Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Takeshi Kotake

Le théorème aux points fixes d'Atiyah-Bott via les opérateurs paraboliques

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1968-1969), p. 16-18
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1968-1969___1_16_0>

LE THÉORÈME AUX POINTS FIXES D'ATIYAH-BOTT VIA LES OPÉRATEURS PARABOLIQUES(1)

par Takeshi KOTAKE

1. Complexe elliptique. Soit M une variété compacte ; soit $E_0, E_1, \dots, E_N$ des fibrés vectoriels sur M ; notons $\Gamma(E_0)$, $\Gamma(E_1), \dots$ les espaces des sections de classe C^∞ de $E_0, E_1, \dots$. Soit

$$(1.1) \qquad \dots \to \Gamma(E_i) \xrightarrow{d_i} \Gamma(E_{i+1}) \to \dots$$

une suite d'opérateurs différentiels d_i de degré k_i , que nous supposerons être un complexe elliptique ; autrement dit, nous supposerons que le système (1.1) satisfait à

a) $d_i \cdot d_{i-1} = 0 \qquad 1 \leqq i \leqq N-1$

b) la suite des symboles principaux

$$\dots \to E_{i,x} \xrightarrow{\sigma_i(\xi)} E_{i+1,x} \to \dots$$

est exacte pour tout covecteur $0 \neq \xi \in T_x^*$, $E_{i,x}$ étant la fibre de E_i au point $x \in M$. Pour un complexe elliptique (1.1), on définira le i-ème groupe de cohomologie par

$$(1.2) \qquad \mathfrak{H}^i = \ker(d_i)/\mathrm{image}(d_{i-1}) \ ;$$

$\mathfrak{H}^i$ $i = 0, \dots, N$, sont, comme on le verra, des espaces vectoriels complexes de dimension finie.

2. Section harmonique. Supposons un élément de volume sur M et des structures hermitiennes dans tous les E_i . Ces données nous permettront d'introduire des structures préhilbertiennes dans les espaces $\Gamma(E_i)$, et de considérer l'adjoint hilbertien de (1.1) :

$$(2.1) \qquad \dots \leftarrow \Gamma(E_i) \xleftarrow{d_i^*} \Gamma(E_{i+1}) \leftarrow \dots .$$

Cela étant, nommons les éléments de

$$(2.2) \qquad H(E_i) = \{s \mid s \in \Gamma(E_i),\ d_i s = d_{i-1}^* s = 0\}$$

les sections harmoniques de E_i ; il est alors aisé de voir que ces $H(E_i)$ sont

(1) A paraître dans : Comm. Pure and Applied Maths, New-York Univ. (1969).

des espaces vectoriels complexes de dimension finie. En effet, si les opérateurs d_i ont tous le même degré, on a des opérateurs $\Delta_i = -(d_{i-1} \circ d^*_{i-1} + d^*_i \circ d_i)$ de type elliptique, et on peut considérer les espaces $H(E_i)$ comme noyaux de ces Δ_i ; même dans le cas général, il n'est pas difficile de construire des opérateurs $L_i : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_i)$, jouissant des propriétés :

(a) Les L_i sont des opérateurs différentiels, fortement elliptiques, à des parties symétriques négatives

(b) $d_i \cdot L_i = L_{i+1} \cdot d_i$

(c) $H(E_i) = \mathrm{Ker}(L_i)$;

le fait : $\dim_c H(E_i) < \infty$ se déduit de (a), (c) et de la compacité de M . D'ailleurs, comme généralisation d'un théorème bien connu de De Rham, on a

LEMME 1. <u>Soit</u> $(H_i)_{0\leq i\leq N}$ <u>une famille de projections</u> : $\Gamma(E_i) \to H(E_i)$ <u>avec</u> $d_i \cdot H_i = H_{i+1} \cdot d_i$. <u>On peut alors définir des opérateurs</u> $Q_i : \Gamma(E_{i+1}) \to \Gamma(E_i)$ <u>tels que</u>

(2.1) $$I_i = H_i + d_{i-1}.Q_{i-1} + Q_i.d_i$$

I_i <u>étant l'opérateur identique dans</u> $\Gamma(E_i)$.

De (2.1), il résulte

(2.2) $$H(E_i) \cong \mathfrak{H}^i \quad ;$$

ainsi, $\dim_c \mathfrak{H}^i < \infty$ pour tout i .

3. <u>Nombre de Lefschetz</u>. Soit $g : M \to M$ une application de classe C^∞ ; g induit alors, pour chaque i , une application linéaire $f_g : \Gamma(E_i) \to \Gamma(g^{-1}E_i)$, $g^{-1}E_i$ étant le fibré induit à partir de E_i via g . Supposons maintenant qu'on ait des homomorphismes $h_i : g^{-1}E_i \to E_i$; ces h_i induisent d'une façon naturelle, des applications linéaires : $\Gamma(g^{-1}E_i) \to \Gamma(E_i)$, qu'on notera par les mêmes symboles h_i . La composition de f_g et h_i nous donne alors des endomorphismes

(3.1) $$P_i = h_i \cdot f_g : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_i) \qquad 0 \leqq i \leqq N \ ;$$

le système $(P_i)_{0\leqq i\leqq N}$ sera nommé un endomorphisme du complexe (1.1), si

(3.2) $$d_i \cdot P_i = P_{i+1} \cdot d_i \quad .$$

La condition (3.2) implique que les sous-espaces $\ker(d_i)$, $\mathrm{image}(d_{i-1})$, de $\Gamma(E_i)$, sont stables par application de P_i ; donc, par passage aux quotients, des endomorphismes

$$\tilde{P}_i : \mathfrak{h}^i \to \mathfrak{h}^i \quad , \qquad 0 \leq i \leq N .$$

Pour $(\tilde{P}_i)_{0 \leq i \leq N}$, on définit le nombre de Lefschetz par

$$\underline{L}(\tilde{P},E) = \Sigma_i (-1)^i \quad \text{trace} \quad (\tilde{P}_i | \mathfrak{h}^i) \quad . \tag{3.3}$$

$\underline{L}(\tilde{P},E)$ se réduit à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(E) = \Sigma_i (-1)^i \dim_c \mathfrak{h}^i$, si $P_i = I_d$ pour tout i.

4. <u>Représentation analytique de</u> $\underline{L}(\tilde{P},E)$. Considérons les équations différentielles de type parabolique

$$\frac{\partial}{\partial t} = L_i \qquad t > 0 \ , \quad 0 \leq i \leq N \ , \tag{4.1}$$

et notons $G_i(t)$ la solution fondamentale de (4.1). Du théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy il s'ensuit

(a) $d_i . G_i(t) = G_{i+1}(t) . d_i$,

(b) $H_i = G_i(t) . H_i$,

pour $t > 0$. De ces propriétés, et de (2.1), (3.2), il résulte facilement

LEMME 2. Indépendamment de $t > 0$, on a

$$\underline{L}(\tilde{P},E) = \Sigma_i (-1)^i \quad \text{trace} \ (P_i . G_i(t)) \tag{4.2}$$

où $P_i . G_i(t)$ $0 \leq i \leq N$ sont des transformations intégrales à noyau régulier et les traces sont prises au sens usuel.

5. <u>Théorème des points fixes d'Atiyah-Bott</u>. Supposons que $g : M \to M$ soit régulièrement transversal. Alors, l'ensemble $\mathrm{Fix}(g) \subset M$ des points fixes de l'application g est un ensemble fini, constitué des points simples, isolés.

THÉORÈME. <u>Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, on a</u>

$$\underline{L}(\tilde{P},E) = \Sigma_i \ \Sigma_{a \in \mathrm{Fix}(g)} \frac{(-1)^i \ \text{trace} \ h_i(a)}{|\det(I - g'(a))|} \tag{5.1}$$

<u>où</u> $g'(a)$ <u>est le Jacobien de</u> g <u>et</u> $h_i(a) : E_{i,a} \to E_{i,a}$, <u>au point fixe</u> $a \in \mathrm{Fix}(g)$.

<u>Preuve</u>. En vue du lemme 2, le calcul de $\underline{L}(\tilde{P},E)$ est réduit au problème local autour de $a \in \mathrm{Fix}(g)$; la formule (5.1) découle alors aisément de l'expression explicite d'uneparamétrix pour (4.1).