Bernard Malgrange

Sur l'intégrabilité des structures presque-complexes

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1968-1969), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1968-1969___1_1_0>

SUR L'INTÉGRABILITÉ DES STRUCTURES PRESQUE-COMPLEXES

par Bernard MALGRANGE (Orsay)

Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration du théorème, dû à Newlander-Nirenberg [5] suivant lequel une structure presque-complexe vérifiant la "condition d'intégrabilité" est complexe. Depuis la démonstration originale de ce résultat, un certain nombre d'autres ont été données par différents auteurs [3], [4], [6]. Nous pensons cependant intéressant de donner la nôtre, à cause de sa simplicité, et surtout parce qu'elle s'étend à des situations plus générales, notamment aux "pseudogroupes de Lie" elliptiques transitifs, comme nous le montrerons dans les exposés suivants.

Rappelons rapidement en quoi consiste le problème, en nous limitant au cas $\mathcal{E}^\infty$ pour ne pas alourdir l'exposé. Soit X une variété différentiable, sur $\mathbb{R}$, de dimension $2n$, T (resp. T^*) le fibré tangent (resp. cotangent) de X ; une structure presque-complexe sur X est définie par la donnée d'une section J de $T \otimes_X T^*$ vérifiant $J^2 = -I$ (on identifie, en tout point a de X, $T_a \otimes T_a^*$ à l'espace des $\mathbb{R}$-endomorphismes de T_a). Autrement dit, on se donne, pour tout a, une structure $\mathbb{C}$-vectorielle sur T_a, compatible avec sa structure $\mathbb{R}$-vectorielle, et dépendant de a d'une manière indéfiniment différentiable. Si X est une variété analytique-complexe de dimension complexe n, et qu'on la considère comme une variété différentiable sur $\mathbb{R}$, une telle structure presque-complexe est définie canoniquement de la manière suivante : en choisissant au voisinage de a des coordonnées locales complexes, on obtient un isomorphisme de T_a avec $\mathbb{C}^n$, donc une structure $\mathbb{C}$-vectorielle sur T_a dont on vérifie immédiatement qu'elle ne dépend pas des coordonnées locales choisies. Par ailleurs, le tenseur J détermine entièrement la structure complexe de X de la manière suivante : si Ω est un ouvert de X, les fonctions holomorphes $\Omega \to \mathbb{C}$ sont celles qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann : $\xi f + iJ\xi f = 0$, pour tout champ de vecteurs ξ sur Ω.

Une structure presque-complexe est dite "intégrable" si elle provient d'une structure complexe ; pour cela, il faut et il suffit qu'il existe, au voisinage de tout point a de X, un système de n fonctions $f_1, \dots, f_n$, de classe $\mathcal{E}^\infty$ à valeurs complexes, vérifiant les équations de Cauchy-Riemann, et formant un système de "coordonnées locales complexes" en a (i.e. leurs parties réelles et imaginaires forment un système de coordonnées locales en a). Il en résulte immédiatement que tout vecteur complexe en a, orthogonal à $(df_1)_a, \dots, (df_n)_a$ est de la forme $\xi + iJ_a\xi$, avec $\xi \in T_a$; on en déduit ceci : si ξ et η

sont deux champs de vecteurs sur X , le crochet $[\xi+iJ\xi,\eta+iJ\eta]$ est encore de la forme $\zeta+iJ\zeta$; d'où, en séparant les parties réelles et imaginaires, la condition

$$(1) \qquad [\xi,J\eta]+[J\xi,\eta] = J[\xi,\eta] - J[J\xi,J\eta] .$$

Inversement, supposons cette condition satisfaite ; le théorème de Frobenius formel permet aisément de montrer que J provient, en chaque point a de X , d'une structure complexe <u>au point de vue formel</u>, i.e. lorsqu'on travaille avec les développements de Taylor formels en a au lieu des fonctions différentiables ; de même, si X et J sont analytiques réels, le théorème de Frobenius analytique montre que J provient d'une structure complexe.

Il est donc naturel d'appeler (1) "condition d'intégrabilité formelle" de la structure presque-complexe définie par J . Cela étant, le théorème de Newlander-Nirenberg s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME. <u>Une structure presque-complexe formellement intégrable est intégrable</u>.

Puisqu'une structure presque-complexe intégrable détermine la structure complexe correspondante, il suffit de démontrer ce théorème localement (les structures complexes obtenues "se recollent") ; on peut donc supposer que X est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$; de plus, on peut supposer, après un changement linéaire de coordonnées, que J_0 est le tenseur de la structure complexe standard sur $\mathbb{C}^n$, identifié à $\mathbb{R}^{2n}$. Désignons par $x_1,\dots,x_n$ les coordonnées sur $\mathbb{C}^n$; au voisinage de 0 , les équations de Cauchy-Riemann peuvent se résoudre par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i}$; elles se réduisent alors à un système de la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} = \sum_j a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (1 \leqq i \leqq n) ,$$

les a_{ij} étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ et nuls à l'origine. Posons

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix} , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}\end{pmatrix} ; \quad A_i = (a_{i1},\dots,a_{in}), \quad A = (a_{ij})$$

$$\text{et } F = (f_1,\dots,f_n) .$$

Le problème revient à trouver F , de classe $\mathscr{C}^\infty$, avec (si l'on veut !) $F(0) = 0$, les f_i formant un système de coordonnées locales complexes en 0 , et vérifiant l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = A\,\frac{\partial F}{\partial x}$$

ou encore

$$(2_i) \qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_i} = A_i \frac{\partial F}{\partial x} \quad (1 \leqq i \leqq n) .$$

La condition d'intégrabilité formelle s'écrit ici de la manière suivante : désignons par ξ_i le champ de vecteurs complexe

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} - A_i \frac{\partial}{\partial x} ;$$

alors, le crochet $[\xi_i, \xi_j]$ doit être une combinaison linéaire des ξ_k, à coefficients différentiables ; comme ce crochet ne contient aucune dérivation $\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}$, il doit donc être nul, ce qui s'écrit explicitement :

$$(3) \qquad \frac{\partial A_i}{\partial \bar{x}_j} + A_i \frac{\partial A_j}{\partial x} = \frac{\partial A_j}{\partial \bar{x}_i} + A_j \frac{\partial A_i}{\partial x} \quad (1 \leqq i,j \leqq n) .$$

Nous allons montrer que, sous la condition (3), on peut trouver sur un voisinage suffisamment petit de 0, une solution F de (2) qui soit aussi voisine que l'on veut, ainsi que ses dérivées premières, de l'identité (remarquons d'ailleurs qu'avec cette hypothèse supplémentaire, on déduit immédiatement (3) de (2) en dérivant (2_i) par rapport à $\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$) ; remarquons aussi que le système (2) est elliptique pour x assez voisin de 0, donc il suffira de trouver F de classe $\mathcal{C}^2$, par exemple, pour assurer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en vertu des propriétés classiques des systèmes elliptiques (voir [1], par exemple).

Nous allons partir de la remarque suivante : posons, pour F voisin de l'identité dans $\mathcal{C}^1$:

$$\varphi(F) = \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} ;$$

l'équation (2) s'écrit alors $\varphi(F) = A$, et l'équation linéarisée en $F =$ identité est $\frac{\partial F'}{\partial \bar{x}} = A'$; de même, l'équation linéarisée de (3) en $A = 0$ est

$$\frac{\partial A'_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial A'_j}{\partial \bar{x}_i} ;$$

les équations (2) et (3) apparaissent donc comme des variations non-linéaires des équations de la d"-cohomologie (ce fait trouve d'ailleurs une interprétation systématique dans la théorie des pseudogroupes de Lie, où l'on interprète les équations linéarisées de celles du pseudogroupe - en l'occurence, ici, les transformations holomorphes - comme celles des automorphismes infinitésimaux).

Avant de traiter notre problème, rappelons une méthode, due à H. Cartan, de résolution locale de ces dernières équations ; nous nous limiterons au degré zéro, qui sera le seul à nous servir ; soient $a_1, \ldots, a_n$, des fonctions définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant

$$\frac{\partial a_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \bar{x}_i} \qquad (1 \leqq i,j \leqq n) ;$$

pour trouver f vérifiant, au voisinage de 0 : $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} = a_i$, on commence par résoudre

$$\left(\frac{1}{4}\Delta h =\right) \Sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial \bar{x}_i} = \Sigma \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

et l'on pose $f = g+h$; on est alors ramené à résoudre $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{x}_i} = b_i$, avec $b_i = a_i - \dfrac{\partial h}{\partial \bar{x}_i}$; on a évidemment

$$\frac{\partial b_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial b_j}{\partial \bar{x}_i} \qquad \text{et} \qquad \Sigma \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = 0 ;$$

de cette dernière équation, on tire

$$\sum_i \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_i \partial \bar{x}_j} = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n),$$

d'où, en tenant compte de la précédente,

$$\sum_i \frac{\partial^2 b_j}{\partial x_i \partial \bar{x}_i} = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \Delta b_j = 0$$

(dans les notations usuelles, posant $b = \Sigma b_i dx_i$, ce calcul s'écrit : $d''b = 0$ et $d''^*b = 0$, d'où $-\Delta b = 4(d''d''^* + d''^*d'')b = 0$). Ainsi les b_j sont harmoniques, donc analytiques ; il suffit alors de trouver g par un développement en série.

Revenant à notre problème, nous allons opérer de manière analogue ; cherchons F sous la forme $G \circ H$, G et H étant assez voisins de l'identité dans $\mathcal{E}^1$, et désignons par $y = H(x)$, $Z = G(y)$ les changements de coordonnées successifs ainsi effectués ; on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\circ H\right) + \frac{\partial \bar H}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \bar y}\circ H\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial \bar x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\circ H\right) + \frac{\partial \bar H}{\partial \bar x}\left(\frac{\partial G}{\partial \bar y}\circ H\right) .$$

Si nous posons :

(4) $$\frac{\partial G}{\partial \bar y}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1} = B$$

l'équation (2) est équivalente à

(5) $$\frac{\partial H}{\partial \bar x} + \frac{\partial \bar H}{\partial \bar x}(B\circ H) = A\left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \bar H}{\partial x}(B\circ H)\right].$$

Inversement, si l'on choisit H assez voisin de l'identité dans $\mathscr{C}^1$, on pourra définir $B\circ H$ et donc B par l'équation (5), et l'on sera ramené à résoudre (4), i.e. la même équation que (2) avec A remplacé par B ; en outre, B vérifiera la condition d'intégrabilité formelle (3) : cela serait évident si H était de classe $\mathscr{C}^\infty$, puisque (3) est, en tout point assez voisin de a, la condition d'intégrabilité de (2) dans les séries de Taylor d'ordre en a ; dans le cas général, il suffit de refaire le même raisonnement avec la série de Taylor d'ordre 2 (resp.1) de F (resp. A) en a ; nous laissons les détails au lecteur.

Nous allons montrer quo l'on peut choisir H de manière que $B(0)$ soit aussi voisin qu'on veut de 0, et qu'on ait :

(6) $$\Sigma\,\frac{\partial B_i}{\partial y_i} = 0 .$$

Avant d'énoncer de façon plus précise ce résultat, fixons quelques notations. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, fixé une fois pour toutes, avec $0<\alpha<1$. Soit U une boule fermée de centre 0 dans $\mathbb{C}^n$; si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^m$ sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$, on pose, avec les notations usuelles :

$$\|f\|_{m+\alpha,U} = \sum_{|k|\leq m}\sup_{x\in U}|D^k f(x)| + \sum_{|k|=m}\sup_{\substack{x\in U,y\in U\\ x\neq y}}\frac{|D^k f(y)-D^k f(x)|}{|y-x|^\alpha}$$

(où $|y-x|$ désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{C}^n$). On désigne par $\mathscr{C}^{m+\alpha}(U)$ l'ensemble des $f\in\mathscr{C}^m(U)$ pour lesquelles on a $\|f\|_{m+\alpha,U}<+\infty$. Enfin, pour $F=(f_1,\dots f_n)\in\mathscr{C}^{m+\alpha}(U)\otimes\mathbb{C}^n$, on posera par exemple $\|F\|_{m+\alpha,U} = \sup_i \|f_i\|_{m+\alpha,U}$.

Dans la suite, U sera supposé contenu dans un U_0 fixe, lui-même contenu dans l'ouvert de définition de A ; il résulte alors du théorème des fonctions implicites et de résultats élémentaires sur les classes $\mathscr{C}^{m+\alpha}$ qu'on peut trouver $c > 0$, indépendant de U tel que, si $H \in \mathscr{C}^{2+\alpha}(U) \otimes \mathbb{C}^n$ est dans la boule

$$\mathcal{B}_U : \|H-\mathrm{id}\|_{2+\alpha,V} \leqq c$$

("id" = identité), les propriétés suivantes soient satisfaites : posant $V = H(U)$, H admet un inverse $K \in \mathscr{C}^{2+\alpha}(V) \otimes \mathbb{C}^n$ (définition analogue à la précédente) ; de plus, la matrice $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} - A\,\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}$ est inversible en tout point de U, et par conséquent l'équation (5) définit une fonction $B \in \mathscr{C}^{1+\alpha}(V) \otimes \mathbb{C}^n$. Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME. __Etant donné__ $\varepsilon > 0$, __on peut trouver__ U __et__ $H \in \mathcal{B}_U$, __avec__ $H(0) = 0$, __tels que__ B __vérifie__ (6) __et en outre__ $|B(0)| \leqq \varepsilon$.

Posons $A_t(x) = A(tx)$. On peut évidemment supposer c choisi pour que les propriétés énoncées ci-dessus soient vraies aussi pour A_t, avec $0 \leqq t \leqq 1$. Pour démontrer le lemme, il revient au même, par homothétie, de travailler avec un U fixe, et de démontrer le résultat pour A_t lorsque t est assez petit. Soit E l'espace des $H \in \mathscr{C}^{2+\alpha}(U) \otimes \mathbb{C}^n$ vérifiant $H(0) = 0$, et posons $\mathcal{B}'_U = \mathcal{B}_U \cap E$. De (5), on tire

$$B \circ H = -\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} - A_t\,\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} - A_t\,\frac{\partial H}{\partial x}\right),$$

d'où résulte facilement que l'application $\Phi : (H,t) \longmapsto B \circ H$ est continue de $\mathcal{B}'_U \times [0,1]$ dans $\mathscr{C}^{1+\alpha}(U) \otimes \mathbb{C}^n$, et admet une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial H}$ continue par rapport à (H,t) (on considère évidemment ici E et $\mathscr{C}^{1+\alpha}(U)$ comme des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; sur $\mathbb{C}$, l'existence de cette dérivée est évidemment fausse!) en fait, Φ sera même analytique-réelle par rapport à H, mais peu importe ici.

On a d'autre part

$$\frac{\partial B_i}{\partial y_i} \circ H = \left(\frac{\partial K}{\partial y_i} \circ H\right)\frac{\partial}{\partial x}(B_i \circ H) + \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial y_i} \circ H\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(B_i \circ H),$$

avec $K = H^{-1}$; en exprimant $\frac{\partial \bar{K}}{\partial y_i} \circ H$ et $\frac{\partial K}{\partial y_i} \circ H$ en fonction des dérivées partielles de H et $\bar{H}$ par rapport à x et $\bar{x}$, et en tenant compte du résultat précédent, on trouve que l'application

$$\Psi : (H,t) \longmapsto \Sigma\,\frac{\partial B_i}{\partial y_i} \circ H$$

est continue de $\mathcal{B}'_U \times [0,1]$ dans $\mathscr{C}^{\alpha}(U) \otimes \mathbb{C}^n$ et admet une $\mathbb{R}$-dérivée partielle $\frac{\partial \Psi}{\partial H}$ continue par rapport à (H,t). Enfin, on a : $\Psi(\mathrm{id},0) = 0$. Pour établir le lemme, il suffit donc, d'après le théorème des fonctions implicites, de montrer que la dérivée partielle $\frac{\partial\Psi}{\partial H}(\mathrm{id},0)$: $E \longmapsto \mathscr{C}^{\alpha}(U) \otimes \mathbb{C}^n$ est surjective et admet un inverse à droite linéaire continu (en effet, l'équation $\Psi(H,t) = 0$ aura alors pour t petit une solution H_t dépendant continuement de t, avec $H_0 = \mathrm{id}$, donc la condition $|B(0)| \leq \varepsilon$ sera satisfaite pour t assez voisin de 0).

Or, en reprenant le calcul précédent avec $t = 0$, donc $A_t = 0$, on trouve que $\frac{\partial\Psi}{\partial H}(\mathrm{id},0)$ est l'application

$$H' \longmapsto \Sigma \frac{\partial^2 H'}{\partial x_i \partial \bar{x}_i} = \frac{1}{4} \Delta H' ,$$

qui s'inverse à droite par $H'' \mapsto 4(PH'' - PH''(0))$, P désignant le noyau de Green du problème de Dirichlet dans U ; cette application va bien de $\mathscr{C}^{\alpha}(U) \otimes \mathbb{C}^n$ dans E à cause des propriétés classiques du problème de Dirichlet par rapport aux classes $\mathscr{C}^{m+\alpha}$; le lemme est donc démontré.

Pour établir le théorème, il suffit maintenant de remarquer que, si ε est choisi assez petit, le système différentiel

$$\text{(3 bis)} \qquad \frac{\partial B_i}{\partial \bar{y}_j} + B_i \frac{\partial B_j}{\partial y} = \frac{\partial B_j}{\partial \bar{y}_i} + B_j \frac{\partial B_i}{\partial y}$$

$$\text{(6)} \qquad \Sigma \frac{\partial B_i}{\partial y_i} = 0$$

est quasi-linéaire elliptique au voisinage de $y = 0$; comme B est de classe $\mathscr{C}^{1+\alpha}$, il en résulte d'abord que, au voisinage de 0, B est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ (voir [1] ; les raisonnements de cet article sont faits pour des systèmes "déterminés", mais ils s'appliquent aussi sans difficulté au cas "surdéterminé" que nous considérons ici) ; puis, que B est même analytique : pour le voir, on peut raisonner directement sur le système précédent, mais il est plus simple d'en déduire un système du second ordre "déterminé" elliptique, par le même procédé que dans le cas linéarisé, et d'appliquer alors les résultats classiques (voir par exemple [2]) Pour résoudre (4), on est ramené au cas analytique, ce qui démontre le théorème.

Remarque. En fait, la méthode employée ici suppose seulement A (donc le tenseur J) de classe $\mathscr{C}^{1+\alpha}$, résultat déjà obtenu par [6]. Peut-être pourrait-on aller un peu plus loin en remplaçant les classes $\mathscr{C}^{m+\alpha}$ par les $W^{s,p}$ (espaces des fonctions "à dérivées d'ordre s dans L^p ", en un sens convenable) ? Nous laisserons cette question aux spécialistes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUGLIS-L. NIRENBERG. Interior estimates for systems or partial differentials equations, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955) p. 503.

[2] A. FRIEDMAN, Regularity of solutions of non-linear elliptic and parabolic equations, J. Math. Mech. 7 (1958) p. 43.

[3] L. HÖRMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand (1966).

[4] J.J. KOHN, Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds I, Ann. Math. 78 (1963) p. 206.

[5] A. NEWLANDER-L. NIRENBERG, Complex coordinates in almost-complex manifolds, Ann. Math. 65 (1957) p. 391.

[6] A. NIJENHUIS-W.B. WOOLF, Some integration problems in almost-complex and complex manifolds, Ann. Math. 77 (1963) p. 424.