Séminaire Jean Leray. Sur les équations aux dérivées partielles

Raymond Gérard

Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1968-1969), p. 9-15
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1968-1969___1_9_0>

THÉORIE DE FUCHS SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

par Raymond GÉRARD

Introduction

Nous généralisons la théorie classique de Fuchs pour les équations différentielles linéaires dont nous allons rappeler quelques éléments.

Une équation différentielle linéaire et homogène est dite de Fuchs à l'origine de $\mathbb{C}$, si elle peut s'écrire dans un disque D centré à l'origine sous la forme :

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = 0 \,, \tag{1}$$

où pour tout i les coefficients a_i sont holomorphes dans D. Nous savons que toute solution f de (1) est holomorphe sur le revêtement universel $\mathcal{R}$ de $D - \{0\}$ et que de plus elle est d'ordre fini à l'origine, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{Q \in U \\ \psi(Q) \to 0}} \dfrac{f(Q)}{Q^{\lambda}} = 0 \; ; \qquad Q \in \mathcal{R} \,, \; \psi : \mathcal{R} \to D - \{0\} \,, \\ \text{pour tout ouvert } U \text{ de } \mathcal{R} \text{ se projetant sur } D - \{0\} \text{ en un ouvert} \\ \text{contenant } 0 \text{ dans son adhérence et contenu dans un secteur angulaire} \\ \text{différent du plan tout entier.} \end{array} \right.$$

D'autre part l'espace vectoriel des solutions de (1) est stable par les opérations de $\pi_1(D - \{0\})$.

Réciproquement tout espace vectoriel E de dimension finie n de fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}$ stable par les opérations de $\pi_1(D - \{0\})$ et dont tous les éléments sont d'ordre fini à l'origine, est l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle de Fuchs à l'origine.

Cette théorie étant locale, elle se généralise aisément aux surfaces de Riemann [4]. Dans sa thèse A.H.M. Levelt [3] a généralisé la théorie de Fuchs aux systèmes d'équations différentielles.

Les résultats énoncés dans cet exposé sont développés dans [2].

I. Etude locale

Soient :

D : un disque centré à l'origine de C .

$\hat{D} = D - \{0\}$.

R : le revêtement universel de D .

R' : le revêtement ramifié minimal prolongeant R au dessus de l'origine.

$\mathfrak{D} = (\hat{D})^n \times D^{m-n} \subset \mathbb{C}^m$.

$\mathfrak{R} = R^n \times D^{m-n}$.

$\mathfrak{R}' = R'^n \times D^{m-n}$.

$\psi = \hat{\mathfrak{R}}' \to D^m$.

$Q_o = \psi^{-1}(0)$.

$\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathfrak{R})$: l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications holomorphes de $\mathfrak{R}$ dans $\mathbb{C}^p$.

DÉFINITION 1. Un ouvert U de $\mathfrak{D}$ est dit <u>distingué</u>, s'il possède les propriétés suivantes :

a) la projection de U sur le plan de coordonnée de rang j de $\mathbb{C}^m$ est :

- si $j > n$, un ouvert de D contenant 0 dans son adhérence ;
- si $1 \leqq j \leqq n$, un ouvert de D contenant 0 dans son adhérence et contenu dans un secteur angulaire différent du plan tout entier.

b) il existe deux constantes strictement positives H et K , telles que pour tout point $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ de U l'on ait :

$$H \leqq \frac{|x_j|}{|x_k|} \leqq K \ ;$$

pour tout couple (j,k) avec $j < k$.

DÉFINITION 2. Un ouvert de $\mathfrak{R}$ est dit <u>distingué</u>, s'il est homéomorphe par ψ à un ouvert distingué de $\mathfrak{D}$.

DÉFINITION 3. Un élément $f \in \mathcal{H}^{p\times 1}(\mathfrak{R})$ est dit <u>d'ordre fini à l'origine</u> s'il existe un n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q \in U}} \frac{f(Q)}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\lambda_j}} = 0 \quad , \quad Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m) \in \mathfrak{R} \ ,$$

pour tout ouvert distingué U de $\mathfrak{R}$.

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie q de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathfrak{R})$ possédant les propriétés suivantes :

A) E est stable par les opérations de $\pi_1(\mathfrak{D})$,

B) tous les éléments de E sont d'ordre fini à l'origine. Désignons par

$g_1, g_2, \dots, g_n$ les générateurs de $\pi_1(\mathfrak{D})$ vérifiant :

$$(g_k^* \log.)(Q) = \log.Q + 2\pi i \qquad \text{pour tout } Q \in R .$$

Ces générateurs sont deux à deux permutables, ce qui permet d'écrire :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$$

où, pour tout k et tout j, $g_j^*|E_k$ n'a qu'une seule valeur propre a_j^k.

Nous avons :

THÉORÈME 1. <u>L'espace vectoriel</u> E <u>admet une base</u> $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ <u>telle que</u> :

$$(e_1, e_2, \dots, e_q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

<u>où</u>

a) U <u>est une</u> $p\times q$-<u>matrice holomorphe sur</u> D^m.

b) <u>Les matrices</u> A_j <u>sont diagonales et décomposées en blocs</u>

$$A_j = \begin{pmatrix} A_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_j^2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_j^r \end{pmatrix} \quad \underline{\text{avec pour tout}}\ k \quad A_j^k = \begin{pmatrix} \rho_j^k + \varphi_j^{k,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_j^k + \varphi_j^{k,2} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \rho_j^k + \varphi_j^{k,d_1} \end{pmatrix}$$

<u>où</u> : $\exp 2\pi i \rho_j^k = a_j^k$, $\quad 0 \leq \operatorname{Re}\rho_j^k < 1$.

<u>Les</u> $\varphi_j^{k,\ell}$ <u>pour tout</u> (j,k) <u>fixé forment une suite décroissante d'éléments de</u> $\mathbb{Z}$.

c) <u>Les matrices</u> F_j <u>sont nilpotentes sous forme triangulaire</u>

$$F_j = \begin{pmatrix} F_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ & F_j^2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & F_j^r \end{pmatrix}, \quad F_j^k = -\rho_j^k I + \frac{1}{2\pi i} \log D_j^k ;$$

<u>où</u> :

$$D_j = \begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ & D_j^2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & D_j^r \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'endomorphisme g_j^* dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ de E.

DÉFINITION 4. L'espace vectoriel E est dit faiblement singulier à l'origine si $U(0)$ est de rang maximum.

Cette définition est indépendante du choix de la base vérifiant le théorème 1.

DÉFINITION 5. Les n-uples

$$\beta^{k,\ell} = (\rho_1^k + \varphi_1^{k,\ell}, \rho_2^k + \varphi_2^{k,\ell}, \dots, \rho_n^k + \varphi_n^{k,\ell}) \quad 1 \leqq k \leqq r, \quad 1 \leqq \ell \leqq d^k ,$$

sont appelés les exposants de E à l'origine.

THÉORÈME 2. Tout sous-espace vectoriel E de dimension p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\Omega)$ faiblement singulier à l'origine est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme :

$$(1) \qquad df = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{x_j} dx_j + \sum_{j=n+1}^{m} P_j dx_j \Big) f$$

où, pour tout j, P_j est une $p\times p$-matrice méromorphe sur D^m et holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^m$. Réciproquement l'espace vectoriel des solutions d'un système (1) où les P_j sont holomorphes dans D^m, est faiblement singulier à l'origine.

On vérifie que les exposants de E sont donnés par les valeurs propres des matrices $P_j(0)$ $(j = 1,2,\dots,n)$.

THÉORÈME 3. Pour tout sous-espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{1\times 1}(\Omega)$ faiblement singulier à l'origine, il existe un isomorphisme de E sur un sous-espace vectoriel E' de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\Omega)$ faiblement singulier à l'origine et ayant mêmes exposants que E.

II. Etude globale

A) Définition de l'ensemble $\Omega^{p\times p}(V,A)$.

Soit V une variété analytique complexe et A un sous-ensemble analytique de V de codimension un en chacun de ses points.

1°) A est sans singularité.

Nous noterons $\Omega^{p\times p}(V,A)$ l'ensemble des formes différentielles de degré un à valeurs matricielles (carrées d'ordre p) holomorphes sur $V-A$ et telles que : pour tout point $M\in A$, il existe un quadruplet (U,F_U,P_U,π_U) vérifiant les conditions (I) suivantes :

(I)
1°) U est un voisinage ouvert de M dans V tel que $A \cap U$ soit irréductible dans U.

2°) F_U est une fonction holomorphe sur U telle que

$$A \cap U = \{P \in U | F_U(P) = 0\}$$

et

$$dF_U(P) \neq 0 \quad \text{pour tout } P \in A \cap U .$$

3°) P_U est une $p\times p$-matrice holomorphe sur U et π_U une forme différentielle de degré un à valeurs matricielles holomorphe dans U avec :

$$\omega | U - A \cap U = P_U \frac{dF_U}{F_U} + \pi_U .$$

Cette définition entraîne l'existence pour tout $\omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$ d'une fonction $\text{Rés}_V \omega$ définie et holomorphe sur A telle que pour tout quadruplet (U,F_U,P_U,π_U) vérifiant les conditions (I)

$$\text{Rés}_V \omega | A \cap U = P_U | A \cap U .$$

Si $\text{Rés}_V \omega = 0$ la forme ω est la restriction à $V-A$ d'une forme différentielle holomorphe sur V.

2°) A <u>admet des singularités</u>.

Désignons par (A^*,μ) le normalisé de A et posons $S^* = \mu^{-1}(S)$ où S est l'ensemble singulier de A.

Nous désignerons cette fois par $\Omega^{p\times p}(V,A)$ le sous-ensemble de $\Omega^{p\times p}(V-S,A-S)$ des 1-formes différentielles matricielles ω pour lesquelles il existe une fonction matricielle notée encore $\text{Rés}_V \omega$ (appelée également le résidu de ω) définie et holomorphe sur A telle que

$$\text{Rés}_V \omega = (\text{Rés}_{V-S} \omega) \circ \mu \quad \text{sur } A^* - S^* .$$

<u>Exemples</u>. Supposons A, réunion d'un nombre fini q de composantes irréductibles A_i sans singularités.

a) V <u>est une variété de Stein</u> et chaque A_i est défini par l'annulation d'une seule fonction F_i holomorphe sur V vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout $M \in A_i$. Alors $\omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$ si et seulement si

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \Theta ;$$

où P_i est une $p\times p$-matrice holomorphe sur V et Θ une forme différentielle matricielle holomorphe sur V.

b) V <u>est l'espace projectif complexe</u> de dimension $m, F_i = 0$ une équation polynomiale irréductible de A_i. Alors $\omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$ si et seulement si

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} \mathcal{A}_i \frac{dF_i}{F_i} ;$$

où les $\mathcal{A}_i$ sont des $p\times p$-matrices constantes liées par la relation

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, \mathcal{A}_i = 0 .$$

B) <u>Stabilité de</u> $\Omega^{p\times p}(V,A)$ <u>par modification de Hopf</u>.

Soient Σ un sous-ensemble analytique de V sans singularité et de codimension supérieure ou égale à 2 ; V' une variété analytique complexe telle qu'il existe une application analytique τ de V' sur V qui soit :

1°) un isomorphisme de $V' - \tau^{-1}(\varepsilon)$ sur $V - \varepsilon$,

2°) composée d'éclatement de Hopf.

Si A' désigne $\tau^{-1}(A)$ nous avons :

THÉORÈME 4. <u>L'application</u> τ <u>induit un isomorphisme</u> τ^* <u>de</u> $\Omega^{p\times p}(V,A)$ <u>sur</u> $\Omega^{p\times p}(V',A')$.

C) <u>Le théorème de Fuchs</u>.

Soit V une variété analytique complexe et A un sous-ensemble analytique de V de codimension un en chacun de ses points. Notons : $\hat{V} = V-A$, $\mathfrak{R}(\hat{V})$ le revêtement universel de V, $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathfrak{R}(\hat{V}))$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications holomorphes de $\mathfrak{R}(\hat{V})$ dans $\mathbb{C}^p$.

1°) <u>Les composantes irréductibles de</u> A <u>sont en position générales et sans singularité</u>.

Un sous-espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathfrak{R}(\hat{V}))$ est dit <u>faiblement singulier</u> sur V si :

A) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$,

B) tous les éléments de E sont d'ordre fini en tout point de A et E est faiblement singulier en tout point de V.

THÉORÈME 5. <u>Tout espace vectoriel</u> E <u>faiblement singulier sur</u> V <u>est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff de la forme</u>

$$df = \omega f \quad \text{où} \quad \omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$$

<u>et réciproquement</u>.

2°) Cas général.

On sait qu'il existe une variété analytique complexe V' et une application analytique τ de V' sur V telle que :

a) $\tau^{-1}(A) = A'$ ait ses composantes irréductibles en position générale et sans singularité.

b) $\tau|V'-A'$ soit un isomorphisme analytique sur $V-A$.

c) τ soit composée d'éclatement de Hopf .

L'isomorphisme $\tau|V'-A'$ induit un isomorphisme de $\mathcal{R}(V' - A')$ sur $\mathcal{R}(V - A)$.

Un sous-espace vectoriel de dimension finie E de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit faiblement singulier sur V si, considéré comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ il est faiblement singulier sur V'. Cette définition est indépendante de l'application τ .

THÉORÈME 6. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(V))$ faiblement singulier sur V est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable

$$df = \omega f \quad \text{où} \quad \omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$$

et réciproquement.

Ce théorème généralise le théorème classique de Fuchs pour les équations différentielles linéaires.

On vérifie aisément que les fonctions hypergéométriques à deux variables F_1, F_2, F_3 de Appell et Kampé de Fériet [1] sont données par des systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur le plan projectif complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. APPELL et J. KAMPÉ de FÉRIET, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Gauthier-Villars et Cie, Paris.

[2] R. GÉRARD, Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe, J. Math. Pures et appl. 47, 1968, p. 321 à 404.

[3] A.H.M. LEVELT, Hypergeometric Functions (Thèse, Drukkrij, Hollande, N.V., Amsterdam).

[4] H.J. NASTOLD, Uber meromorphe Schnitte complex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen, Math. Z., Bd. 69, 1958, p. 366-394.