \tilde{\tilde{\mathcal{D}}}\tilde{F}_1 .$$

Posons maintenant, pour $\alpha \in \underline{\Gamma}^{k,1}$: $\hat{\mathcal{D}}_1\alpha = \hat{D}\alpha - \frac{1}{2}[\alpha,\alpha]$; on obtient ainsi une suite :

(6.4)
$$\underline{\mathrm{Aut}}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \underline{\tilde{\Pi}}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \Gamma^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \underline{\Gamma}^{k,2}$$

dont on vérifie immédiatement que c'est un complexe, et qu'il est exact en $\underline{\tilde{\Pi}}^k$. A remarquer que si l'on avait voulu partir de (4.5) au lieu de (4.12), on aurait eu des difficultés sérieuses (notamment, on aurait trouvé un quotient de $T^* \otimes J^k(T)$ par un groupe affine, et non plus par un sous-espace vectoriel, et la version "sophistiquée" de $\hat{\mathcal{D}}_1$ serait en conséquence peu maniable) : ceci est notre raison majeure de travailler à partir de (4.12).

Comme $\hat{\mathcal{D}}$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 , il définit un morphisme de fibrés $p^1(\hat{\mathcal{D}}) : \Pi^{(1,k)} \to \Gamma^{k,1}$ que la formule (5.4) permet facilement d'interpréter : soient $F' \in \Pi^{(1,k)}$, F sa projection dans Π^k, et F_1 un relèvement de F à Π^{k+1} ; alors $p^1(\hat{\mathcal{D}})F'$ est la classe dans $\Gamma^{k,1}$ de

$$-[(\varepsilon^*)^{-1} \otimes \mathrm{id}]\partial(F'^{-1}.\lambda^1 F_1) ,$$

classe indépendante de F_1 comme nous venons de le voir ; on en déduit que l'égalité $p^1(\hat{\mathcal{D}})F' = 0$ équivaut à $F' \in \lambda^1\Pi^{k+1}$.

Désignons d'autre part par $\hat{\Gamma}^{k,1}$ l'ensemble des $\alpha \in \Gamma^{k,1}$ dont la projection $\bar{\omega}_\circ(\alpha)$ dans $J^\circ(T)^* \otimes T$ vérifie : "$\underline{\varepsilon}_o^{-1} - i'(\alpha)$ est inversible" [$\underline{\varepsilon}_o^{-1}$ étant l'élément de $J^\circ(T)^* \otimes T$ associé à $\varepsilon^{-1} : J^\circ(T) \to T$] ;

l'image de $\Pi^{(1,k)}$ – et même l'image de $\Pi_o^{(1,k)} = J_o^1(\Pi^k) \cap \Pi^{(1,k)}$ – dans $\Gamma^{k,1}$ par $p^1(\hat{\mathfrak{D}})$ est égale à $\hat{\Gamma}^{k,1}$ (parce que $\partial\,\Pi_o^{1,k}$ est l'ensemble des $\alpha \in T^* \otimes \tilde{J}^k(T)$ vérifiant " id + $\bar{\omega}_o(\alpha)$ est inversible" ; vérification immédiate à partir de l'expression de ∂ en coordonnées donnée au § 5). En résumé :

LEMME (6.6). <u>Pour</u> $k \geq 1$, <u>la suite</u>

$$I_{k+1} \to \Pi^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} \Pi^{(1,k)} \xrightarrow{p^1(\hat{\mathfrak{D}})} \hat{\Gamma}^{k,1} \to 0$$

<u>est exacte au sens suivant</u> : λ^1 <u>est injectif</u>, $p^1(\hat{\mathfrak{D}})$ <u>surjectif, et l'on a</u>

$$\mathrm{Im}(\lambda^1) = \ker p^1(\hat{\mathfrak{D}}) .$$

<u>De même, la suite</u>

$$I_{k+1} \to \Pi_k^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} \Pi_o^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\mathfrak{D}})} \hat{\Gamma}^{k,1} \to 0$$

<u>est exacte</u>.

PROPOSITION (6.7). <u>Pour tout</u> $k \geq 1$, <u>la suite</u>

$$\underline{\Pi}^k \xrightarrow{\hat{\mathfrak{D}}} \underline{\hat{\Gamma}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{D}}_1} \underline{\Gamma}^{k,2}$$

<u>est exacte</u>.

Il suffit évidemment de démontrer, pour tout $k \geq 0$, l'assertion suivante :

$(6.8)_k$ <u>Soit</u> $u \in \underline{J^o(T)^*} \otimes \underline{\tilde{J}^k(T)}$, <u>avec</u> $\varepsilon_o^{-1} - i'(\bar{\omega}_o u)$ <u>inversible</u> ,

$$\hat{D}u - \tfrac{1}{2}\,\bar{\omega}_{k-1}[u,u] = 0$$

(cette dernière assertion étant vide par hypothèse pour $k = 0$) ; <u>alors il existe</u> $\tilde{F} \in \underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$ <u>vérifiant</u> $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = u$.

Cette assertion se démontre par récurrence sur k ; pour $k = 0$, cela résulte des faits suivants, de vérification immédiate :

1) L'application $\partial : \Pi_o^1 \to T^* \otimes T$ est un isomorphisme de Π_o^1 sur le sous-ensemble des $u \in T^* \otimes T$ vérifiant " id+u est inversible" ;

2) pour $\tilde{F} \in \underline{\Pi}_o^1$, on a $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = -[(\varepsilon^*)^{-1} \otimes \mathrm{id}]\partial F$.

A noter qu'on pourra donc choisir $\tilde{F}$ vérifiant $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = u$ et $\bar{\omega}_o\tilde{F} = I_o$. Supposons alors $(6.8)_k$ démontré, et démontrons $(6.8)_{k+1}$; soit u comme dans l'énoncé, avec k remplacé par $k+1$, et soit $u' = \bar{\omega}_k u$; soit $F \in \underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$, avec $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F} = u'$, et relevons $\tilde{F}$ en $\tilde{F}_1 \in \underline{\tilde{\Pi}}^{k+2}$; cherchons $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 . G$, avec $G \in \underline{\Pi}_{k+1}^{k+2}$, tel qu'on ait $\tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F}_2 = u$; il revient au même de résoudre $\tilde{\mathfrak{D}}G = u - \tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F}_1$, ou, avec les notations de (6.3) : $-\tilde{\delta}g = u - \tilde{\mathfrak{D}}\tilde{F}_1 = v$; on a $\bar{\omega}_k v = 0$, donc $v \in \underline{J^o(T)}^* \otimes \underline{Y}^{k+1}$;

de plus, on vérifie facilement qu'on a encore $\tilde{D}v - \frac{1}{2}\bar{\omega}_k[v,v] = 0$, ce qui s'écrit aussi $\tilde{\delta}v = 0$; le résultat se déduit alors immédiatement de l'exactitude du complexe (1.3).

<u>Remarque</u> (6.9). Le raisonnement précédent montre qu'on peut en fait remplacer $\underline{\tilde{\Pi}}^k$ dans (6.7) par $\underline{\Pi}^k_o = \{\tilde{F}\in\tilde{\Pi}^k \mid \bar{\omega}\circ\tilde{F} = I\circ\}$, ce qui est du reste évident en remplaçant $\tilde{F}$ par $(\tilde{j}^k f)^{-1}\tilde{F}$, $f = \bar{\omega}\circ\tilde{F}$. D'autre part, l'application

$$\underline{\Pi}^k_o \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \underline{\hat{\Gamma}}^{k,1}$$

est injective puisque, pour $\tilde{F}$ et $\tilde{G}\in\underline{\tilde{\Pi}}^k$, l'égalité $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{F} = \tilde{\mathcal{D}}\tilde{G}$ (ou $\hat{\mathcal{D}}\tilde{F} = \hat{\mathcal{D}}\tilde{G}$) équivaut visiblement à $FG^{-1}\in\tilde{j}^k\,\underline{\mathrm{Aut}}(X)$; il en résulte que la suite des sections

$$\Gamma(X,\underline{\tilde{\Pi}}^k) \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \Gamma(X,\underline{\hat{\Gamma}}^{k,1}) \to \Gamma(X,\underline{\Gamma}^{k,2})$$

est encore exacte, et de même avec $\Gamma(X,\underline{\Pi}^k_o)$ au lieu de $\Gamma(X,\tilde{\Pi}^k)$.

Soit maintenant R^k une équation de Lie, avec $k \geqq 1$ comme d'habitude ; soit $C^{k,1}$ l'image de $J^\circ(T)^*\otimes\tilde{R}^k$ dans $\Gamma^{k,1}$, et posons $\hat{C}^{k,1} = C^{k,1}\cap\hat{\Gamma}^{k,1}$. On a évidemment $C^{k,1} = J^\circ(T)^*\otimes\tilde{R}^k/\tilde{\delta}g^{k+1}$; comme g^{k+1} est de rang constant, $C^{k,1}$ le sera aussi. De la surjectivité de $R^{k+1}\to R^k$, on déduit alors que

$$\hat{D} : \underline{\Gamma}^{k,0}(=\underline{\mathcal{J}^k(T)}) \to \underline{\Gamma}^{k,1}$$

envoie $\underline{\tilde{R}}^k$ dans $\underline{C}^{k,1}$; de même, la surjectivité de $(\mathcal{P}^k)^{(1)} \to \mathcal{P}^k$ et (5.7) montrent que (6.4) donne par restriction un complexe

$$(6.10)\qquad (\mathrm{sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \underline{\tilde{\mathcal{P}}}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \underline{\hat{C}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \underline{\Gamma}^{k,2}$$

et ce complexe est exact en $\tilde{\mathcal{P}}^k$.

Le lemme (6.6) donne alors par restriction le résultat suivant :

LEMME (6.11). <u>Les suites</u>

$$I_{k+1} \to (\mathcal{P}^k)^{(1)} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}^1(\mathcal{P}^k) \xrightarrow{P_1^1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{C}^{k,1} \to 0$$

$$I_{k+1} \to (\mathcal{P}^k)^{(1)}\cap\Pi^{k+1}_k \xrightarrow{\lambda^1} \mathcal{J}^1_o(\mathcal{P}^k) \xrightarrow{P_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{C}^{k,1} \to 0$$

<u>sont exactes</u>. (Pour l'analogie dans le cas linéaire, voir Goldschmidt [1]).

<u>Remarque</u> (6.12). <u>Supposons</u> g^k 2-<u>acyclique</u>, et soit $C^{k,2}$ l'image de $\Lambda^2 J^\circ(T)^*\otimes\tilde{R}^k$ dans $\Gamma^{k,2}$; on aura alors

$$C^{k,2} = \Lambda^2 J^\circ(T)^*\otimes\tilde{R}^k/\tilde{\delta}(J^\circ(T)^*\otimes g^{k+1}) ,$$

et l'on vérifie aisément que $C^{k,2}$ est de rang constant ; de la surjectivité de $R^{k+1}\to R^k$, on déduit alors qu'on a $\hat{D}\underline{C}^{k,1} \subset C^{k,2}$, d'où $\hat{\mathcal{D}}_1\underline{C}^{k,1}\subset C^{k,2}$;

le complexe (6.10) peut alors s'écrire :

$$(6.13) \qquad (\mathrm{sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \underline{\tilde{\mathcal{F}}}^k \xrightarrow{\hat{\mathfrak{D}}} \underline{\hat{C}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{D}}_1} \underline{C}^{k,2} .$$

Notons enfin ceci ; soit $\tilde{F}\in\tilde{\Pi}^k$, avec $k \geqq 1$; alors, l'action de $\tilde{F}^{-1}$ sur $\Lambda^p J^\circ(T)^* \otimes \underline{\tilde{J}^k(T)}$ passe au quotient pour donner une action de $\tilde{F}^{-1}$ sur $\Gamma^{k,p}$; il suffit pour cela de remarquer ceci : soit $u \in \Lambda^{p-1} J^\circ(T)^* \otimes \gamma^{k+1}$, et soit $\tilde{F}_1$ un relèvement de $\tilde{F}$ à $\underline{\tilde{\Pi}}^{k+1}$; alors $\tilde{F}_1^{-1}(u)$ ne dépend que de $\tilde{F}$ et u, et, en le notant $\tilde{F}^{-1}(u)$, on a $\tilde{F}^{-1}(\tilde{\delta} u) = \tilde{\delta}\tilde{F}^{-1}(u)$ (formule qui résulte immédiatement de (3.14) et de (4.6)). Pour $\tilde{F}\in\tilde{\Pi}^k$ et $\tilde{G}\in\tilde{\Pi}^k$, on a alors

$$(6.14) \qquad \hat{\mathcal{D}}(\tilde{F}\tilde{G}) = \hat{\mathcal{D}}\tilde{G} + \tilde{G}^{-1}(\hat{\mathcal{D}}\tilde{F})$$

qui résulte de la formule analogue pour $\hat{\mathcal{D}}$ (elle-même conséquence immédiate de (4.6)).

Pour $\alpha\in\underline{\Gamma}^{k,1}$, posons $\alpha^{\tilde{F}} = \hat{\mathfrak{D}}\tilde{F} + \tilde{F}^{-1}(\alpha)$; on a les formules suivantes :

$$(6.15) \qquad \alpha^{\tilde{F}\tilde{G}} = (\alpha^{\tilde{F}})^{\tilde{G}}$$

(formule qui, appliquée à $\alpha = 0$, redonne (6.14)),

$$(6.16) \qquad \hat{\mathcal{D}}_1 \alpha^{\tilde{F}} = \tilde{F}^{-1}(\hat{\mathcal{D}}_1 \alpha)$$

enfin, si $\alpha\in\underline{\hat{\Gamma}}^{k,1}$, on a $\alpha^{\tilde{F}}\in\underline{\hat{\Gamma}}^{k,1}$.

Ces résultats s'établissent comme les précédents ; nous laissons les détails au lecteur. Notons enfin que, pour $\tilde{F}\in\underline{\tilde{\mathcal{F}}}^k$, de $\tilde{F}^{-1}(\underline{\tilde{R}}^k) = \underline{\tilde{R}}^k$ on déduit

$$\tilde{F}^{-1}(\underline{C}^{k,p}) = \underline{C}^{k,p} ,$$

d'où une "restriction" des formules précédentes à $\underline{\mathcal{F}}^k$, $\underline{C}^{k,p}$ et $\underline{\hat{C}}^{k,1}$. Avec ces remarques se terminent enfin nos préliminaires... Toutes nos excuses au lecteur.

B) Soit Y une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $\dim Y = n$ ($= \dim X$) ; soit $\Pi'^k = \Pi^k_{X,Y}$ l'ensemble des jets d'ordre k inversibles d'application $X \to Y$; nous utiliserons dans cette situation plus générale les mêmes notions et notations que dans le cas $X = Y$ en laissant le lecteur les interpréter. Soit R^k une équation de Lie sur X (avec $k \geqq 1$), $\mathcal{F}^k \subset \Pi^k$ ($= \Pi^k_{X,X}$) sa "forme finie", et soit $\mathcal{F}'^k$ une sous-variété de Π'^k. Posons

$$\mathcal{F}^k(.,a) = \{F\in\mathcal{F}^k \mid \text{but } F = a\} , \quad a\in X ,$$

et définissons de même $\mathcal{F}'^k(.,b)$, avec $b\in Y$.

DÉFINITION (6.17). Nous dirons que $\mathcal{P}'^k$ est une $\mathcal{P}^k$ (ou une $\tilde{R}^k$)-structure si les propriétés suivantes sont vérifiées.

1) Sur $\mathcal{P}'^k$ les projections "source" et "but" sont des submersions.

2) $\mathcal{P}^k$ "opère principalement" sur $\mathcal{P}'^k$, au sens suivant : soit $F \in \mathcal{P}'^k$, de source a, et de but b ; alors un voisinage de F dans $\mathcal{P}'^k(.,b)$ est formé des FG, $G \in \mathcal{P}^k(.,a)$, G voisin de $I_k(a)$.

La première condition équivaut à ceci : par tout $F \in \mathcal{P}'^k$ passe un germe de section étale de $\mathcal{P}'^k$; en fait, parmi les $F_1 \in J^1(\mathcal{P}'^k)$ de projection F, l'ensemble de ceux qui sont inversibles formera un ouvert dense.

La seconde condition équivaut ensuite à ceci : soit $\mathcal{P}''^k = \{F \in \Pi^k_{Y,X} | F^{-1} \in \mathcal{P}'^k\}$; alors, pour tout $F \in \mathcal{P}''^k$, de source b et de but a, on a

$$V(\Pi''^k)(F) = \tilde{R}^k(a)F .$$

En considérant Π'^k comme un ensemble de jets de sections du fibré trivial $X \times Y \to X$, on fait de $\mathcal{P}'^k$ une équation différentielle d'ordre k dans ce fibré, qui est l'analogue non-linéaire d'une équation avec second membre, $\mathcal{P}^k$ étant l'analogue d'une équation homogène. A l'usage des non-spécialistes, et pour justifier le titre de ce paragraphe, donnons quelques mots d'explication : une telle équation intervient lorsqu'on cherche à comparer deux "structures infinitésimales" σ sur X et σ' sur Y (par exemple deux opérateurs différentiels, deux tenseurs, etc...) : R^k (resp. $\mathcal{P}^k$) est alors l'équation des automorphismes infinitésimaux (resp. des automorphismes) de σ, et $\mathcal{P}'^k$ l'équation des germes de difféomorphismes $X \to Y$ qui transforment σ en σ' ; trouver des germes de solutions de $\mathcal{P}'^k$ revient alors à montrer l'équivalence locale de σ et σ' (et, si $Y = X$, trouver une solution inversible de $\mathcal{P}'^k$ revient à montrer l'équivalence globale de σ et σ', mais nous n'aborderons pas ce problème ici).

Soit $F \in \mathcal{P}'^k$, de source a, et soit $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{P}}'^k_a$, avec $\tilde{F}(a) = F$; l'application $\xi \longmapsto \tilde{F}\tilde{\xi}$ ($\xi \in R^k(a)$, $\tilde{\xi} = \varepsilon^{-1}\xi$) permet de définir un isomorphisme du complexe $(5.10)_{k+\ell}$ ($\ell \geq 0$) sur le complexe de δ-cohomologie de $\mathcal{P}'^k$ en F (raisonner comme en (5.11) et (5.12)). D'autre part, on a le résultat suivant :

LEMME (6.18). Soit $F \in \mathcal{P}'^k$: les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) Il existe $F_1 \in (\mathcal{P}'^k)^{(1)}$, avec $\varpi_k F_1 = F$.

2) La "condition d'intégrabilité" suivante est vérifiée.

(C) Soit $F_2 \in \tilde{J}^1(\mathcal{P}'^k)$, de projection F dans $\mathcal{P}'^k$; on a $p_1(\hat{\mathcal{D}})F_2 \in C^{k,1}$.

Montrons 2) ⇒ 1). Soit F_2 comme dans l'énoncé ; on u en fait, $p_1(\hat{\mathfrak{D}})F_2 \in \hat{C}^{k,1}$; d'après le lemme (6.11) il existe $G \in \tilde{J}^1_0(\mathcal{P}^k)(a)$, avec $p_1(\hat{\mathfrak{D}})F_2 = p_1(\hat{\mathfrak{D}})G$; on a alors $G^{-1}F_2 \in J^1(\mathcal{P}'^k)$ et $p_1(\hat{\mathfrak{D}})(G^{-1}F_2) = 0$, donc $G^{-1}F_2 \in (\mathcal{P}'^k)^{(1)}$; l'implication 1) ⇒ 2) se démontre en renversant le calcul.

De là, en raisonnant comme en (5.13), on déduit la généralisation suivante du théorème (5.13).

THÉORÈME (6.19). <u>Supposons que R^k soit 2-acyclique et que, en tout point $F \in \mathcal{P}'^k$ la condition d'intégrabilité (C) soit satisfaite. Alors $\mathcal{P}'^k$ est formellement intégrable.</u>

Dans le cas analytique (i.e. X, Y, R^k et $\mathcal{P}'^k$ sont analytiques), on en déduit, par le théorème de Cartan-Kähler-Kur nishi, l'existence, $\forall F \in \mathcal{P}'^k$, d'une solution f de $\mathcal{P}'^k$ vérifiant $\tilde{j}^k f(a) = F$ (voir par exemple Kuranishi [1] ou l'appendice 2 du présent article).

DÉFINITION (6.20). <u>Nous dirons que $\mathcal{P}'^k$ est intégrable s'il est formellement intégrable et si</u>, $\forall F \in \mathcal{P}'^k$, <u>il existe</u> $f \in$ <u>Diff</u>(X,Y) (<u>faisceau des germes de difféomorphismes de</u> X <u>dans</u> Y) <u>vérifiant</u> $\tilde{j}^k f(a) = F$, $a =$ <u>source</u> F, et $\tilde{j}^k f \in \underline{\mathcal{P}}'^k$.

Etudier l'intégrabilité de $\mathcal{P}'^k$ revient à étudier la 1-cohomologie du complexe (6.10) ; pour le voir, il est commode de travailler dans les germes (ce qui revient à étudier les problèmes d'équivalence locaux "avec points marqués"). Le germe de variété $(\mathcal{P}'^k, F)$ avec source $F = a$ sera appelé un germe de $\mathcal{P}^k$-structure en a ; deux tels germes en a $(\mathcal{P}'^k, F)$ et $(\mathcal{P}''^k, G)$, avec $\mathcal{P}''^k \subset \Pi^k_{X,Z}$, Z une autre variété de dimension n, seront dits équivalents si la condition suivante est satisfaite : notons b (resp. c) le but de F (resp. de G) ; alors il existe un germe de difféomorphisme $\varphi : (Y,b) \to (Z,c)$ tel qu'on ait $\tilde{j}^k\varphi(\mathcal{P}'^k, F) = (\mathcal{P}''^k, G)$. Nous noterons $H^1(\underline{\mathcal{P}}^k_a)$ l'ensemble des classes d'équivalences de germes en a de $\mathcal{P}^k$ structures formellement intégrables ; pour qu'un germe $(\mathcal{P}'^k, F)$ soit équivalent à $(\mathcal{P}^k, I_k(a))$, il faut et il suffit que $\mathcal{P}'^k$ soit "intégrable en F" i.e. qu'il existe $f \in$ <u>Diff</u>$(X,Y)_a$, avec $\tilde{j}^k f(a) = F, \tilde{j}^k f \in {}'^k$.

Soit $\tilde{\underline{\mathcal{P}}}_{a,0}$ l'ensemble des germes $\tilde{F} \in \tilde{\underline{\mathcal{P}}}_a$, avec $\tilde{F}(a) = I_k(a)$; $\tilde{\underline{\mathcal{P}}}_{a,0}$ est un groupe qui opère à droite d'après (6.15) et (6.16) dans l'ensemble $\hat{\underline{Z}}^{k,1}_a$ des $u \in \hat{\underline{C}}^{k,1}_a$ vérifiant $\hat{\mathfrak{D}}_1 u = 0$; posons $\hat{H}_1(\mathcal{P}^k_a) = \hat{\underline{Z}}^{k,1}_a / \tilde{\underline{\mathcal{P}}}_{a,0}$.

Supposons R^k 2-acyclique, et soit $(\mathcal{P}'^k, F)$ un germe de $\mathcal{P}^k$-structure formellement intégrable (d'après les résultats précédents, il revient au même de dire que $\mathcal{P}'^k$ vérifie (C) en tout point G voisin de F). Soit $\tilde{F} \in \tilde{\underline{\mathcal{P}}}'^k_a$, avec $\tilde{F}(a) = F$, et soit u la classe de $\hat{\mathfrak{D}}\tilde{F}$ dans $\hat{H}^1(\underline{\mathcal{P}}^k_a)$; cette classe ne dépend pas du $\tilde{F}$ choisi ; en effet, si l'on prend $\tilde{F}' \in \underline{\tilde{\mathcal{P}}}'^{k}_{a}$, avec $\tilde{F}'(a) = F$, on aura $\tilde{F}' = \tilde{F}\tilde{G}$, avec $\tilde{G} \in \underline{\mathcal{P}}^{k}_{a,0}$, d'où par (6.14) $\hat{\mathfrak{D}}\tilde{F}' = (\hat{\mathfrak{D}}\tilde{F})^{\tilde{G}}$; si l'on prend $\varphi \in \underline{\mathrm{Diff}}(Y,Z)_b$, $b = \text{but } F$, du fait que $\hat{\mathfrak{D}}(\tilde{j}^{k}\varphi F) = \hat{\mathfrak{D}}F$, on déduit que l'image du germe $\tilde{j}^{k}\varphi(\mathcal{P}'_{k},F)$ dans $\hat{H}^1(\underline{\mathcal{P}}^{k}_{a})$ est la même que celle de $(\mathcal{P}'^{k},F)$; on obtient donc ainsi une application $H^1(\underline{\mathcal{P}}^{k}_{a}) \to \hat{H}^1(\underline{\mathcal{P}}^{k}_{a})$, qui est visiblement injective. Enfin, on déduit de la proposition (6.7) que cette application est surjective. En résumé

THÉORÈME (6.21) ("2e théorème fondamental"). <u>Si R^k est 2-acyclique, l'application précédente est un isomorphisme</u>

$$H^1(\underline{\mathcal{P}}^{k}_{a}) \overset{\sim}{\to} \hat{H}^1(\underline{\mathcal{P}}^{k}_{a})$$

Si l'on se place dans la catégorie des variétés (et morphismes) analytiques, ou formels, cela, joint au théorème (6.19) montre qu'on a $\hat{H}^1(\mathcal{P}^{k}_{a}) = 0$ (ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement par une étude de l'équation $\hat{\mathfrak{D}}\tilde{F} = u$, $\tilde{F} \in \underline{\tilde{\mathcal{P}}}^{k}$, $u \in \underline{C}^{k,1}$, analogue à l'étude faite dans Goldschmidt [1] dans le cas linéaire).

7. <u>Généralisation du théorème de Newlander-Nirenberg</u>.

Nous nous plaçons ici dans "la catégorie $\mathcal{C}^\infty$"; l'équation R^k sera dite analytique si elle provient d'une équation analytique sur X (supposé analytique-réel) par "oubli de la structure analytique".

THÉORÈME (7.1). <u>Soit R^k une équation de Lie 2-acyclique, analytique, et elliptique. En tout point $a \in X$, on a $H^1(\mathcal{P}^{k}_{a}) = 0$</u>.

Autrement dit : dans les hypothèses précédentes, soit $\mathcal{P}'^{k} \subset \Pi^{k}(X,Y)$ une $\mathcal{P}^{k}$-structure de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant la condition d'intégrabilité (6.18.c) ; alors $\mathcal{P}'^{k}$ est intégrable. Ce résultat avait été conjecturé par Spencer [1].

En vertu du théorème (6.21), il suffit pour cela de démontrer le résultat suivant : soit $u \in \underline{\hat{C}}^{k,1}_{a}$, vérifiant $\hat{\mathfrak{D}}_1 u = 0$; il existe $F \in \underline{\tilde{\mathcal{P}}}^{k}_{a,o}$ vérifiant $\hat{\mathfrak{D}}F = u$. Nous allons démontrer ce résultat par une généralisation de la méthode employée dans Malgrange [2] pour démontrer le théorème de Newlander-Nirenberg [1] (qui en est le cas particulier suivant : $X = \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^{n}$, $k = 1$, $\mathcal{P}^{1}$ est l'équation des germes d'automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^{n}$, considérés comme germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$, et R^1 est donc l'équation des automorphismes infinitésimaux de $\mathbb{C}^{n}$, en tant que variété analytique-complexe. Alors, $\mathcal{P}'^{1}$ est une structure presque-complexe et (6.18.c) sa condition d'intégrabilité).

Le théorème étant local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{R}^{n}$, et qu'on a $a = 0$; on peut aussi, en restreignant au besoin X, choisir une trivialisation analytique $X \times L \simeq \tilde{R}^k$ (resp. $X \times M \simeq C^{k,1}$, resp. $X \times N \simeq C^{k,2}$) du fibré vectoriel R^k (resp. $C^{k,1}$, resp. $C^{k,2}$, voir remarque (6.12)) sur X, où L, M, et N sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ; dans la suite, nous identifierons $\tilde{R}^k$ etc... à leurs trivialisations ; on peut alors choisir des adjoints à coefficients analytiques, des opérateurs différentiels $\hat{D} : \underline{\tilde{R}}^k \to \underline{C}^{k,1}$ et $\underline{C}^{k,1} \to \underline{C}^{k,2}$, adjoints qui sont respectivement un (M,L) et un (N,M) opérateur différentiel linéaire sur X d'ordre 1, et seront tous deux notés D^*.

Soit $z = (z_1, \dots, z_\ell)$ un système linéaire de coordonnées dans L ; soit d'autre part α la projection "source" : $\mathcal{J}^k \to X$; comme α est une submersion, et compte-tenu des isomorphismes $X \times L \simeq \tilde{R}^k \simeq V(\mathcal{J}^k)(I_k)$, on peut, pour tout ouvert $U \subset\subset X$, avec $0 \in U$, trouver un ouvert $W \subset L$, avec $0 \in W$ et un isomorphisme analytique de fibrés sur $U, \varphi : U \times W \to$ (un voisinage de I_k dans) $\alpha^{-1}(U)$ possédant les propriétés suivantes :

1) $\varphi(U \times \{0\}) = I_k$;

2) pour tout $x \in U$, l'isomorphisme $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,0) : L \to V(\mathcal{J}^k)(I_k(x))$ coïncide avec l'isomorphisme ci-dessus.

Les sections de $\mathcal{J}^k$ au-dessus de U (et assez voisines de I_k) s'identifient donc aux applications $x \mapsto Z(x)$ de U dans W, ceci dans le cas analytique comme dans le cas $\mathcal{C}^\infty$; en restreignant au besoin W, on peut supposer que les sections qui vérifient, pour tout $x \in U$ et pour $i = 1, \dots, n$: $\frac{\partial Z}{\partial x_i}(x) \in W$ sont étales (puisque toute section de $\mathcal{J}^k$, $\mathcal{C}^1$-voisine de I_k est étale).

Cela posé, revenons à notre problème ; comme l'équation $\hat{\mathfrak{D}} F = u$, $F(0) = I_k(0)$ admet une solution formelle en 0, on peut par une transformation préliminaire se ramener au cas où $j^1 u(0) = 0$ (on pourrait même supposer que u s'annule en 0 à un ordre arbitrairement grand, voire infini, en 0, mais peu importe). En restreignant au besoin X, U, etc..., on peut supposer que u est défini sur X entier et y vérifie $\hat{\mathfrak{D}}_1 u = 0$; enfin, en remplaçant F par F^{-1}, on remplace l'équation $\hat{\mathfrak{D}} F = u$ par $u^F = 0$. Nous allons démontrer d'abord le résultat suivant, en apparence plus faible :

PROPOSITION (7.2). <u>Si</u> U <u>est assez petit, il existe</u> $F \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{J}}^k)$, <u>avec</u> $j^1 F(0) = j^1 I_k(0)$, <u>tel qu'on ait</u> $D^*(u^F) = 0$

Dans notre système de coordonnées, l'application $F \mapsto u^F$ s'écrit

$$Z \mapsto \{x \mapsto \Phi(x, Z(x), \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x))\} ,$$

où Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \times W^{n+1}$, à valeurs dans M ; la condition $j^1 F(0) = j^1 I_k(0)$ s'écrit $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$. Posons

$$(7.3)\qquad D^*\Phi(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_i}) = \sum_{i\leq j} A_{ij}(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_k})\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_k}) .$$

LEMME (7.4). <u>L'opérateur différentiel</u> (linéaire, de L dans L)

$$Z \mapsto \sum_{i\leq j} A_{ij}(0,0,0)\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}$$

<u>est elliptique</u>.

Considérons l'opérateur linéarisé de $F \mapsto D^*(u^F)$ le long de I_k, i.e. prenons une famille à un paramètre F_t avec $F_0 = I_k$, $\frac{d}{dt}F_t|_{t=0} = \xi \in \Gamma(U,\tilde{R}^k)$ et considérons l'application $\xi \mapsto \frac{d}{dt} D^*(u^{F_t})|_{t=0}$; on trouve immédiatement que cette application vaut $\xi \mapsto D^*\hat{D}\xi + D^*\mathcal{L}(\xi)u$; comme $j^1u(0) = 0$, son symbole en $x = 0$ coïncide avec celui de $D^*\hat{D}$, qui est elliptique puisque $\hat{D}$ est elliptique (cf. Quillen [1] ou Goldschmidt [1]). D'autre part, en calculant cet opérateur linéarisé en coordonnées, à partir de (7.3), on trouve que son symbole en $x = 0$ coïncide avec celui de (7.4). D'où le lemme.

La démonstration de la proposition (7.2) est alors une application usuelle de la théorie des équations elliptiques ; il suffit même de recopier, avec des modifications mineures, un raisonnement de Agmon-Douglis-Nirenberg ([1], Théorème 12.6) Pour la commodité du lecteur, nous allons détailler un peu.

Soit $s\in]0,1[$, fixé une fois pour toutes. Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne, notée $|.|$) ; pour $k\in\mathbb{N}$, désignons par $\mathcal{C}^{s+k}(B)$ l'ensemble des fonctions sur B, à valeurs réelles, continues ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq k$, les dérivées d'ordre k vérifiant une condition de Hölder d'ordre s ; muni de la norme

$$\|f\|_{s+k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in B} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y\in B\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^s} ,$$

cet espace est complet. On trouve de même l'espace $\mathcal{C}^{s+k}(B)\otimes L$, qu'on notera $\mathcal{C}^{s+k}(B,L)$; dans la suite, nous supposerons B centrée en 0, et nous désignerons par $\mathcal{C}_0^{s+k}(B,L)$ le sous-espace du précédent formé des Z vérifiant $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$.

LEMME (7.5). <u>L'opérateur différentiel</u> (7.4) <u>est surjectif direct</u> (i.e. admet un inverse à droite linéaire continu) <u>de</u> $\mathcal{C}_0^{s+2}(B,L)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}^s(B,L)$.

Soit φ une fonction $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, à support compact dans $2\mathring{B}$, avec $\varphi = 1$ au voisinage de B. Etant donné $f\in \mathcal{C}^s(B,L)$, soit $\bar{f}$ le prolongement de f défini, pour $x\notin B$, par $\bar{f}(x) = \varphi(x)f(x\frac{r^2}{|x|^2})$, r = rayon de B ; il est facile de vérifier que l'application $f \to \bar{f}$ est continue de $\mathcal{C}^s(B,L)$ dans $\mathcal{C}^s(2B,L)$; de plus, $\bar{f}$ est évidemment à support compact dans $2\mathring{B}$.

Soit alors E une solution élémentaire à droite de (7.4), i.e. une distribution sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(L,L)$, vérifiant

$$\Sigma A_{ij}(0,0,0)\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \delta.\mathrm{id} ,$$

δ la masse +1 en 0, et soit Z la restriction de $E * \bar{f}$ à B. Si l'on choisit convenablement E, il est connu qu'on a, avec $K > 0$ convenable : $Z \in \mathscr{C}^{2+s}(B,L)$ et $\|Z\|_{2+s} \leq K\|\bar{f}\|_s$ (voir Douglis-Nirenberg [1], démonstration du théorème 2 ; en fait, a posteriori, le choix de E est inutile, puisque deux telles solutions élémentaires diffèrent par une fonction $\mathscr{C}^\infty$, et même analytique, mais peu importe ici) ; comme on a

$$\Sigma A_{ij}(0,0,0) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (E * \bar{f}) = \bar{f} ,$$

Z est un relèvement linéaire continu de (7.4) de $\mathscr{C}^{s+2}(B,L)$ dans $\mathscr{C}^s(B,L)$; pour ramener Z dans $\mathscr{C}^{s+2}_0(B,L)$, il suffit alors de le remplacer par $Z - Z(0) - \Sigma \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0)\, x_i$, puisque les polynomes de degré 1 sont annulés par (7.4) ; d'où le lemme.

Fixons B une fois pour toutes, avec $B \subset U$; et soit $\mathscr{B}$ une boule de $\mathscr{C}^{s+2}(B,L)$, centrée en 0, et telle qu'on ait, pour $Z \in \mathscr{B}$, $x \in B$: $Z(x) \in W_1$, $\frac{\partial Z}{\partial x_i} \in W_1$, avec $W_1 \subset\subset W$. Considérons l'application

$$\psi : [0,1] \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}^s(B,L)$$

définie par

$$\psi(t,Z)(x) = \Sigma A_{ij}(tx, t^2 Z, t\frac{\partial Z}{\partial x_k})\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B(tx, t^2 Z, t\frac{\partial Z}{\partial x_k}) .$$

Cette application possède les propriétés suivantes :

1) Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) : ceci est un exercice de calcul différentiel banachique qui peut être laissé au lecteur.

2) On a $\psi(0,0) = 0$. En effet, on a par définition de Φ : $\Phi(x,0,0) = u(x)$, donc, puisque $j^1 u(0) = 0$, $\Phi(0,0,0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0,0,0) = 0$. D'autre part, si l'on pose $D^* = \Sigma a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$ (les a_i étant des fonctions analytiques à valeurs dans $\mathrm{Hom}(M,L)$), on a :

$$B(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) = \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) + \sum_i a_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k})\frac{\partial Z}{\partial x_i} + a_0 \Phi(x,Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k})$$

d'où

$$B(0,0,0) = \Sigma a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0,0,0) + a_0 \Phi(0,0,0) = 0.$$

3) La dérivée partielle $\frac{\partial \psi}{\partial Z}(0,0)$ est surjective directe, d'après (7.5).

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe, pour t voisin de 0, un $Z_t \in \mathcal{U}$ vérifiant $\Psi(t,Z_t) = 0$. Alors la fonction Z définie au voisinage de 0 par $Z(x) = t^2 Z_t(\frac{x}{t})$ satisfait (7.3) ; de plus, elle vérifie bien $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$.

Reste à voir que Z est de classe $\mathcal{E}^\infty$ au voisinage de 0 ; cela se voit par un raisonnement classique sur les équations quasi-linéaires que nous allons répéter ; posons $a_{ij}(x) = A_{ij}(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x})$, $b(x) = B(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x})$; alors Z vérifie l'équation linéaire

$$\Sigma\, a_{ij}(x) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + b(x) = 0$$

comme Z est de classe $\mathcal{E}^{s+2}$ dans un voisinage U_1 de a, les a_{ij} et b y sont de classe $\mathcal{E}^{s+1}$; en particulier notre équation, étant elliptique en 0, est elliptique dans un voisinage U_2 de 0 ; on peut supposer $U_1 = U_2$; appliquant Douglis-Nirenberg [1], théorème 4, on trouve que Z est de classe $\mathcal{E}^{s+3}$ dans U_1, donc a_i et b de classe $\mathcal{E}^{s+2}$; appliquant à nouveau le même théorème, on trouve que Z est de classe $\mathcal{E}^{s+4}$ dans U_1, donc a_i et b de classe $\mathcal{E}^{s+3}$, et ainsi de suite. Ceci achève la démonstration de la proposition (7.2).

Pour démontrer le théorème (7.1), posons maintenant $v = u^F$; on a $v(0) = 0$ puisque $u(0) = 0$, $j^1F(0) = j^1 I_k(0)$; d'autre part, on a $D^*v = 0$ d'après (7.2) et $\hat{\mathfrak{D}}_1 v = \hat{D}v - \frac{1}{2}[v,v] = 0$ d'après (6.16) ; par suite, on a

$$\hat{D}D^*v + D^*\hat{D}v - \tfrac{1}{2}D^*[v,v] = 0 \,. \tag{7.6}$$

Cette dernière équation est visiblement à coefficients analytiques en x, v, v'_i, v''_{ij} [elle est même polynominale du second degré par rapport à (v,v'_i,v''_{ij})]. Montrons que, au voisinage de 0, v est une solution elliptique de cette équation, i.e. que l'opérateur linéarisé de (7.6) le long de v est elliptique ; ce dernier s'écrit en effet :

$$w \mapsto \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w - D^*[w,v].$$

Il suffit de vérifier l'ellipticité en 0 ; or, du fait qu'on a $v(0) = 0$, on voit facilement que cet opérateur a même symbole en 0 que $w \mapsto \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w$; on sait par ailleurs (Quillen [1] ou Goldschmidt [1]) que ce dernier est elliptique ; d'où le résultat. Il est alors connu que v est analytique au voisinage de 0 (voir par exemple Friedman [1]) ; d'après (6.19) et (6.21), il existe G, germe de section analytique $\underline{\tilde{\mathcal{F}}}^k_{a,o}$, vérifiant $v^G = u^{FG} = 0$, d'où $\hat{\mathfrak{D}}(G^{-1}F^{-1}) = u$, ce qui démontre le théorème.

Remarque (7.7). Si l'on cherche à démontrer le même résultat avec un minimum d'hypothèse de régularité sur u, la démonstration précédente doit être un peu modifiée, du fait que l'application $F \to F^{-1}(u)$ ne possèdera pas de bonnes propriétés de différentiabilité dans les espaces $\mathscr{C}^{s+k}$; on obtiendra une meilleure équation en travaillant avec $H = F^{-1}$ au lieu de F et en étudiant l'équation $H^{-1}(D^*(u^F)) = H^{-1}(D^*)(u-\hat{D}H) = 0$ au lieu de $D^*(u^F) = 0$; nous n'entrerons pas dans les détails (voir Malgrange [2], pour le cas des structures presque complexes).

Signalons pour terminer deux conséquences du théorème (7.1) que nous ne développerons pas ici :

1) La théorie des déformations des $\mathcal{P}^k$-structures intégrables, lorsque R^k est une équation de Lie 2-acyclique, analytique et elliptique sur une variété compacte, notamment la construction de "l'espace de Kuranishi" des $\mathcal{P}^k$-structures intégrables voisines d'une $\mathcal{P}^k$-structure donnée. Nous renvoyons pour cela à Quê [1], où la question est traitée dans le cas transitif (le cas général est analogue).

2) L'existence de coordonnées analytiques pour une équation de Lie de classe $\mathscr{C}^\infty$ elliptique et formellement transitive, i.e. $R^k \to T$ surjectif (d'où résulte que, dans le cas formellement transitif, le théorème (7.1) est vrai sans faire _a priori_ d'hypothèse d'analyticité). Ce résultat s'obtient en combinant (7.1) et le "troisième théorème fondamental" de E. Cartan ; nous donnerons les détails ultérieurement.

APPENDICE 1

Sur la notion d'espace différentiable

Si l'on cherche à définir les espaces différentiables en copiant la définition des espaces analytiques (Grothendieck [1]), i.e. en les considérant comme des espaces annelés, on tombe sur des difficultés analogues à celles qui se présentent dans le cas des espaces analytiques banachiques. Pour s'en sortir, le plus simple est de copier purement et simplement la définition de ces derniers (Douady [1]), en y remplaçant partout "espace de Banach" par "espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ " (ou, si l'on préfère par "espace $\mathbb{R}^n$ ") et "application analytique" par application différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ ". Moyennant quoi on pourra reprendre mot à mot l'exposé de Douady, § 3, n° 1, 2, 3 ; nous laisserons au lecteur la joie de se livrer à ce travail, et d'obtenir ainsi une catégorie que nous appellerons "catégorie des espaces différentiables". C'est, en gros, la plus petite catégorie contenant les variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans laquelle les produits et les noyaux de double flèche (et donc les produits fibrés) soient toujours définis. A noter qu'ici, deux simplifications se produisent par rapport au cas analytique banachique, la seconde étant de loin la plus importante :

1) Toutes les applications linéaires étant ici directes, le canular des sous-variétés non directes qui ne sont pas des sous-espaces ne se produit pas.

2) Un morphisme d'espaces différentiables est visiblement déterminé par le morphisme des espaces annelés sous-jacents qu'il définit, et la catégorie des espaces différentiables est donc une sous-catégorie de celle des espaces annelés ; mais le canular est ici le suivant : on ignore (et c'est d'ailleurs probablement faux) si cette sous-catégorie est "pleine", i.e. si tout morphisme d'espaces différentiables en tant qu'espaces annelés en est un morphisme en tant qu'espaces différentiables ; en particulier, on ignore si tout isomorphisme en tant qu'espaces annelés est un isomorphisme en tant qu'espaces différentiables (par contre, il est évident qu'un morphisme d'espaces différentiables est un isomorphisme si le morphisme sous-jacent d'espaces annelés en est un).

Si X est un sous-espace différentiable d'un espace différentiable Y, on vérifie facilement que, au voisinage de chacun de ses points, X peut être défini comme le noyau d'une double flèche

$$Y \underset{0}{\overset{F}{\rightrightarrows}} E ,$$

E un espace vectoriel de dimension finie ; prenant des coordonnées dans E, et posant $F = (f_1, \dots, f_n)$, on voit alors que X est en fait déterminé par l'Idéal de type fini $\mathfrak{I}$ engendré par $f_1,\dots,f_n$ dans $\mathcal{O}_Y$ ($\mathcal{O}_Y$ étant le faisceau structural de Y, i.e. le faisceau des germes de morphismes $Y \to \mathbb{R}$); on appelle alors "voisinage infinitésimal d'ordre p de X dans Y le sous-espace défini par $\mathfrak{I}^{p+1}$. En particulier, si Δ est la diagonale de X^2, i.e. le noyau de

$$X^2 \underset{\Pi_2}{\overset{\Pi_1}{\rightrightarrows}} X$$

(Π_1 et Π_2, les deux projections canoniques), on a ainsi défini $\Delta^{(p)}$, ce qui permet, en recopiant Grothendieck [1] de définir les notions essentielles du calcul différentiel ; en particulier on définira Ω_X, faisceau des formes différentielles sur X comme le sous-$\mathcal{O}_X$-Module de $\Pi_{1*}(\mathcal{O}_{\Delta(1)})$ formé des éléments dont la projection à l'ordre 0 est nulle, et le faisceau Θ_X des champs de vecteurs sur X comme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X,\mathcal{O}_X)$. Il est facile de donner une description de Ω_X et Θ_X lorsque X est un modèle local, i.e. le sous-espace fermé d'un ouvert Y de $\mathbb{R}^n$ défini par l'Idéal $\mathfrak{I}$ engendré par $f_1,\dots,f_p$: Ω_X (ou plus exactement son prolongement à Y par 0) est le quotient

$$\Omega_Y/\mathfrak{I}\,\Omega_Y + \mathcal{O}_Y df_1 + \dots + \mathcal{O}_Y df_p \;;$$

Θ_X est donc le quotient

$$\bar{\Theta}_X/\mathfrak{I}\,\bar{\Theta}_X \,,$$

$\bar{\Theta}_X$ le sous-faisceau de Θ_Y formé des ξ vérifiant pour tout i : $< \xi, df_i > \in \mathfrak{I}$, ou encore $\mathcal{L}(\xi)\,\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}$.

Pour $\xi \in \Gamma(Y,\bar{\Theta}_X)$, on déduit de l'inclusion précédente que le germe de groupe à un paramètre $\exp(t\xi)$ laisse stable $\mathfrak{I}$; démontrons ce résultat (quoique ce soit surtout une curiosité) : posant en effet

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_p \end{pmatrix} ,$$

on aura $\mathcal{L}(\xi)F = CF$, C une matrice $p \times p$ à coefficients $\mathcal{E}^\infty$; soit M la matrice $p \times p$ définie au voisinage de $Y \times \{0\}$ dans $Y \times \mathbb{R}$ par l'équation

$$\frac{\partial M}{\partial t} = [\exp(t\xi)C]M \,,$$

avec $M(x,0) =$ identité ; la fonction $G = \exp(t\xi)F - MF$ vérifie

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \exp(t\xi)F - \frac{\partial M}{\partial t}F = [\exp(t\xi)C]G \,, \quad \text{avec } G(x,0) = 0 \,, \quad \text{d'où } G = 0 \,.$$

Il résulte de là que $\exp(t\xi)$ détermine un germe de groupe à un paramètre d'automorphismes de X. Ce dernier ne dépend que de la classe de ξ dans $\Gamma(X,\Theta_X)$; soit en effet $\xi'\in\Gamma(Y,\bar{\Theta}_X)$, les coefficients de $\xi'-\xi$ appartenant à $\mathfrak{I}$, et soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur Y ; posons $[\mathcal{L}(\xi') - \mathcal{L}(\xi)] \exp(t\xi')g = NF$, avec $N = (n_1,\ldots,n_p)$, les n_i étant $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $Y \times \{0\}$, et soit $M = (m_1,\ldots,m_p)$ la solution de

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \mathcal{L}(\xi)M + MC + N \text{ , avec } M(x,0) = 0 \text{ .}$$

Posons enfin $h = \exp(t\xi')g - \exp(t\xi)g - MF$; on a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathcal{L}(\xi') \exp(t\xi')g - \mathcal{L}(\xi) \exp(t\xi)g - \frac{\partial M}{\partial t}F = NF + \mathcal{L}(\xi)[\exp(t\xi')g - \exp(t\xi)g] - \frac{\partial M}{\partial t}F$$

$$= NF + \mathcal{L}(\xi)h + \mathcal{L}(\xi)(MF) - \frac{\partial M}{\partial t}F = \mathcal{L}(\xi)h$$

et $h(x,0) = 0$, d'où $h = 0$.

Ainsi, pour $\xi \in \Gamma(X,\Theta_X)$, le germe $\exp(t\xi)$ est bien défini. D'autre part, si X est une variété usuelle, il est immédiat de vérifier que $\underline{\tilde{J}^k(T)}$ est le sous-faisceau de $\Theta_{\Delta(k)}$ formé des champs Π_1-projetables, ce qui "justifie" la terminologie que nous avons employée.

On peut se demander quel est l'intérêt des notions précédentes, tout au moins pour les personnes qui ne confondent pas sorites et mathématiques. Il nous semble cependant que, dans la théorie des applications différentiables, certaines classes particulières de tels espaces peuvent être utiles à considérer (ce qu'on fait, bien entendu, souvent sans le dire), par exemple ceux qui proviennent localement d'espaces analytiques par "oubli de la structure analytique", ou ceux qui "ressemblent suffisamment" aux précédents, i.e. ceux dont les modèles locaux sont définis par des idéaux de type fini suffisamment "bons" (en l'état actuel des choses, le sens qu'on donne au mot "bon" ne peut guère que dépendre du problème auquel on s'intéresse, bien entendu).

En géométrie différentielle, l'utilité des espaces différentiables est encore plus douteuse, vu qu'on ne connaît à l'heure actuelle pratiquement rien sur les équations différentielles avec points singuliers en dimension > 1, et ce même dans le cas analytique et linéaire. Le seul cas qui semble utile à considérer est celui des "variétés épaisses", i.e. des espaces différentiables qui sont localement du type $Y \times Z$, Y une variété usuelle (le "réduit" de X) et Z provenant d'un espace analytique de dimension 0, i.e. un point muni d'une $\mathbb{R}$-algèbre locale finie en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Leur intérêt tient au fait que, si X est une sous-variété d'une variété X', les voisinages infinitésimaux de X dans X' sont des variétés épaisses ; en particulier les espaces $\Delta^{(k)}$, (et aussi les

$\Delta^{(k\ell)}$ etc...) sont de ce type lorsque X est une variété usuelle, voire épaisse ; d'autre part, les variétés épaisses forment une sous-catégorie pleine de celle des espaces annelés, c'est-à-dire que les canulars dont nous avons parlé plus haut ne s'y produisent pas. Enfin, le groupoïde des germes d'automorphismes d'une variété épaisse X est transitif (i.e. est transitif sur l'espace topologique sous-jacent). Toutefois, cette généralisation est essentiellement illusoire, vu que le groupoïde en question est isomorphe au groupoïde des automorphismes d'une structure fibrée convenable sur le réduit de X. Leur mérite essentiel, voire unique, semble donc être de donner un langage commode pour le calcul différentiel - leur principal inconvénient, de donner prétexte à des sorites, que nous arrêterons là.

APPENDICE 2

Sur le théorème de Cartan-Kähler

1. Introduction.

Le but de cet appendice est de donner une démonstration rapide du théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle dans le cas analytique, une fois obtenus les résultats formels nécessaires, que nous ne reprendrons pas ici. Nous nous appuierons pour cela sur une majoration de Grauert [1], plutôt que sur les majorations pour la "δ-cohomologie", à la Spencer (Sweeney [1], Ehrenpreis-Guillemin-Sternberg [1]) ; d'ailleurs ces dernières avec un choix convenable de normes, sont essentiellement un cas particulier du théorème de Grauert.

2. Polydisques distingués.

Soit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ un système de n nombres > 0, et soit P_ρ le polydisque de $\mathbb{C}^n$ défini par les équations $|z_i| < \rho_i$. Soit $H^1(P_\rho)$ l'espace des fonctions holomorphes sur P_ρ, $F = \Sigma f_\alpha \rho^\alpha$ pour lesquelles on a

$$\|F\|_\rho = \Sigma\, |f_\alpha| \rho^\alpha < +\infty ;$$

si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, on le munira d'une norme $|\cdot|_E$, et pour $F = \Sigma f_\alpha z^\alpha \in E \otimes H^1(P_\rho)$, on posera encore

$$\|F\|_\rho = \Sigma\, |f_\alpha|_E\, \rho^\alpha .$$

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, de dimension finie, et soit $U = \Sigma u_\alpha z^\alpha$, $u_\alpha \in L(E,E_1)$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans $L(E,E_1)$; pour ρ suffisamment petit l'application $U_\rho : F \mapsto UF$ envoie continuement $E \otimes H^1(P_\rho)$ dans $E_1 \otimes H^1(P_\rho)$. Nous dirons par définition que " ρ <u>est</u> U-<u>privilégié</u> " si l'image de cette application est fermée, et formée de tous les $G \in E_1 \otimes H^1(P_\rho)$ qui, au voisinage de l'origine sont de la forme UF_1, F_1 holomorphe à l'origine (comme il est bien connu, il revient au même de dire qu'il existe une série formelle en 0, soit F_2, telle qu'on ait l'égalité entre séries formelles $G = UF_2$).

THÉORÈME 1.1 (Grauert). <u>Les</u> P_ρ <u>tels que</u> ρ <u>soit</u> U-<u>privilégié forment un système fondamental de voisinages de</u> 0.

Pour la démonstration, nous renvoyons à Grauert [1] ([1]). Notons aussi qu'un résultat analogue a été démontré par Douady [1] pour l'espace $B(P_\rho)$ des fonctions

---

(1) En fait, Grauert travaille avec la norme L^∞ et non L^1, mais la démonstration est identique.

continues sur $\overline{P}_\rho$ et holomorphe sur P_ρ, muni de la norme

$$\sup_{z \in P_\rho} |F(z)| ,$$

et que la démonstration de Douady pourrait aussi bien être adaptée à l'espace $H^1(P_\rho)$.

Si ρ est U privilégié, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $G \in \mathrm{Im}(U_\rho)$, on puisse trouver $F \in E \otimes H^1(P_\rho)$ vérifiant $UF = G$, $\|F\|_\rho \leq C\|G\|_\rho$; cela résulte du théorème "des homomorphismes" de Banach (et en fait, peut se démontrer directement en même temps que le théorème précédent).

Nous n'aurons besoin de ce résultat que dans le cas où U est un polynome homogène de degré k, auquel cas il est clair que, si G est homogène de degré $k+\ell$, et si $UF = G$, $\|F\|_\rho \leq C\|G\|_\rho$, on a encore $UF_\ell = G$, $\|F_\ell\| \leq C\|G\|$, en désignant par F_ℓ la composante homogène de degré ℓ de F (pour un degré ℓ fixé, une telle majoration est évidente ; l'essentiel est qu'ici, C <u>est indépendant de</u> ℓ).

Nous allons transposer ces résultats ; soit Σ_ℓ l'espace des polynomes homogènes de degré ℓ à n variables sur $\mathbb{C}$; son dual peut être identifié à Σ_ℓ au moyen du produit scalaire

$$< F,F'> = \sum_{|\beta|=\ell} f_\beta f'_\beta \;;$$

si l'on munit Σ_ℓ de la norme $\|\cdot\|_\rho$, la norme duale est alors :

$$\|F'\|'_r = \sup_\beta |f_\beta| r^\beta$$

avec $r_i = \frac{1}{\rho_i}$ (ce que nous écrirons brièvement : $r = \frac{1}{\rho}$). On définit de même la norme $\|\cdot\|'_r$ sur $E^* \otimes \Sigma_\ell$ (E^*, dual de E, muni de la norme duale). La transposée de $U(\ell)$, restriction de $F \mapsto UF$ à $E \otimes \Sigma_\ell$ est l'application

$$U(\ell)^* : E_1^* \otimes \Sigma_{k+\ell} \to E^* \otimes \Sigma_\ell$$

ainsi définie :

si $F = \sum_{|\alpha|=k+\ell} f_\alpha z^\alpha$, $\quad U(\ell)^*F = \sum_{|\beta|=\ell} g_\beta z^\beta$, avec $g_\beta = \sum_{|\alpha|=k} u^*_\alpha f_{\alpha+\beta}$

(u^*_α, le transposé de u_α).

En transposant les résultats précédents, on obtient donc le

COROLLAIRE 1.2. <u>Etant donné</u> $U \in L(E,E_1) \otimes \Sigma_k$, <u>il existe</u> $r = (r_1,\dots,r_n)$, $r_i > 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>possédant la propriété suivante</u> :

<u>Pour tout</u> $\ell \in \mathbb{N}$ <u>et tout</u> $G \in \operatorname{Im} U(\ell)^*$, <u>on peut trouver</u> $F \in E_1^* \otimes \Sigma_{k+\ell}$ <u>tel qu'on ait</u> $U(\ell)^* F = G$, $\|F\|_r' \leq C\|G\|_r'$.

Nous dirons alors que r est U-<u>distingué</u> ; dans ce cas, pour $\lambda > 0$, λ_r est évidemment encore U-distingué, avec C remplacé par $C\lambda^k$.

3. <u>La norme "de Laplace" formelle.</u>

Pour des raisons de commodité, nous permuterons dans la suite les rôles de E et E^* ; pour

$$F = \sum_{|\alpha|=\ell} f_\alpha z^\alpha \in E \otimes \Sigma_\ell ,$$

nous poserons

$$\mathcal{L}F = \sum \frac{\alpha!}{|\alpha|!} f_\alpha z^\alpha$$ ($\mathcal{L}$ est plus ou moins une transformation de Laplace-Borel),

et

$$|F|_r = \|\mathcal{L}F\|_r' .$$

Si F est une série formelle à n variables sur $\mathbb{C}$ (à coefficients dans E), nous noterons F_ℓ sa composante homogène de degré ℓ , et nous poserons

$$F^\ell = F_0 + \ldots + F_\ell$$

$$|F|_r = \sum_{\ell \geq 0} |F_\ell|_r .$$

Pour $X = (X_1, \ldots, X_n)$, on a

$$(X_1 + \ldots + X_n)^\ell = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} X^\beta ,$$

d'où en faisant $X_i = 1$:

$$\frac{\ell!}{\alpha!} \leq n^\ell ;$$

on en déduit que, si l'on a $|F|_r < +\infty$, F est convergent au voisinage de l'origine ; inversement, de l'inégalité évidente $\alpha! \leq |\alpha|!$, on déduit que, si F est convergente au voisinage de P_r , on a $|F|_r < +\infty$.

Si $F_0 = 0$, on a immédiatement

$$(3.1) \qquad |F|_r \leq \sum r_i \left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right|_r .$$

Si F est homogène de degré ℓ , on a

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right|_r \leq \frac{\ell}{r_i} |F|_r ,$$

d'où par récurrence

$$|D^\alpha F|_r \leqq \frac{\ell!}{(\ell-|\alpha|)!}\,\frac{1}{r^\alpha}\,|F|_r \quad . \tag{3.2}$$

PROPOSITION 3.3. <u>Si</u> F <u>et</u> G <u>sont à valeurs scalaires, on a</u> $|FG|_r \leqq |F|_r|G|_r$.

Pour $X = (X_1,\ldots,X_n)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$, on a la formule du binôme

$$(X+Y)^\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} X^\alpha Y^\beta \ .$$

Prenons les X_i égaux à x , et les Y_i à 1 ; on a alors $(X+Y)^\gamma = (x+1)^{|\gamma|}$; en calculant de deux manières le coefficient de x^ℓ ($\ell \leqq |\gamma|$) dans cette dernière expression, il vient

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ |\alpha|=\ell}} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} = \frac{|\gamma|!}{\ell!(|\gamma|-\ell)!} \quad . \tag{3.4}$$

Démontrons maintenant (3.3) ; il suffit de traiter le cas où F et G sont homogènes, disons de degrés ℓ et m .

On a alors

$$FG = \sum_{|\gamma|=\ell+m} \Big(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} f_\alpha g_\beta\Big) z^\gamma \ .$$

D'où, d'après (3.4) :

$$\frac{\gamma!}{|\gamma|!}\Big|\sum_{\alpha+\beta} f_\alpha g_\beta\Big| r^\gamma \leqq |F|_r|G|_r \frac{\gamma!}{|\gamma|!} \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ |\alpha|=\ell}} \frac{\ell!}{\alpha!}\frac{m!}{\beta!} = |F|_r|G|_r$$

ce qui démontre la proposition.

La norme introduite ici étant "homogène", les inégalités précédentes peuvent être interprêtées en termes de séries majorantes : si l'on a $F = \sum f_\alpha z^\alpha$, $f_\alpha \in E$, $g = \sum g_\alpha z^\alpha$, $g_\alpha \geqq 0$, nous écrirons $F \ll G$; si l'on a, pour tout α : $|f_\alpha|_E \leqq g_\alpha$; nous dirons alors que G est une majorante de F .

Soit alors X une indéterminée ; posons $|F|_{X_r} = \sum |F_\ell|_r X^\ell$; les inégalités (3.1), (3.2) et (3.3) seront encore vraies avec r remplacé par X_r , et le signe $\leqq$ par $\ll$. Soient d'autre part

$$\Phi \in \mathbb{C}[[Y_1,\ldots,Y_p]] \ , \quad \text{et} \quad F^{(1)},\ldots,F^{(p)} \in \mathbb{C}[[z_1,\ldots,z_n]] \ ,$$

les $F^{(i)}$ étant sans terme constant , il résulte de (3.3), interprété en termes de séries majorantes que, si $\bar{\Phi}$ est une majorante de Φ, on a

(3.5) $$|\Phi(F^{(1)},\dots,F^{(p)})|_{X_r} \ll \bar{\Phi}(|F^{(1)}|_{X_r},\dots,|F^{(p)}|_{X_r}) \ ;$$

si $F^{(1)},\dots,F^{(p)}$ sont à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie, disons $F^{(i)}$ à valeurs dans $E^{(i)}$, et si Φ est une série formelle sur $E^{(1)} \times\dots\times E^{(p)}$, en choisissant convenablement les normes dans les $E^{(i)}$ (ce qui ne change essentiellement rien), on voit qu'on pourra encore trouver une série $\bar{\Phi} \in \mathbb{C}[[Y_1,\dots,Y_p]]$; à coefficients $\geqq 0$, qui vérifie (3.5) quels que soient les $F^{(i)}$; si Φ est convergente, on pourra supposer $\bar{\Phi}$ convergente (nous laissons les détails au lecteur).

4. Equations différentielles.

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$; considérons une fonction Φ holomorphe au voisinage de

$$(z_o,y_\alpha^o) \in \mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha|\leqq k} E$$

à valeurs dans E_1 , avec $\Phi(z_o,y_\alpha^o) = 0$ et considérons l'équation différentielle :

(E) $$\Phi(z,D^\alpha F(z)) = 0 \ .$$

Soit

$$F = \sum_{|\alpha|\leqq k+\ell} f_\alpha (z-z_o)^\alpha$$

un polynome de degré $\leqq k+\ell$, à valeurs dans E , avec $(\alpha ! f_\alpha =) D^\alpha F(z_o) = y_\alpha^o$, pour $|\alpha| \leqq k$; nous dirons que F est un jet d'ordre $k+\ell$ de solution de E , prolongeant le jet

$$F^k = \sum_{|\alpha|\leqq k} f_\alpha (z-z_o)^\alpha$$

si le développement de $\Phi(z,D^\alpha F(z))$ en z_o ne contient pas de termes de degré $\leqq \ell$, ce que nous écrirons $\Phi(z,D^\alpha F(z)) \equiv 0 \bmod (z-z_o)^\alpha$. Pour $\ell' > \ell$, et F' jet de solution d'ordre $k+\ell'$, nous dirons de même que F' prolonge F si les coefficients d'ordre $\leqq k+\ell$ de F' sont ceux de F.

DÉFINITION (4.1). <u>Nous dirons que</u> F^k <u>est fortement prolongeable si,</u> $\forall\ \ell > 0$, <u>tout jet de solution d'ordre</u> $k+\ell$ <u>qui prolonge</u> F^k <u>est lui-même prolongeable à l'ordre</u> $k+\ell+1$.

La partie analytique du théorème de Cartan-Kähler (compte non tenu des questions de données de Cauchy) est contenue dans le théorème suivant :

THÉORÈME (4.2). Si $F^{(k)}$ est fortement prolongeable, il existe une série $F = \Sigma f_\alpha (z-z_o)^\alpha$, convergente au voisinage de 0, avec $D^\alpha F(z_o) = y_\alpha^o$, $|\alpha| \leq k$, qui soit solution de l'équation (E).

On peut toujours se ramener au cas où $z_o = 0$, $y_\alpha^o = 0$, ce que nous supposerons. Posons, pour $\alpha = k$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_\alpha}(0) = u_\alpha \in L(E,E_1), \quad \text{et} \quad \Psi(z,y_\alpha) = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha y_\alpha - \Phi .$$

Supposons trouvé un jet $F^{k+\ell-1}$ d'ordre $k+\ell-1$ de solution de E, et cherchons à le prolonger à l'ordre $k+\ell$; dans l'équation que nous devons résoudre les termes $D^\alpha F_{k+\ell}$ n'interviennent que linéairement, et, en posant

$$F_{k+\ell} = \sum_{|\alpha|=k+\ell} f_\alpha z^\alpha ,$$

notre équation s'écrit :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=\ell}} u_\alpha f_{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta)!}{\beta!} z^\beta = \Psi(z,D^\alpha F^{k+\ell-1})_\ell .$$

Par hypothèse, un tel $F_{k+\ell}$ existe. Posons $U = \Sigma u_\alpha^* z^\alpha$, et choisissons une fois pour toutes un $r = (r_1,\ldots,r_n)$ qui soit U-distingué. Il résulte alors de (1.2) que, si l'on pose

$$\Psi(z,D^\alpha F^{k+\ell-1})_\ell = \sum_{|\beta|=\ell} g_\beta z^\beta ,$$

on pourra trouver $F_{k+\ell}$ vérifiant

$$\sup_{|\alpha|=k+\ell} \alpha! |f_\alpha| r^\alpha \leq C \sup_{|\beta|=\ell} \beta! \, |g_\beta| r^\beta$$

ce qui s'écrit encore

$$|F_{k+\ell}|_r \leq C \frac{\ell!}{(k+\ell)!} |\Psi(z,D^\alpha F^{k+\ell-1})_\ell|_r$$

d'où, d'après (3.2)

$$|D^\alpha F_{k+\ell}|_r \leq C_1 |\Psi(z,D^\beta F^{k+\ell-1})_\ell|_r \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq k , \quad C_1 = \sup_{|\alpha|\leq k} \frac{C}{r^\alpha} .$$

Soit $\bar{\Psi}$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans

$$\mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha|\leq k} \mathbb{C} ,$$

à coefficients positifs, telle que (3.5) soit satisfaite avec Φ remplacée par $\bar{\Psi}$; on peut supposer qu'on a $\Psi(0) = 0$ et $\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial y_\alpha}(0) = 0$ pour $|\alpha| = k$; on aura donc, avec les notations du § 3, pour $|\alpha| \leq k$

$$|D^{\alpha}F_{k+\ell}|_{X_r} \ll C_1\ X^{k-|\alpha|}\ \bar{\Psi}(X_r, |D^{\beta}F^{k+\ell-1}|_{X_r})_{\ell}\ .$$

Ecrivons ces inégalités en y remplaçant successivement ℓ par $1,2,\ldots,\ell$, et remarquons qu'on a évidemment, si $\ell' < \ell$:

$$|D^{\beta}F^{k+\ell'-1}|_{X_r} \ll |D^{\beta}F^{k+\ell-1}|_{X_r}\ ,$$

d'où

$$\bar{\Psi}(X_r, |D^{\beta}F^{k+\ell'-1}|X_r)_{\ell} \ll \bar{\Psi}(X_r, |D^{\beta}F^{k+\ell-1}|_{X_r})_{\ell}\ ;$$

en ajoutant, il vient, pour $|\alpha| \leqq k$

$$|D^{\alpha}F^{k+\ell}|_{X_r} \ll C_1\ X^{k-|\alpha|}\ \bar{\Psi}(X_r, |D^{\beta}F^{k+\ell-1}|_{X_r})\ .$$

Posons

$$A^{k+\ell}(X) = \sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha}F^{k+\ell}|_{X_r}\ ;$$

de (3.1) on déduit qu'on a, pour $K > 0$ convenable, indépendant de F :

$$|D^{\beta}F^{k+\ell-1}|_{X_r} \ll K\ X^{k-|\beta|}A^{k+\ell-1}(X)\ , \qquad |\beta| \leqq k$$

d'où finalement, avec $C_2 = C_1 \sum_{|\alpha|=k} 1$

$$A^{k+\ell}(X) \ll C_2\ \bar{\Psi}(X_r, KX^{k-|\alpha|}A^{k+\ell-1}(X))\ .$$

Il existe $m > 0$ et $C_3 > 0$ tels qu'on ait, pour $|z| = \sup|z_i| \leqq m$, $|y_{\alpha}| \leqq m$ $(y_{\alpha} \in \mathbb{C})$

$$|\bar{\Psi}(z, y_{\alpha})| \leqq C_3[|z| + \sum_{|\alpha|\leqq k-1} |y_{\alpha}| + \sum_{|\alpha|=k} |y_{\alpha}|^2]\ .$$

Par suite, il existe m' et C_4, indépendants de ℓ tels qu'on ait, pour $0 < \lambda \leqq m'$, et $A^{k+\ell-1}(\lambda) \leqq m'$:

$$A^{k+\ell}(\lambda) \leqq C_4[\lambda + \lambda A^{k+\ell-1}(\lambda) + A^{k+\ell-1}(\lambda)^2]\ .$$

Soit $A(\lambda)$ la solution de l'équation $A(\lambda) = C_4[\lambda + \lambda A(\lambda) + A(\lambda)^2]$ qui tend vers 0 avec λ ; on vérifie immédiatement qu'il existe $m'' > 0$ tel que pour $\lambda \leqq m''$, la relation $0 \leqq a \leqq A(\lambda)$ entraîne $0 \leqq C_4[\lambda + \lambda a + a^2] \leqq A(\lambda)$ (cf. méthode des approximations successives). Choisissons $\lambda \leqq \inf(m', m'')$; par récurrence, on voit que l'on a $A^{k+\ell}(\lambda) \leqq A(\lambda)$ pour tout ℓ, ce qui montre que les séries $\sum_{\ell} D^{\alpha}F_{k+\ell}$, $|\alpha| = k$, et donc la série $\sum_{\ell} F_{k+\ell}$ est convergente ; ceci démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

AGMON, S., DOUGLIS, A., NIRENBERG, L. [1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math. 12(1959) p. 623-727.

BERNARD, D. [1] Sur la géométrie différentielle des G-structures, Ann. Inst. Fourier 10(1960) p. 153-273.

DOUADY, A. [1] Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier 16-1(1966) p. 1-98.

DOUGLIS, A., NIRENBERG L. [1] Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 8(1955) p. 503-538.

EHRENPREIS, L., GUILLEMIN, V.W., STERNBERG, S. [1] On Spencer's estimates for δ-Poincaré, Ann. of Math. 82(1965) p. 128-138.

FRIEDMAN, A. [1] Regularity of solutions of non-linear elliptic and parabolic equations, J. Math. Mech. 7(1958) p. 43-60.

FROLICHER, A., NIJENHUIS, A. [1] Theory of vector-values differential forms I, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, 59(1956) p. 338-359.

GOLDSCHMIDT, H. [1] Existence theorems for analytic linear partial differential equations, Ann. of Math. 86(1967) p. 246-270.

[2] Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations, J. Diff. Geometry 1(1967) p. 269-307.

[3] Prolongations of linear differential equations I. Ann. Sc. Ecole Normale Sup. 4-1(1968) p. 417-444.

GRAUERT, H. [1] Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Publ. Math. I.H.E.S. 5(1960).

GROTHENDIECK, A. [1] Techniques de construction en géométrie algébrique, exposés 7-17, Séminaire H. Cartan, Ecole Normale Supérieure, Paris(1960/61).

GUILLEMIN, V., W., STERNBERG, S. [1] Deformation theory of pseudogroup structures, Mem. Amer. Math. Soc. 64(1966) p. 1-80.

KURANISHI, M. [1] Lectures on involutive systems of partial differential equations, Publ. Soc. Mat. São Paulo (1967) p. 1-75.

MALGRANGE, B. [1] Cohomologie de Spencer (d'après Quillen), Séminaire Mathématique, Orsay (1966)

[2] Sur l'intégrabilité des structures presque-complexes, Roma, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica 2(1968) p. 289-296.

NEWLANDER, A., NIRENBERG, L. [1] Complex coordinates in almost-complex manifolds, Ann. of Math. 65(1957) p. 391-404.

QUÊ, Ngo Van [1] Non-abelian Spencer cohomology and deformation theory, J. Diff. Geometry (à paraître).

QUILLEN, D. [1] Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations, Ph. D. thesis, Harvard University (1964) [Non publié].

SINGER, J.M., STERNBERG, S. [1] The infinite groups of Lie and Cartan, J. Analyse Math. 15(1965) p. 1-114.

SPENCER, D.C. [1] Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups I-II, Ann. of Math. 76(1962) p. 306-445 III, Ann. of Math. 81(1965) p. 389-450.

[2] On deformations of pseudogroups structures, Collected math. papers in honour of K. Kodaira, University of Tokyo Press (à paraître).

SWEENEY, W.J. [1] The δ-Poincaré estimate, Pac. J. Math. 20(1967) p. 559-570.